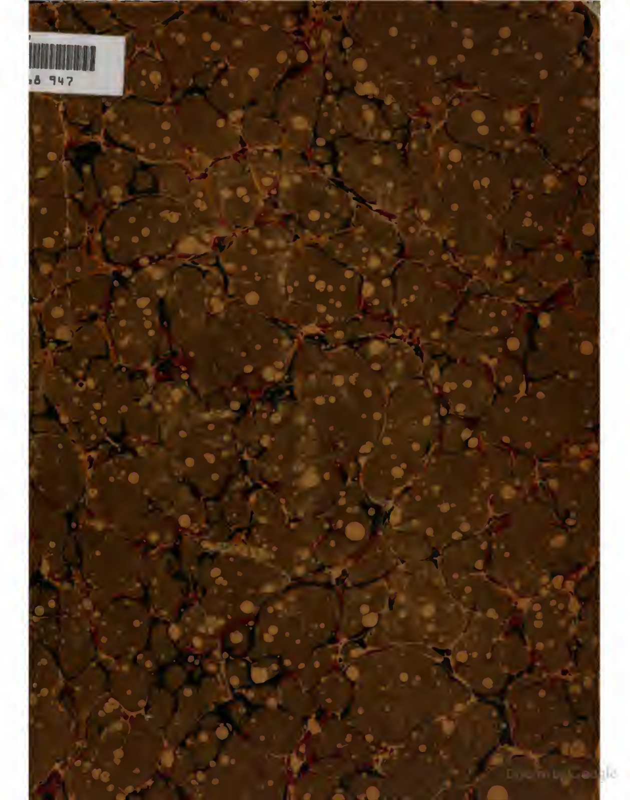

8 947





ABHANDLUNGEN

DER

KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU GÖTTINGEN.

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE.

NEUE FOLGE. BAND I.

AUS DEN JAHREN 1897—1900.

MIT SIEBEN TAFELN, DREI PLANEN DER STERNWARTE NEBST VERZEICHNISS DER GRÖSSEREN INSTRUMENTE UND EINER STERNKARTE.

BERLIN.

WEIDMANNSCHE BUCHHANDLUNG.

1900.



Inhalt.

A. v. Koenen, Ueber Fossilien der Unteren Kreide am Ufer des Mungo in Kamerun. Mit 4 Tafeln.

A. v. Koenen, Nachtrag zu Ueber Fossilien der Unteren Kreide am Ufer des Mungo in Kamerun. Mit 3 Tafeln.

Martin Brendel, Theorie der kleinen Planeten. Erster Theil.

Wilhelm Schur, Ableitung relativer Oerter des Mondes gegen die Sonne aus heliometrischen Messungen von Sehnenlängen ausgeführt auf der Sternwarte zu Göttingen während der partiellen Sonnenfinsternisse von 1890 Juni 16/17 (Beobachter: Schur, Ambronn und Hayn) und von 1891 Juni 6 (Beobachter: Schur). Mit drei Plänen der Sternwarte nebst Verzeichniss der grösseren Instrumente.

Wilhelm Schur, Vermessung der beiden Sternhaufen h und χ Persei mit dem sechszölligen Heliometer der Sternwarte in Göttingen, verbunden mit einer Uebersicht aller bis zum Jahre 1900 ausgeführten Instrumental-Untersuchungen. Mit einer Sternkarte.

ABHANDLUNGEN
DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.
MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE.
NEUE FOLGE BAND 1. Nro. 1.

Ueber

Fossilien der Unteren Kreide

am Ufer des Mungo in Kamerun.

Von

A. von Koenen.

Mit 4 Tafeln.

Berlin.
Weidmannsche Buchhandlung.
1897.



Ueber Fossilien der Unteren Kreide am Ufer des Mungo in Kamerun.

Von

A. von Koenen.

Mit 4 Tafeln.

Vorgelegt in der Sitzung vom 6. Februar 1897.

Herr Professor Wohltmann hatte auf einer Reise nach Kamerun, über welche er zuerst in der Illustrirten Landwirthschaftlichen Zeitung (1896, Jahrgang 16 Nr. 48, 50 und 52) berichtete, auch wichtige Beobachtungen über die geologischen Verhältnisse von Kamerun gemacht und namentlich am linken Ufer des Mungo zwischen Mundame und Eliki mürbe, feinkörnige Sandsteine und feste Kalke mit Fossilien aufgefunden. Da er sofort die Wichtigkeit dieses Fundes erkannte, so brachte er mehrere grosse Ammoniten etc. mit nach Deutschland und übergab mir das ganze Material zur näheren Untersuchung, indem er es zugleich bis auf einige Doubletten gütigst dem Geologischen Museum zu Göttingen verehrte.

Aus Kamerun führt nun Stromer von Reichenbach in seiner sehr werthvollen Arbeit „die Geologie der deutschen Schutzgebiete in Afrika“ (München und Leipzig 1896) S. 171 von vereinzelten Stellen nach den Angaben von Dusén Kalksandsteine und Sandsteine sowie Thonschiefer mit Konkretionen an, in welchen zum Theil schlecht erhaltene Steinkerne von Mollusken und Fischreste gefunden wurden, letztere nach dem Ausspruch von Dames Formen der unteren Kreide. Aehnliche Gesteine hatte Lenz schon früher an der Küste südlich von Kamerun nachgewiesen. Das jetzt von Wohltmann entdeckte Vorkommen am Mungo scheint aber allen früheren Reisenden in Kamerun entgangen zu sein.

Die von Wohltmann mitgebrachten Gesteine bestehen nun aus dünnschichtigen, mürben, grauen Sandsteinen und grauen Kalken. Die Sandsteine ent-

halten Bivalven-Steinkerne und Abdrücke, welche auf einander gepresst sind und hierdurch Skulpturen und andere Merkmale fast ganz eingebüsst haben, so dass sie zu einer näheren Bestimmung nicht mehr recht geeignet sind. Die Kalke sind grösstentheils ziemlich verunreinigt, theils durch Thon, theils wohl auch, da sie oft auf Schläge mit dem Hammer Funken geben, durch Kieselsäure; sie sind zum Theil ziemlich dicht, zum Theil aber auch körnig und endlich konglomeratisch, indem unregelmässige Brocken dunklen, harten Kalkes in der Grösse von Erbsen bis Haselnüssen oder selbst Wallnüssen in einer dichten Grundmasse von sehr unreinem Kalk liegen; nicht selten sind sie auf einer Seite von dem Steinkern einer Bivalve bedeckt und im Inneren zuweilen weit heller, enthalten auch wohl Schwefelkies-Partieen. Die Ammoniten sind innen von weissem bis grauem, krystallinischem Kalk erfüllt und gestatten recht wohl das Präpariren der Lobenlinien. Andere Fossilien, namentlich einzelne Klappen von Pelicypoden, sowie vereinzelte Gastropoden und Brachiopoden finden sich anscheinend besonders in bestimmten Lagen des Kalkes und lassen sich fast durchweg nur sehr unvollkommen aus dem Gestein herauslösen, zumal wenn sie stärkere Skulpturen besitzen, da die Schalen selbst in spröden, körnigen Kalkspath verwandelt sind, und da oft Bruchstücke oder ganze Schalen in grösserer Menge dicht neben einander liegen und dann auch wohl fest an einander haften. Am leichtesten sind sie aus den grauen bis bräunlichen fein-sandigen Lagen zu gewinnen, welche den grössten Theil ihres Kalkgehaltes noch besitzen, doch so, dass die Fossilien noch nicht blos als Steinkerne erhalten sind; freilich haftet dann fast immer eine mehr oder minder dicke Schicht des Gesteins auf den Schalen und lässt sich nicht immer ohne Beschädigung oder Abnutzung derselben entfernen.

Am schwierigsten sind die Gastropoden in genügender Erhaltung frei zu legen, zumal da sie meistens nur in Durchschnitten oder als Steinkerne sichtbar werden. Mit aus diesem Grunde ist auch die Zahl der weiterhin beschriebenen Gastropoden so gering. Die Bivalven sind freilich an und für sich um vieles zahlreicher an Individuen und an Arten, und die von mir aufgeführten Arten bilden sicher nur einen Bruchtheil der in jenen Schichten enthaltenen Bivalvenfauna; habe ich doch eine ganze Reihe von Arten unberücksichtigt lassen müssen, weil sie in gar zu schlechter Erhaltung vorliegen oder nur in Bruchstücken sich fanden, so dass nicht einmal die Gattung sich mit einiger Wahrscheinlichkeit feststellen liess. Namentlich gilt dies für fast alle mittelgrossen und grossen Formen. Es ist hiernach mit Sicherheit zu erwarten, dass durch ferneres Sammeln an Ort und Stelle und durch Auswahl von Gesteinsstücken, welche sich zum Präpariren der Fossilien eignen, die Zahl der Arten noch um ein Erhebliches vergrössert werden wird.

Da sich aber nicht übersehen lässt, ob in nicht zu ferner Zeit neues Material von demselben oder einem ähnlichen Fundorte nach Europa gebracht werden wird, so scheint es mir doch wünschenswerth zu sein, die jetzt vorliegenden Formen möglichst genau zu beschreiben und abzubilden, zumal da sich nur sehr wenige derselben auf bereits bekannte Arten zurückführen lassen.

In dem Paläontologischen Theile habe ich nun folgende Arten aufgeführt:

Pulchellia gibbosula v. K.
P. perovalis v. K.
Neoptychites? lentiformis v. K.
N.? ingens v. K.
N.? Wohltmanni v. K.
Acanthoceras n. sp.?
Natica cf. cretacea Goldf.
N. sp. ind.
Turritella gemmulifera v. K.
T. Kamerunensis v. K.
Nerita multigranosa v. K.
Xenophora sp. ind.
Ostrea sp. ind.
Gryphaea sp. juv.
Exogyra sp.
E. auriformis v. K.
Anomia laevigata Sow?
Pecten Kamerunensis v. K.
P. productus v. K.
Plicatula rugulosa v. K.
P. cf. placunea Lam.
P. multiplicata v. K.
Lima Mungoensis v. K.
L. reniformis v. K.
L. dilatata v. K.
L. perplana v. K.
Inoceramus? sp. ind.
Modiola plicifera v. K.
Lithodomus inflexus v. K.
Septifer? convolutus v. K.
Pinna latissima v. K.
Arca semiglabra v. K.
A. cardiformis v. K.
Leda cultellus v. K.
L. sp. ind.
Lucina sp. ind.
Cardium perobliquum v. K.
Astarte? trigonella v. K.
A. tecticosta v. K.
Cardita sphaericula v. K.
Cytherea Wohltmanni v. K.
C. corbuloides v. K.
C. sp. ind.
C. cf. plana Sow.
C. tenuidentata v. K.
C.? sp. ind.
C. sp. ind.
Liopistha ventricosa v. K.
Corbula incurvata v. K.
Tellina phylloides v. K.
Psammobia? auriformis v. K.
Pholadomya cf. elongata v. Münster.
Lingula cf. truncata Sow.
Discina sp. ind.
Serpula octangula v. K.

Wir haben hier also zunächst eine Pelecypoden-Fauna vor uns, welche jedenfalls darauf schliessen lässt, dass die Schichten in geringer Meerestiefe abgelagert worden sind, worauf ja auch das Vorkommen der Gerölle hindentet. Die in dieser Fauna vertretenen Gattungen, ihre ganze Facies, haben sehr grosse Analogie mit den Faunen, welche aus Kreidebildungen ganz verschiedenen Alters aus recht verschiedenen Ländern bekannt sind, so in Norddeutschland mit den Unter-Senon-Faunen von Kieslingswalde und von Aachen-Vaels, welche zuletzt von Holzapfel monographisch bearbeitet worden ist, den Gosaubildungen, welche Zittel beschrieb, ferner mit den Cenoman-Faunen von Blackdown und von Bracquignies bei Mons, welche durch Cornet und Briart bekannt gemacht worden ist, mit den verschiedenen Faunen der oberen Kreide Ostindiens, welche Stoliczka beschrieb, mit der Fauna der Chotts von Tunis, welche Munier-Chalmas untersuchte, mit den Faunen von Venezuela und Peru sowie Columbien, welche K. Gerhardt kürzlich bearbeitete, aber auch mit Faunen der unteren Kreide, des

Neocom, Aptien und Gault, wie sie besonders aus Frankreich und dem Schweizerischen Iura schon durch d'Orbigny's und Pictet's Arbeiten bekannt sind, wenn auch zum Theil recht ungenügend in Folge der oft unbefriedigenden Erhaltung des benutzten Materials und auch wohl wegen zu grosser Kürze der Beschreibung.

Obgleich nun die Kalke und Sandsteine Kameruns ohne Zweifel unter ganz ähnlichen klimatischen und physikalischen Verhältnissen abgelagert worden sind, wie so viele andere Kreide-Bildungen Europa's, Asien's, Amerika's etc., so zeigen doch die einzelnen Arten mit den sonst bekannten nur mehr oder minder grosse Aehnlichkeit, aber keineswegs so grosse Uebereinstimmung, dass man sie den letzteren unbedenklich zurechnen könnte, und dies gilt namentlich auch von solchen Arten, welche besonders scharf ausgeprägte Merkmale darbieten. Wenn aber die Arten zweier Ablagerungen nicht übereinstimmen, obwohl ihre Faunen analoge sind, so würde hieraus zu folgern sein, dass sie nicht gleichaltrig sind. In dieser Beziehung ergeben also die Bivalven-Arten von Kamerun ein negatives Resultat. Leider sind aber auch die Gattungen derselben nicht wohl für eine nähere Altersbestimmung der Schichten zu brauchen, da sie eine grössere verticale Verbreitung besitzen. Dasselbe gilt von den wenigen Gastropoden, Brachiopoden und der Serpula.

Die Ammoniten endlich gehören wiederum nicht zu bekannten Arten und zeichnen sich, abgesehen von dem ungenügend erhaltenen Acanthoceras und der Pulchellia gibbosula, sämmtlich dadurch aus, dass sie einen ganz engen Nabel, linsenförmige Gestalt, kurz gerundete Externseite und keinerlei Skulptur besitzen, so dass der Lobenlinie noch grössere Wichtigkeit für die Bestimmung der Gattungen und Arten beigelegt werden muss, als dies auch sonst schon der Fall ist.

Die Gattung Acanthoceras ist nun durch die ganze Kreide verbreitet, die Gattung Pulchellia aber nur in der unteren Kreide, namentlich im oberen Neocom. Letztere soll nun eigentlich scharfe Kiele an der Externseite haben [1]), aber besonders bei den von R. Nicklès [2]) aus dem südöstlichen Spanien beschriebenen Formen sind diese Kiele zum Theil recht schwach oder fehlen ganz, und bei einzelnen fehlt auch die sonst bei den Pulchellia-Arten gewöhnliche Skulptur von dicken, nach aussen vorgebogenen Rippen, so dass auch ganz glatte Formen mit abgerundeter Externseite dort zu Pulchellia gestellt wurden.

Douvillé [3]), stellte zu seiner Familie der Pulchelliiden ausser Pulchellia, bei welcher an der Externseite 2 Knotenreihen oder auch 2 Kiele auftreten sollen, auch Tissotia mit einer oder auch 3 Kanten, zuweilen mit Knoten, und Stoliczkaia mit rundem Rücken, indem er diese letztere Gattung jedenfalls ganz anders be-

1) Zittel, Handbuch der Paläontolologie II S. 477.

2) Contribution à la Paléontologie du Sud-Est d'Espagne. I Néocomien. Mémoires de la Société Géologique de France. Tome I. No. 4, Tome IV. No. 3.

3) Bull. Soc. Géol. de France 1890. 3. série tome 18. p. 287.

grenzte, als Zittel und ursprünglich Neumayr[1]). Dieser hatte namentlich diejenigen Formen (Amm. Xetra und A. Telinga) mit dazugezogen, für welche in neuester Zeit Kossmat[2]) die Gattung Neoptychites aufstellte, und hatte sie in nächste Verbindung mit Amm. dispar, A. Dutempleanus und A. Deshayesi gebracht. Die Gattung Stoliczkaia ist daher weniger sicher abgegrenzt, als die später aufgestellte Gattung Pulchellia, und wurde von Zittel l. c. auch nur als „Gruppe" der Hopliten angeführt, unmittelbar vor der Gattung Pulchellia.

Mit solchen Formen von Pulchellia ohne Skulptur und mit abgerundeter Externseite, wie Nicklès sie beschrieb und abbildete, stimmt nun die unten (S. 10) beschriebene P. perovalis leidlich in der Gestalt überein, während sie in der Lobenlinie, namentlich in den plumpen Laterallobon, auch einzelnen Pulchellia-Arten mit den typischen starken Skulpturen, wie P. pulchellus, recht nahe steht. Unsere Pulchellia gibbosula gleicht den letzteren in Gestalt und Skulptur, während die Lobenlinie mit ihren auffallend seichten Loben und breiten Lateralsätteln sich wohl der von ganz jungen P. compressissima d'Orb. nähert, wie sie Nicklès l. c. Taf. III fig. 1a abbildete, aber auch derjenigen von Arten des Neocom, wie Oxynoticeras Marcousanum d'Orb. bis auf den breiteren ersten Laterallobus sehr nahe steht. Diese Art, sowie O. Gevrilianum Orb. und O. heteropleurum Neum. et Uhlig weichen aber durch ihre Loben von den ächten, älteren Oxynoticeras-Arten nicht unerheblich ab. Jedenfalls sind es zunächst Formen des Neocom (einschliesslich des Barrêmien), mit welchen die von mir zu Pulchellia gezogenen beiden Arten zunächst verwandt sind.

Erhebliche Bedenken erregte die Stellung der Arten, welche ich als Neoptychites? Wohltmanni, N.? lentiformis und N.? ingens aufgeführt habe; ich schickte die Tafeln an Herrn Waagen in Wien, den besten Kenner solcher Formen, in der Hoffnung, dass ihm Aehnliches bekannt wäre oder in den reichen Sammlungen des Wiener Museum's vorläge, erhielt aber von Herrn Dr. Kossmat die Antwort, dass die Gestalt der von Neoptychites gliche, dass er jedoch über die Loben eine Ansicht sich nach den Abbildungen nicht gestatten könne. Gerade durch die Loben weichen diese Arten aber so erheblich von der Gattung Neoptychites Kossmat des Cenoman-Turon ab, dass ich glaube, dass sie nicht dazu gehören und sie dazu nur mit allem Vorbehalt stelle, weil sie zu einer anderen Gattung ebenso wenig passen, in den Lobenlinien selbst von einander nicht unerheblich abweichen, und weil ich nicht ohne grösseres Material neue Gattungen oder Untergattungen aufstellen mag. N.? ingens ist in Rücksicht auf die Lobenlinie, besonders durch den kurzen, breiten ersten Laterallobus, vergleichbar der Pulchellia? gibbosula v. Koenen, deren Beziehungen oben erörtert wurden, während N.? Wohltmanni und N.? lentiformis sich durch den unsymmetrisch-zweitheiligen ersten Laterallobus an den bisher zu Hoplites gerechneten Ammo-

1) Zeitschr. d. deutsch. geol. Ges. 1874. XXVII S. 931.

2) Untersuchungen über die südindische Kreideformation in Beitr. zur Paläontologie und Geologie Oestreich-Ungarn's und des Orients IX S. 165.

nites Leopoldi d'Orb.[1]) aus dem Hauterivien anschliessen, N. Wohltmanni durch die zahlreicheren Auxiliarloben aber auch an die Sonneratia bicurvata Mich. des Aptien und S. Dutemplei des Gault, welche Sarasin[2]) kürzlich näher untersuchte, so dass unsere beiden Arten nach ihren Lobenlinien wohl zu diesen Gattungen gestellt werden könnten.

Da nun von Cossmat die Gattung Neoptychites der mitteren Kreide in Beziehung zu der Gattung Ptychites der Trias gebracht wurde, so kann eine Aehnlichkeit derselben in der Gestalt mit unseren Arten nicht wohl als Grund gelten, diese letzteren, und somit die Kalke von Kamerun demselben Horizont, der mittleren Kreide zuzurechnen, zumal in den Loben unsere Arten zunächst sich an solche von Arten der unteren Kreide anschliessen.

Ich möchte nach allem diesem annehmen, dass die unten beschriebene Fauna der Kalke von Kamerun nicht jünger, sondern eher älter ist, als das Aptien, und will noch besonders darauf hinweisen, dass die Ammoniten-Fauna der Insel Elobi[3]) mit der des europäischen Gault theils übereinstimmt, theils doch verwandt ist, dass die Ammoneen des indischen und japanischen Cenoman's mit solchen des europäischen zum Theil identisch sind, dass auch die von Gerhardt[4]) beschriebenen Ammoneen aus dem Aptien und Barrêmien Columbien's besonders den südeuropäischen recht nahe stehen, dass aber alle diese Faunen keine einzige unserer Arten von Kamerun enthalten.

1) Terr. crétacés, Cephalopodes pl. 22, (non 23).

2) Bull. Soc. géol. de France. 3. série t. XXI. 1893. p. 156.

3) L. Szajnocha, zur Kenntniss der mittelkretacischen Cephalopodenfauna der Insel Elobi an der Westküste Afrika's; Denkschr. Akad. d. Wissensch. Wien 1885 Bd. 49. S. 231 Taf. I—IV.

4) Beitr. z. Kenntniss der Kreideformation in Columbien; Neues Jahrbuch f. Mineralogie. Beilageband XI. 1897. S. 118 ff. Taf. III—V.

Beschreibung der Arten.

Pulchellia gibbosula v. Koenen.

Tafel I, Figur 5 a, b, c.

Es liegen zwei gleich grosse Exemplare vor, von welchen das eine wesentlich geringere Dicke besitzt, als das andere, augenscheinlich in Folge von Anwitterung. Das letztere fand sich in einem grösseren Kalkblock und besitzt an einer kleinen Stelle noch die Schale.

Die letzte halbe Windung hat 55 mm Durchmesser und zuerst 21 mm Höhe bei 12 mm Dicke, zuletzt 28 mm Höhe bei 17 mm Dicke. Die vorhergehende Windung ist nur etwa halb so hoch; der Nabel des Steinkerns ist zuletzt etwa 6 mm weit, eine halbe Windung vorher nur 3 mm, und ist hier wohl ganz von Schalmasse erfüllt gewesen, so dass die Röhre ganz oder fast ganz involut war.

Die letzte halbe Windung gehört der Wohnkammer an, an deren Anfang die grösste Dicke der Röhre etwa noch einmal so weit von der Externseite entfernt ist, wie vom Nabel; auf der Wohnkammer nähert sich die grösste Dicke allmählich der Mitte der Seitenflächen, während sie eine halbe Windung vorher noch etwas näher dem Nabel liegt. Die Externseite zeigt eine deutliche Abplattung, besonders in Folge der Verflachung der Rippen; die Seitenflächen sind auf der letzten Viertelwindung auf ihrer äusseren Hälfte wesentlich deutlicher gewölbt, als auf der inneren, während eine halbe Windung vorher dieses sich umgekehrt verhält.

Die letzte Windung lässt über der kurz gerundeten Nabelkante etwa 9 flache, breite Anschwellungen erkennen, welche gerade nach aussen verlaufen und, zumal auf der Wohnkammer, sich auf dem inneren Drittel der Röhre zu deutlichen, dicken, rundlichen Rippen ausbilden und ungefähr auf der Mitte spalten oder durch Einschiebung vermehren, indem sie sich zugleich nicht unbedeutend rückwärts biegen. Alle diese Rippen werden nach der Externseite zu etwas höher und annähernd gleich stark, erhalten ziemlich gleiche Abstände, biegen sich wieder vor und bilden an der Externseite stumpfe Knoten, da sie auf dieser, wie erwähnt, stark verflacht sind.

Die Kammerwände steigen bis zum ersten Lateralsattel etwas an und biegen sich dann gerade auf den Nabel hin. Der erste Lateralsattel ist von der Externseite etwa 1 mm weiter entfernt, als vom Nabel; alle Sättel sind nur wenig abgerundet und haben nur wenige stärkere und eine Anzahl ganz kurze Kerben. Der kurze erste Laterallobus ist nur wenig tiefer, als der Externlobus, aber um die Hälfte tiefer, als der zweite Laterallobus, und doppelt so tief, wie der erste Auxiliarlobus, auf welchen bis zur Nabelkante noch 3 andere

folgen, immer kürzer werdend und in immer kürzeren Abständen. Der erste Laterallobus endigt unten in 3 dicken Zacken, von welchen der innere am tiefsten ist, der äussere am höchsten liegt und sich auf der linken Seite nochmals spaltet; weniger deutlich ist dies auf der rechten Seite bei allen Zacken der Fall. Die übrigen Loben haben eigentlich nur Ecken. Der erste Laterallobus ist fast eben so breit, wie der erste Lateralsattel, aber etwa drei Viertel so breit, wie der Externsattel, und mehr als drei mal so breit, wie der zweite Laterallobus.

Die generische Stellung ist oben, S. 7 besprochen.

Pulchellia perovalis v. Koenen.

Tafel I, Figur 3, Tafel II, Figur 6.

Es liegt nur das abgebildete Stück vor, das von einer Seite nur den Durchschnitt zeigt, und von dessen Wohnkammer eine halbe Windung erhalten ist, wenn auch etwas verdrückt und stark beschädigt, so dass nur etwa eine drittel Windung ausser dem Nabel von einer Seite gut erhalten ist. Die Seitenflächen sind flach gewölbt, auf der inneren Hälfte etwas mehr, als auf der äusseren, und nehmen erst in der Nähe der ziemlich breit gerundeten Externseite und besonders der kurz abgerundeten Nabelkante eine stärkere Wölbung an. Der Nabel ist zuletzt 7 mm weit und durch eine senkrecht stehende Nabelwand begrenzt. Die Schale ist fast involut und jede Windung anscheinend mindestens noch einmal so hoch, wie die vorhergehende. Die Kammerwände steigen vom Externsattel zum ersten Lateralsattel ziemlich stark an, bis zum zweiten etwas weniger, und senken sich dann etwas zum Nabel.

Der äussere Rand des Hauptstammes des zweiten Laterallobus liegt gerade auf der Mitte der Seitenflächen; der erste Laterallobus ist nur um etwa ein Fünftel tiefer, als der Externlobus, aber um die Hälfte tiefer, als der zweite Laterallobus, und mehr als doppelt so tief, wie der Auxiliarlobus. Der zweite Laterallobus ist etwas schmaler, als alle übrigen, und endigt unten in 5 stark divergirende, ziemlich symmetrische Zacken, von welchen der mittelste der tiefste, der äusserste und innerste die höchsten sind. Der erste Laterallobus ist etwas unsymmetrisch in zwei Aeste getheilt, welche je zwei Seitenäste tragen; der Externlobus hat 3 Seitenäste, von welchem der unterste der kürzeste ist. Der Auxiliarlobus endigt in 4 kurzen, etwas divergirenden Zacken, von welchen die beiden mittelsten die tiefsten sind. Die Sättel sind oben abgerundet und durch je 2 oder 3 grössere und einige kleinere Einschnitte wenig tief gekerbt; der erste Lateralsattel ist etwas schmaler, als der zweite und als der Externsattel. Die Sättel sind alle etwa eben so breit, wie der nach innen folgende Lobus mit seinen Zacken.

Unsere Art stelle ich nur mit Vorbehalt zu der Gattung der Pulchellia, wie schon oben (S. 7) ausgeführt wurde.

Neoptychites? (Hoplites) lentiformis v. Koenen.

Tafel II, Figur 1, 4 und 7.

Das einzige vorliegende, abgebildete Exemplar ist bis 3 cm vor dem Ende gekammert, und die letzte Kammer ist ein wenig kürzer, als die vorhergehenden, so dass fast die ganze, übrigens verdrückte Wohnkammer fehlt. Die Schale ist linsenförmig, fast ganz involnt; der Nabel ist etwa 2 mm weit nnd recht tief. Am Ende ist die Röhre reichlich noch einmal so hoch, wie eine Windung vorher.

Ein wenig vor dem Ende ist die Röhre gegen 180 mm hoch und 90 mm dick gewesen, und eine halbe Windnng früher 120 mm hoch und 60 mm dick. Die grösste Dicke ist etwa 3 mal so weit von der Externseite entfernt, wie von dem Nabel. Auf ihren äusseren zwei Dritteln sind die Seitenflächen ganz flach gewölbt, auf dem inneren etwas stärker, besonders in der Nähe der wohl abgerundeten Nabelkante. Die Externseite ist kurz gernndet, und die Seitenflächen konvergiren hier etwas schwächer, als bei N. Wohltmanni.

Die Kammerwände steigen vom Externsattel bis zum zweiten Lateralsattel nur sehr wenig an und dann anscheinend etwas deutlicher. Der erste Laterallobus liegt mit dem Innenrande seines Hauptstammes in der Mitte zwischen der Externseite und der Mitte des Nabels, also grösstentheils noch auf der äusseren Hälfte der Seitenflächen, und ist um etwa zwei Drittel tiefer, als der Externlobns, und reichlich drei mal so tief, wie der zweite Laterallobus, welcher in der Mitte zwischen dem Externlobus und dem Nabel liegt nnd unten in zwei dickeren Zacken endigt, von welchen nur der innere gerade nach unten, der äussere etwas nach aussen gerichtet ist. Der erste Laterallobns ist wesentlich breiter, als sein Abstand von der Externseite, und wird durch einen Seknndärsattel fast bis zur Mitte seiner Höhe in zwei Hälften getheilt, von welchen die innere die tiefste ist und in 3 Zacken endigt; von diesen ist der mittlere der tiefste, und die beiden seitlichen sind nicht ganz symmetrisch. Die änssere Hälfte endigt ebenfalls in drei Zacken, von welchen der innerste der stärkste und tiefste nnd weit mehr nach unten als nach aussen gerichtet ist, während die beiden äusseren schon zum Externsattel ansteigen und mehr nach aussen gerichtet sind.

Die Sättel sind ganz abgerundet; der erste Lateralsattel ist etwas schmaler, als der Externsattel, und noch etwas weniger symmetrisch als dieser durch einen Sekundärlobus fast znr Hälfte gespalten. Der zweite Laterallobus endigt mit zwei knrzen Zacken, nnd dicht über der Nabelkante liegt noch ein ganz kurzer Anxiliarlobns.

Bezüglich der generischen Stellnng ist das auf S. 7 Gesagte zu vergleichen.

Neoptychites? (Hoplites) Wohltmanni v. Koenen.

Tafel I, Figur 2, Tafel II, Figur 3 und 9.

Es liegen zwei Exemplare vor, von welchen das grössere, abgebildete, fast 40 cm Durchmesser hat, obwohl nur die etwas verdrückte letzte Viertel-Windung der Wohnkammer angehören könnte. Die Schale ist ganz involut, hat einen kaum 1 cm weiten Nabel, und die Röhre ist eine Windung zurück fast 11 cm hoch, reichlich doppelt so hoch wie dick, etwa im Verhältniss von 24 zu 11. Die Seitenflächen sind auf ihrer äusseren Hälfte ganz flach gewölbt, auf ihrer inneren etwas deutlicher, und durch eine ziemlich kurz abgerundete Nabelkante vom Nabel getrennt, während die Externseite ebenfalls kurz abgerundet ist. Die grösste Dicke der Röhre ist von der Externseite nicht ganz doppelt so weit entfernt, wie vom Nabel. Der Steinkern sowohl, als auch die Reste der Schale lassen keinerlei Skulptur erkennen.

Die Kammerwände steigen vom Externsattel bis zum ersten Lateralsattel ein wenig an und senken sich dann etwas bis zum Nabel. Der breite erste Laterallobus liegt fast ganz auf der äusseren Hälfte der Seitenflächen und nimmt von dieser mit seinem Hauptstamm mehr als die Hälfte ein; er ist fast noch einmal so tief, wie der Externlobus und wie der zweite Laterallobus, welcher vom ersten etwa zwei Drittel so weit entfernt ist, wie vom Nabel. Ein etwas kürzerer erster und ein schmaler zweiter Auxiliarlobus folgen dann noch zwischen dem zweiten Laterallobus und dem Nabel; der erste Laterallobus endigt unten in vier Aesten, von welchen die beiden inneren um ein Drittel tiefer hinabreichen und stärker gezackt sind, als die beiden äusseren, welche von jenen durch eine breitere Aufbuchtung getrennt und etwas nach aussen gerichtet sind. Die beiden stark nach innen gerichteten Aeste des Externlobus und der zweite Laterallobus tragen nur je einige Zacken, und noch schwächer ist dies der Fall bei dem ersten Auxiliarlobus.

Die Sättel sind verhältnissmässig schmal und oben abgerundet; der Externsattel und der erste Lateralsattel sind durch je 3 tiefere Einschnitte gekerbt, die übrigen durch je einen oder 2 weniger tiefe.

Die recht zweifelhafte Zugehörigkeit unserer Art zu der Gattung Neoptychites ist auf S. 7 erörtert.

Neoptychites? ingens v. Koenen.

Tafel I, Figur 4, Tafel II, Figur 5 und 8.

Es liegen mir 3 Exemplare vor, von welchen das grösste, aber am schlechtesten erhaltene aus reichlich einer Viertel-Windung besteht; dieselbe hat zuletzt 22 cm Höhe und gegen 11 cm Dicke, so dass das Exemplar, falls nur

die Wohnkammer fehlt, einen Durchmesser von mindestens 60 cm gehabt haben muss. Das kleinste, abgebildete Stück hat 25 cm Durchmesser und gegen 8 cm Dicke gehabt. Die letzte halbe Windung ist zuerst 100 mm hoch und 50 mm dick und zuletzt 137 mm hoch; der tiefe Nabel hat reichlich 10 mm Durchmesser und ist auch bei dem grössten Stück nur etwa 15 mm weit. Die Röhre ist also an ihrem Ende fast doppelt so hoch, als eine Windung vorher.

Die Seitenflächen sind an dem kleinsten und dem grössten Stück in der Mitte noch am deutlichsten gewölbt, deutlicher als an dem dritten Exemplar, und nehmen erst dicht an der kurz abgerundeten Nabelkante eine stärkere Wölbung an. Die Nabelwand steht fast senkrecht zur Schalen-Ebene. Das abgebildete Stück hat bis zu seiner letzten Drittel-Windung einen rundlichen Kiel, doch ist dies theils durch Verdrückung, theils durch Abnutzung der einen Seite bedingt.

Die Kammerwände steigen vom Externsattel zum ersten Lateralsattel etwas an, von hier bis zum ersten Auxiliarsattel nur ganz wenig, und senken sich dann ein wenig bis zum Nabel. Der erste Lateralsattel liegt ziemlich genau auf der Mitte der Seitenflächen und ist ein wenig breiter, als der Externsattel, aber noch nicht zwei Drittel so breit, wie der Hauptstamm des ersten Laterallobus. Der erste Laterallobus ist knapp um ein Drittel tiefer, als der Externlobus, aber fast noch einmal so tief, wie der schmale zweite Laterallobus. Auf diesen folgen bis zur Nabelkante, noch an Tiefe abnehmend, 3 Auxiliarloben; der zweite Lateralsattel ist reichlich halb so breit, wie der erste, und die Auxiliarsättel nehmen gegen ihn nach dem Nabel noch allmählich an Breite ab.

Der erste Laterallobus endigt in 3 Zacken, von welchen der innerste der stärkste ist und am tiefsten hinabreicht; er sendet nahe seinem oberen Ende einen Nebenzacken in der Richtung nach innen ab, der äussere dagegen einen solchen nach aussen. Der zweite Laterallobus endigt in 5 ganz kurzen Spitzen, indem er sich unten etwas verbreitert; die Auxiliarloben endigen mit einer geringeren Zahl von Spitzen, doch ist der zweite tiefer gespalten. Die Sättel sind ganz abgerundet, und der Externsattel sowie der erste Lateralsattel sind etwas unsymmetrisch, schräg von aussen, mässig tief gespalten, zeigen aber ausserdem noch einige flache Kerben.

Das oben erwähnte, mittelgrosse Exemplar zeichnet sich dadurch aus, dass der erste Laterallobus tiefer ist, fast drei mal so tief, wie der zweite und wie der Externlobus, und dass sein Nebenzacken fast eben so stark ist und fast eben so tief hinabreicht, wie der Hauptzacken; ausserdem sind die Aeste des Externlobus wesentlich dicker. Diese Merkmale könnten aber wohl zum Theil durch das spätere Alter bedingt sein, und auch die geringere Wölbung der Seitenflächen scheint mir kein genügender Grund, das Stück etwa als besondere Art zu unterscheiden.

Ueber die Bestimmung der Gattung habe ich mich schon S. 7 ausgesprochen.

Acanthoceras n. sp.

Ein stark angewitterter, bis an das Ende gekammerter Steinkern von 95 mm Durchmesser lässt erkennen, dass über die Externseite dicke Rippen hinweglaufen, welche auf beiden Seiten und in der Mitte derselben Kanten oder Kiele kreuzten, indem sie sich auf diesen zu Knoten oder Spitzen erhoben. Die Röhre ist zuletzt wohl 45 mm dick und gegen 40 mm hoch gewesen; sie ist sehr wenig involut und nimmt noch schneller an Höhe zu, als das von Pictet (Paléontologie Suisse, II série, Taf. XXV f. 4) abgebildete Exemplar von A. rhotomagensis Brong., welches sonst einige Aehnlichkeit mit unserem Stücke zeigt. Der erste Laterallobus liegt auf der äusseren Hälfte der Röhre und der viel kleinere zweite ziemlich nahe der Nabelkante. Die Sättel scheinen wesentlich breiter als die neben ihnen liegenden Loben gewesen zu sein.

Natica cf. cretacea Goldf.

Der Steinkern eines etwas verdrückten Exemplares hat gegen 15 mm Durchmesser und mindestens 17 mm Höhe gehabt, wovon etwa 13 mm auf die Mündung kommen. Der Nabel war sehr eng oder ganz geschlossen und die Schlusswindung ist ziemlich gleichmässig gerundet, abgesehen von ihrem obersten Theile, nahe der Naht, wo sie augenscheinlich kurz gewölbt war.

Wenn das Stück auch einige Aehnlichkeit mit solchen Arten wie N. cretacea Goldf. (Petref. Germaniae III, S. 119. Taf. 199 f. 12; Holzapfel in Palaeontographica XXXIV, S. 143. Taf. XIV f. 19—21) besitzt, so ist doch eine genaue Bestimmung unmöglich.

Natica sp. ind.

Ein mit der Schale erhaltenes, aber grossentheils mit Gestein bedecktes und beschädigtes Exemplar von 6 mm Durchmesser ist wohl etwas höher gewesen; das Gewinde ist etwa 1 mm hoch und besteht kaum aus mehr als 3 mässig gewölbten Windungen, welche durch deutlich vertiefte Nähte von einander getrennt werden. Die Schlusswindung erhält zunächst unter der Naht eine ganz flache Wölbung und unter dieser eine wesentlich stärkere etwa bis zur Nahtlinie, ist aber von hier an ziemlich gleichmässig gewölbt bis zu einer kurzen Umbiegung zum Nabel, beziehungsweise zur Innenlippe. Der Nabel dürfte gegen 2 mm weit gewesen sein, falls er nicht von einer Nabelschwiele ganz oder theilweise verdeckt war. Jedenfalls ist die Mündung ziemlich gross gewesen, wenn auch vielleicht nicht so gross, wie bei der sonst allenfalls vergleichbaren N. cymba d'Orb. des Corallien.

Turritella gemmulifera v. Koenen.

Tafel III, Figur 1 a, b.

Ein 20 mm langes Bruchstück von 7 Windungen mit einem Gehäuse-Winkel von kaum 15 Grad lässt grossentheils die Gestalt und Skulptur der Windungen gut erkennen; die letzte derselben hat 6 mm Durchmesser und 3,5 mm Höhe. Die Windungen haben eine etwas umgekehrt-treppenförmige Gestalt, indem sie nach unten an Durchmesser zunehmen bis zu einer fast Kiel-artigen Spirale, welche durch die unter und über ihr befindlichen Einsenkungen stärker hervortritt und doppelt so weit von der oberen Naht entfernt ist, wie von der unteren; dicht über der Naht liegt eine wesentlich schwächere und niedrigere Spirale und zwischen dieser und ersterer auf den letzten Windungen ein schwacher Streifen. Die obere Hälfte der Windungen trägt 3 ziemlich starke und hohe Spiralen, welche etwa eben so breit, wie ihre Abstände von einander, beziehentlich von der oberen Naht sind. Je ein feiner Streifen erscheint auf den letzten Windungen in diesen Zwischenräumen und, etwas früher, zwischen der untersten dieser Spiralen und der Kiel-Spirale.

Auf der ersten vorhandenen Windung, welche etwa 2,5 mm dick und 1,4 mm hoch ist, sind alle Spiralen glatt, schon auf der folgenden bekommen sie aber Knötchen, welche später ziemlich hoch und etwas breiter als ihre Zwischenräume werden. Auf den letzten Windungen sind die auf den oberen Spiralen gegen 0,5 mm, die auf der Kiel-Spirale gegen 0,7 mm von Mitte zu Mitte von einander entfernt.

Einer anderen Art dürfte ein Bruchstück von etwa einer Windung von 5 mm Dicke angehören, welche auch 4 stärkere, Höcker-tragende Spiralen führt, aber ziemlich eben ist; zudem sind die Spiralen niedriger, und auch die unterste tritt nicht Kiel-artig hervor, obschon sie durch einen grösseren Zwischenraum von der nächsten getrennt ist.

Turritella Kamerunensis v. Koenen.

Tafel III, Figur 2 a, b.

Ein Bruchstück von 6 Windungen, 20 mm lang und zuerst 2,5 mm, zuletzt 6,5 mm dick, hat einen Gehäusewinkel von 15 Grad. Die Windungen sind nur auf ihrer unteren Hälfte ein klein wenig gewölbt, werden aber durch die in einer Rinne liegende Naht von einander getrennt, zu welcher die Windungen an ihrem unteren Rande ziemlich steil, an ihrem oberen erheblich flacher geneigt sind, so dass das Gewinde eine umgekehrt treppenförmige Gestalt hat, wenn auch nur in geringem Grade.

Die Windungen tragen auf ihrer ebenen Fläche 5 Spiralstreifen, von welchen der dickste am unteren Rande und der dünnste ziemlich genau in der Mitte liegt,

ein etwas stärkerer etwa doppelt so weit von jenem entfernt, wie von dieser, ein noch stärkerer am oberen Rande, und ein ebensolcher etwas weiter von diesem, als von der Mittelspirale entfernt, welche übrigens auf der ersten vorhandenen Windung zu fehlen scheint. Die stärkeren Spiralen sind nur etwa ein halb bis ein drittel so breit, wie die Zwischenräume, welche sie von den nächsten Spiralen trennen. Sie lassen auf den letzten Windungen Knoten-artige Anschwellungen erkennen, welche von Mitte zu Mitte nicht ganz 1 mm von einander entfernt sind.

Zu einer anderen Art dürfte ein etwas kleineres, grossentheils mit Gestein bedecktes Exemplar gehören, dessen Windungen in der Gestalt denen von T. Kamerunensis einigermassen gleichen, aber nur 3 ziemlich schwache Hauptspiralen tragen, je eine am oberen und unteren Rande der ebenen Fläche und, der letzteren ein wenig näher, in der Mitte. In dem breiten Zwischenraume schiebt sich dann ein sehr feiner Streifen ein, und das Gleiche geschieht anscheinend später auch in allen übrigen Zwischenräumen.

Nerita multigranosa v. Koenen.

Tafel III, Figur 3 a, b, c; 4 a, b.

Von 6 mehr oder minder gut erhaltenen Exemplaren ist das grösste 6,5 mm hoch und 7 mm breit bei 4,5 mm Dicke; das Fig. 3 abgebildete ist etwa eben so hoch und dick, aber nur 6,8 mm breit. Das Gewinde ragt zuweilen fast gar nicht hervor, bei einem Stück aber doch immerhin deutlich, indem die Schlusswindung sich zuletzt etwas stärker senkt; die Gewindespitze ist an keinem Exemplar gut erhalten, so dass die Zahl der Windungen nicht sicher zu erkennen ist, doch hat sie schwerlich mehr als $3^1/_2$ bis 4 betragen. Die Naht ist auf dem Gewinde nur wenig vertieft.

Die Schlusswindung oder mindestens ein grosser Theil derselben wird jedoch von der letzten Mittelwindung meistens durch eine förmliche Rinne getrennt, indem sich unter der Naht eine stärkere Anschwellung ausbildet, unter welcher die Schlusswindung dann ziemlich eben ist um dann allmählich eine stärkere Wölbung anzunehmen und sich in weitem Bogen zur Innenlippe herum zu ziehen. Diese ist schmelzartig und wird von der Aussenschale durch eine Kante getrennt, welche nicht weit über dem unteren Ende der Schale beginnt und zuerst ziemlich scharf ist, nach oben aber immer stumpfer und dann undeutlicher wird; die Innenlippe tritt nur etwa als der dritte Theil eines Kreises aus der Mündung heraus.

Die Aussenlippe ist mit über 20 Grad gegen die Schalenaxe geneigt und auf der obersten flachen Zone unter der Naht am stärksten rückwärts gerichtet, und eine Zurückbiegung, ein flacher „Ausguss", findet sich erst nahe über der Stelle, wo sie sich auf die vorhergehende Windung auflegt.

Auf den letzten Windungen finden sich recht hohe Längsrippen durch-

schnittlich wohl etwa 40 pro Windung, welche an der Naht recht hoch und gedrängt und scharf rückwärts gerichtet sind, bald darunter aber Zwischenräume bekommen, welche ihnen an Breite gleich sind.

Am unteren Rande der flachen Zone, nahe der Mündung also 2,5 bis 3 mm von der Naht, spalten sich die meisten Rippen oder vermehren sich durch Einschiebung, und dies wiederholt sich auf der eigentlichen Wölbung unregelmässig, indem die Rippen immer flacher werden, und die faltigen Anwachsstreifen auf ihnen immer mehr hervortreten, sodass an manchen Stücken die Rippen selbst hierdurch undeutlich werden. Auf dem untersten Theile der Schlusswindung vereinigen sich wiederholt je zwei Rippen wieder zu einer einzigen. Ausserdem trägt die Wölbung der Schlusswindung bis zu ihrem unteren Ende, welches frei davon ist, meist erst von der Nahtlinie an eine grössere Zahl von engen Spiralfurchen, mindestens 10, aber auch bis zu 17, welche oben am tiefsten und am weitesten von einander entfernt sind, bei verschiedenen Stücken verschieden weit, nach unten nur 0,15 bis 0,2 mm, und hier nur durch flache, rundliche Spiralstreifen von einander getrennt werden.

Die Rippen erscheinen hierdurch gekörnelt, zumal da gerade unter einer der obersten Furchen nicht selten die Rippen etwas verschoben sind, oder an Stelle einer Rippe deren zwei, beide verschoben, nach unten fortsetzen.

Die Innenlippe ist gezähnelt, doch sind nur einzelne Zähnchen sichtbar; dieselben vollständig frei zu legen ist nicht wohl ausführbar, da das Gestein dort eben so hart ist, wie die Schale, und fest an dieser haftet.

Xenophora sp. ind.

Tafel III, Figur 5 a, b.

Ein Steinkern von 6 mm Durchmesser und 4 mm Höhe besteht aus 3 Windungen, von welchen die erste, stärker gewölbte, noch dem Embryonalende angehört. Die folgenden Windungen sind anscheinend ziemlich eben gewesen und scheinen 6 resp. 7 grössere Fremdkörper angeheftet zu haben, welche über den unteren Rand der betreffenden Windung hinausragten und somit auch auf der folgenden Windung einen Eindruck hervorgebracht haben.

Von anderen Arten, wie der X. onusta Nils. aus der oberen Kreide (Holzapfel in Palaeontogr. XXXIV S. 152 taf. XIV f. 28) unterscheidet sich unser Steinkern dadurch, dass er so früh schon ebene Windungen erhält, ist aber natürlich nicht näher bestimmbar.

Ostrea sp. ind.

Tafel III, Figur 11.

Vierzehn Austernschalen sind wohl durchweg noch nicht ausgewachsen und besitzen nicht die äussere Schalenlage, so dass weder die feinere Skulptur noch

selbst die Gestalt genau zu erkennen ist. Die abgebildete und noch eine zweite untere Klappe zeichnen sich durch längliche Gestalt, stark gewölbten und stark hervorragenden Wirbel aus, sowie durch kleine Anheftungsstelle und grobe Runzeln der Schale. Die obere Klappe ist flach gewölbt, nahe dem Schalenrande aber etwas eingesenkt und hatte anscheinend nur wenige, flache Anschwellungen der Schale.

Vielleicht gehört zu einer zweiten Art eine Schale, welche fast mit der ganzen Unterseite aufgewachsen gewesen zu sein scheint.

Gryphaea sp.

Tafel III, Fig. 12 a, b, c.

Die allein vorliegende, abgebildete untere Schale ist jedenfalls noch nicht ausgewachsen, da sie nur 7,5 mm lang, 5 mm breit und ca. 3 mm hoch gewölbt ist. Die Anheftungsfläche ist sehr klein; die Wölbung ist auf der vorderen Hälfte der Schale etwas schwächer, als auf der hinteren und besonders als auf der Mitte, und in der Längsrichtung ist sie unterhalb der Mitte am stärksten. Die Schale ist von verhältnissmässig dicken Anwachsrunzeln bedeckt, welche auf der unteren Hälfte stärker hervortreten, durchschnittlich knapp 0,4 mm von einander entfernt und nicht ganz unregelmässig sind, aber öfters sich spalten, zumal nach der vorderen Seite hin.

Exogyra sp.

Einige mangelhaft erhaltene untere Schalen, welche bis zu 13 mm Länge und 10 mm Breite haben, aber zum Theil auch die Oberfläche der Schale besitzen, sind ganz an der vorderen Seite angeheftet gewesen und haben hinter dieser Fläche ein Paar dicke, unregelmässige Knoten oder Anschwellungen; weiterhin ist die Schale auf der oberen Seite weit stärker gewölbt, als auf der Mitte und unten. Der Schalrand ist unten oval, die Schale selbst trägt schwachblättrige Anwachsstreifen und erinnert allenfalls an den Jugendzustand von E. canaliculata d'Orb. aus dem französischen Gault.

Exogyra auriformis v. Koenen.

Tafel III, fig. 10 a, b.

Von zahlreichen im Gestein, besonders auf den Ammoniten sitzenden Schalen konnten nur wenige erhalten werden, und von diesen ist die abgebildete die weitaus beste und grösste mit 18 mm Länge, 12,5 mm Breite und 7 mm Höhe. Sie ist mit einer grossen Fläche aufgewachsen, und ihr Umriss ist im ersten Drittel annähernd halbkreisförmig, in dem Rest ebenfalls annähernd halbkreis-

förmig, doch mit viel weiterem Bogen. Der hintere Rand erhebt sich unterhalb der Mitte am höchsten und senkt sich von hier nach dem Wirbel zu ganz allmählich, nach dem unteren Ende aber recht schnell, und ist am Wirbel mit ca. 60 Grad gegen die Anheftungsfläche einwärts geneigt, nach hinten zu aber allmählich steiler und unter dem obersten Drittel der Schale mit ca. 90°, auf dem letzten Viertel sogar etwas nach aussen. Skulpturen sind auf der etwas blättrigen Schale nicht zu erkennen, welche übrigens von zahlreichen, gegen 0,5 mm weiten Löchern durchbohrt ist, die von einem Bohrschwamm herrühren dürften. Unsere Art hat in der Gestalt einige Aehnlichkeit mit der von Holzapfel (Palaeontogr. XXXV t. 29 f. 8) abgebildeten, aber nicht benannten Form aus dem Aachener Senon; diese ist aber mit einer sehr kleinen Fläche aufgewachsen gewesen und hat auf ihrer ersten Hälfte eine weit schwächere Krümmung des Schalenrandes.

Anomia laevigata Sow?

Tafel III, Figur 13.

Anomia laevigata Sow. Transact. Geol. Soc. IV. S. 127. Taf. 14 f. 6.
" " " d'Orbigny Terr. Crét. Lamellibr. S. 755 Taf. 489 f. 4—6.

Ziemlich häufig, aber sehr selten gut erhalten finden sich in den Kalken Schalen einer rundlich-ovalen bis fast kreisrunden Anomia, welche nur oben, in der Wirbelgegend, eine Abstutzung zeigt und in der Stärke der Wölbung bedeutend variirt, indem einzelne, besonders kleinere Schalen fast eben, andere dagegen deutlich gewölbt bis fast halbkugelig sind. Die grösste Schale hat 16,5 mm grössten und 14,5 mm kleinsten Durchmesser, die abgebildete hat 14 mm, beziehungsweise 13 mm Durchmesser; der Wirbel ist etwas über 1 mm vom Schalenrande entfernt.

Die Schalen sind aussen glatt, abgesehen von mehr oder minder zahlreichen, etwas blättrigen Anwachs-Streifen und -Falten; die meisten Exemplare zeigen jedoch nur abgeblätterte, etwas perlmutterartig glänzende Schalenreste. Nur eine Schale lässt zwischen den Anwachsfalten feine, durch grössere Abstände getrennte, radiale Streifen erkennen, aber nur an den Stellen, wo die Oberfläche der Schale abgeblättert sind. Ein Paar kleine Schalen zeigen an je einer Seite transversale, breite, rundliche Rippen, welche augenscheinlich von der Skulptur einer Muschel herrühren, auf welcher die Anomia sass.

Die Muskeleindrücke sind an keinem einzigen Exemplar deutlich sichtbar.

Mit der von d'Orbigny gegebenen Beschreibung und Abbildung stimmen die Stücke von Kamerun anscheinend leidlich gut überein, weit weniger mit der Sowerby's (in Fitton On the Strata below the Chalk). Englische oder Französische Exemplare kann ich leider nicht vergleichen.

Pecten Kamerunensis v. Koenen.

Tafel III, Figur 14 a, b; 15 a, b.

Es liegen nur die beiden abgebildeten, beschädigten Klappen vor, von welchen die linke den Umriss, auch des vorderen Ohres, vollständig zeigt, während das hintere Ohr auf beiden Klappen nur theilweise erhalten ist. Die rechte Schale ist jedenfalls ziemlich ebenso gross und ebenso gewölbt, wie die linke, welche 16 mm lang und breit ist. An den inneren Rändern der Ohren konvergiren die Seiten der eigentlichen Schale mit 100 Grad; die Schale ist annähernd gleichseitig. Das vordere Ohr ist fast 5 mm lang, das hintere anscheinend gegen 4 mm.

Zahlreiche schmale, gewissermassen eingeritzte Furchen theilen die Oberfläche der Schale in flache Rippen, welche nach den Seiten zu recht stark divergiren und nach aussen und oben eine immer deutlichere Wölbung erhalten, während sie auf der Mitte der Schale ganz eben sind. An einzelnen Stellen erscheinen die Furchen durch kleine Anschwellungen, welche den Anwachsstreifen entsprechen, in kleine Grübchen getheilt, noch am deutlichsten an den Seiten, wo sie ein wenig breiter sind. Die Rippen vermehren sich unregelmässig durch Spaltung beziehungsweise durch Einschiebung neuer Furchen und sind am Rande etwa 0,5 mm breit.

Das vordere Ohr der rechten Klappe hat einen tiefen Byssus-Ausschnitt und anscheinend gegen 8 gedrängte, rundliche Rippchen; die Skulptur der übrigen Ohren ist nicht zu erkennen.

Durch grössere Breite, verhältnissmässig breite Rippen, schmale Furchen, und wenig deutliche Punktirung derselben unterscheidet sich unsere Art von den Arten mit ähnlicher Skulptur, welche in der Kreide ja recht verbreitet sind.

Pecten productus v. Koenen.

Tafel III, Figur 17 a, b.

Von 3 mehr oder minder beschädigten Klappen hat die Fig. 17 a abgebildete den Umriss, die Fig. 17 b abgebildete dagegen die Ohren leidlich vollständig erhalten. Die Schale ist etwa eben so breit, wie hoch, flach gewölbt und glatt, lässt aber nahe dem unteren Rande sehr feine, erhabene Anwachsstreifen erkennen, wie solche wohl im Alter häufiger aufzutreten pflegen, so dass die Schalen wohl ziemlich ausgewachsen sind, obwohl sie noch nicht 10 mm Durchmesser erreichen. Der Winkel der inneren Ränder der Ohren beträgt gegen 100 Grad. Die Schale ist merklich ungleichseitig, nach vorn erweitert, so dass der Innenrand des vorderen Ohres einen Winkel von ca. 30 Grad mit dem Schlossrande bildet, der des hinteren einen solchen von ca. 50°. Das vordere Ohr der rechten Klappe hat einen tiefen Byssus-Ausschnitt und ist gegen 3 mm lang, das hin-

tere kaum halb so lang; dieses besitzt in der Mitte eine vom Wirbel auslaufende, flach-V-förmige Rinne, bis zu welcher die ziemlich gedrängten, hohen Anwachsstreifen des Ohres von unten her mit der Mittellinie der Schale deutlich konvergiren, während sie mit dieser über der Rinne eher ein wenig divergiren. Auf dem vorderen Ohr sind solche erhabene, gekrümmte Anwachsstreifen nur unmittelbar über dem Byssusausschnitt erhalten.

Plicatula rugulosa v. Koenen.

Tafel III, Figur 7; 8 a, b.

Zehn Exemplare, worunter zwei doppelklappige, liessen sich ziemlich gut aus dem Gestein lösen, und von einer Klappe ist der grösste Theil des inneren Abdruckes und des Schlosses sichtbar, so dass die Zugehörigkeit zu der Gattung Plicatula sicher festgestellt werden konnte. Ein kleines Stück ist 11 mm breit, 14 mm hoch und 4,5 mm dick, das grösste ist 22 mm breit und 26 mm hoch. Die kleine Anheftungsstelle der mässig gewölbten rechten Klappe ist an dem kleinen Stück frei von Gestein. Die Gestalt ist die bei Plicatula-Arten gewöhnliche, schief-eiförmig, nach hinten etwas verlängert, abgesehen von der hervorragenden, oben abgestutzten Wirbelgegend. In der Jugend trägt die Schale meistens 9 ziemlich dicke Rippen, welche auf beiden Seiten, besonders aber vorn, etwas schwächer sind, als auf der Mitte, und über welche wulstige Anwachsfalten von verschiedener Stärke und in verschiedenen Abständen hinweglaufen, indem sie sich zu schuppigen Knötchen erheben. Auf der linken, oberen Klappe scheinen diese Knötchen höher und spitzer zu werden, als auf der unteren. Zwei kleinere rechte Schalen besitzen nur je 6 Rippen.

Die vorliegenden Stücke gleichen den von Keeping (Fossils etc. of the Neocomian deposits of Upware and Brickhill, Cambridge 1883) S. 110 Taf. V f. 4 als P. Carteroni d'Orb. beschriebenen und abgebildeten Vorkommnissen aus dem englischen Neokom so sehr, dass ich sie derselben Art zurechnen möchte, obschon bei den englischen Stücken, der Abbildung nach zu urtheilen, die Rippen in der Nähe des unteren Randes verschwinden. Die Abbildungen der P. Carteroniana d'Orbigny's (Taf. 462 f. 5—7) und Pictet's (Paléont. Suisse V Taf. 183 f. 3, 4) weichen von unseren Stücken jedenfalls dadurch ab, dass die Rippen zwischen den schuppigen Spitzen unterbrochen zu sein scheinen und wesentlich schmaler sind, und dass die vordere Seite der Schalen zunächst dem Wirbel weit mehr abgerundet ist.

Plicatula cf. placunea Lam.

Tafel III, Figur 9.

Ein zweiklappiges Stück von 24 mm Breite und über 26 mm Höhe, welchem leider der Wirbel und die Oberfläche der Schale mit der feineren Skulptur

fehlen, gleicbt in der Gestalt und Grösse manchen französischen Exemplaren von P. placunea Lam., sowie d'Orbigny's Abbildung (Terr. crét. Lamellibr. Pl. 462 f. 11, 12), nur ist die Wölbnng der Wirbelgegend bei dieser letzteren wesentlich stärker. Auf dem Hanpttheil der rechten Schale sind mindestens 10 starke Rippen noch zu erkennen, während am vorderen nnd hinteren Rande keine Spur von Rippen erhalten ist.

Einige kleinere rechte Klappen könnten auch in die Verwandtschaft von P. placunea gehören, die sich von der vorigen Art dadurch unterscheiden, dass die Rippen schon in der Nähe des Wirbels höher und schmaler sind, und dass sich schon 8 bis 10 mm vom Wirbel zwischen den Rippen feine Radialstreifen einstellen, welche sich bald vermehren und kleine Knötchen tragen; zugleich wird die Wölbung der Schale wesentlich stärker, nnd sie beginnt sich mehr nach hinten auszudehnen.

Plicatula multiplicata v. Koenen.

Tafel III, Figur 6.

Die einzig vorliegende untere Klappe ist am Rande nnterhalb eines starken Schalen-Absatzes sehr beschädigt, doch lässt sich nach diesem der Umriss leicht ergänzen. Bis zn dem Absatz ist die Schale 14,5 mm lang und 11,5 mm breit; vollständig ist sie fast 18 mm lang und gegen 14 mm breit gewesen. Die Anheftungsstelle ist nur etwa 1,5 mm gross, die Wölbnng grossentheils recht flach nnd nnr auf den Seiten, zumal in der Wirbelgegend stärker. Zuerst trägt die Schale, welche hier etwas abgerieben ist, etwa 10 dicke Radialrippen, welche sich aber früher oder später durch Spaltung und später auch durch unregelmässige Einschiebung feiner Rippen vermehren, so dass an dem Absatz gegen 30 Rippen vorhanden sind, von welchen die primären die stärksten sind. Die Rippen tragen in Abständen von ca. 1 mm schuppige Spitzen, welche auf erhabenen Anwachsstreifen zu liegen scheinen.

Die Gestalt ist bis zu dem Absatz fast die eines wenig ungleichseitigen Pecten; unter dem Absatz biegen sich aber die hier überhaupt vorhandenen oder sichtbaren Rippen ziemlich stark nach hinten. Der Schlossrand ist noch nicht 3 mm lang; das Schloss habe ich wenigstens so weit frei legen können, dass die beiden Schlosszähne sichtbar sind.

Unsere Art schliesst sich durch ihre Sknlptur wohl zunächst an solche Varietäten von P. asperrima d'Orb. an, wie sie Pictet (Paléontologie Suisse V. Taf. 183 fig. 2 b) aus dem Neokom von St. Croix abbildete, doch ist bei diesen der Schlossrand viel breiter, die Anheftnngsstelle weit grösser, und die Zwischenräume der Rippen sind breiter.

Lima Mungoënsis v. Koenen.

Tafel III, Figur 16.

Die einzige, vorliegende rechte Schale ist etwas verdrückt, in der Gegend des Wirbels abgenutzt und vorn unten beschädigt. Bei 26 mm Länge ist sie gegen 17 mm breit gewesen und nur auf der vorderen Seite etwas stärker gewölbt. Der Schlossrand mag 5 mm lang gewesen sein. Die stärkste Krümmung des Schalenrandes findet sich ausser am unteren Theile oberhalb der Mitte der hinteren Seite. Die Schale trägt etwa 25 abgerundet-dachförmige Rippen, welche sich anscheinend nicht durch Spaltung oder Einschiebung vermehren und durch rundliche Einsenkungen von einander getrennt werden; stellenweise sind flache, wenig deutliche Anschwellungen auf ihnen zu erkennen, während Anwachs-Streifen oder Falten ganz fehlen oder doch nicht erhalten sind. Das lang herabgezogene hintere Ohr zeigt noch 6 ganz flache, gedrängte Radialrippen, welche von einigen ebenfalls ganz flachen, breiten Anwachsfalten sehr schräg gekreuzt werden.

In der Berippung nähert sich unser Exemplar der L. expansa Forbes (d'Orbigny, Terr. crét. Lamellibr. III. pl. 415 f. 9—12); ist aber weit flacher gewölbt und weniger ungleichseitig.

Lima reniformis v. Koenen.

Tafel III, Figur 20 a, b.

Die einzig vorliegende, abgebildete rechte Schale ist 14,5 mm lang und 11,5 mm breit und etwa 4,5 mm hoch gewölbt. Der Schlossrand ist knapp 5 mm lang und mit ca. 70 Grad gegen die Mittellinie der Schale geneigt. Der mittlere Theil der bauchigen Schale ist ziemlich gleichmässig gewölbt, nach hinten etwas stärker, und wesentlich stärker der vordere Theil, an welchem sie steil abfällt und etwas eingesenkt ist. Der hintere Schalrand steht nahezu senkrecht gegen den vordersten und geht in verhältnissmässig kurzem Bogen in den unteren Schalrand über, welcher in der Mitte am schwächsten gekrümmt ist. Die Schale trägt etwa 32 kantige Rippen, von welchen die acht schmalsten und schwächsten auf dem vorderen steilen Abfall liegen, die mittelsten die breitesten sind, die hintersten 4 oder 5 aber auch schnell ziemlich schmal werden. Alle Rippen sind bedeutend breiter, als ihre Zwischenräume, besonders vorn und hinten; nur 7 oder 8 Furchen vor der Mitte der Schale sind so breit, dass in ihnen noch je eine schwache Radialrippe Platz findet. Auf den Radialrippen bringen Anwachsstreifen niedrige Höcker oder Anschwellungen hervor, welche von Mitte zu Mitte 0,3 bis 0,4 mm von einander entfernt sind.

Durch ihre starke Wölbung und die zahlreichen, ziemlich gedrängten Rippen unterscheidet sich die vorliegende Schale von anderen Arten, mit welchen sie allenfalls verglichen werden könnte, namentlich auch von der folgenden.

Lima dilatata v. Koenen.

Tafel III, Figur 18 a, b.

Ausser der abgebildeten, fast vollständigen linken Klappe liegen noch ein Bruchstück einer solchen und zwei etwas kleinere und beschädigte rechte Klappen vor; die erstere ist reichlich 11 mm breit, knapp 11 mm lang und gegen 3 mm hoch gewölbt. Der Schlossrand ist 4 mm lang, vorn ein wenig länger, als hinten. Die Wölbung der Schale nimmt von hinten nach vorn nur wenig zu und ist nur am Wirbel neben den die Ohren begrenzenden Einsenkungen wesentlich stärker, eben sowie an dem ziemlich steilen Abfall zum vorderen Rande. Der Umriss des Schalenrandes ist ziemlich gleichmässig abgerundet, am kürzesten auf dem vorderen Drittel. Die Mittellinie der Schale ist etwa mit 80 Grad gegen den Schlossrand geneigt.

Die Schale ist fast glatt ganz vorn in einer Breite von etwa 2 mm, hinten von etwa 1 mm, und trägt im Uebrigen gegen 28 einfache, rundlich-dachförmige Radialrippen, von welchen die vordersten und hintersten ziemlich schwach sind, die folgenden aber schnell an Stärke zunehmen und etwa eben so breit wie ihre Zwischenräume sind. Diese führen je einen fadenförmigen Streifen, während auf den Rippen sich ein dünner Kiel erhebt, welcher, ebenso wie die Streifen, in Abständen je etwa 0,2 mm sehr feine Spitzen trägt. Diese sind freilich nur auf einem Abdruck der äusseren Schale mit Sicherheit zu erkennen.

Lima perplana v. Koenen.

Tafel I, Fig. 1, Tafel III, Figur 19 a, b.

Zwei anscheinend zu demselben Exemplar gehörige Schalen sitzen, etwas gegen einander verschoben, auf demselben Kalkstück, mit der Schale erhalten, sind aber am Schalenrande mehrfach beschädigt und zum Theil auch etwas verdrückt; immerhin konnte der Umriss nach den feinen Anwachsstreifen ergänzt werden.

Die Schalen sind gegen 62 mm breit und 72 mm hoch gewesen, aber wohl höchstens 10 mm dick; der gerade Schlossrand ist 15 mm lang. Die Anwachslinien sind auf der platten Schale erst auf dem unteren Drittel deutlicher zu erkennen, und zwar mehr durch die abwechselnd hellere und dunklere Färbung, als durch eigentliche Streifen; nur auf der äussersten, 5 mm breiten Zone werden kleine Absätze der Schale sichtbar. Die Wölbung ist ziemlich gleichmässig, auf der vorderen Seite wesentlich stärker, als auf der hinteren. Der vordere Schalrand ist in einer Länge von fast 50 mm gerade abgestutzt und zunächst dem vorderen, ganz kurzen Ohr etwas eingebuchtet; dieses ist an der linken Schale beschädigt und lässt sich an der rechten, abgebildeten, nicht freilegen.

Der Schalrand zeigt die stärkste Krümmung auf der vorderen Hälfte der

unteren Seite und, schon wesentlich schwächer, auf der oberen Hälfte der hinteren Seite, die geringste auf der unteren Hälfte der hinteren Seite, doch gehen diese verschiedenen Krümmungen stets ganz allmählich, ohne jede, wenn auch abgerundete Ecke in einander über, so dass stumpfe Ecken nur am hinteren Ende des Schlossrandes und am unteren Ende der Abstutzung vorn auftreten. Unterhalb des Schlossrandes laufen vom Wirbel ganz flache, durch enge Furchen getrennte Streifen nach hinten, wo sie schliesslich eine Fläche von 5 mm Breite einnehmen. Einige stark beschädigte, kleinere Exemplare, welche derselben Art anzugehören scheinen, tragen bis zu 10 mm vom Wirbel auf der ganzen Schale feine, eingeritzte Radiallinien, welche dann etwa 0,5 mm von einander entfernt sind und zuerst auf der Mitte und vor der Mitte der Schale verschwinden, dann aber auch immer weiter nach vorn und nach hinten. Auf dem hintersten Theile der Schale sind diese Furchen ein wenig breiter und erscheinen punktirt durch sehr schräg nach hinten-unten laufende Leistchen, welche immer an den dahinter liegenden Rippen sitzen, so dass diese, übrigens etwas gewölbten Rippchen auf ihrem vorderen Rande wie zerhackt aussehen.

Diese feine Skulptur könnte auf den grossen Schalen durch Abnutzung verschwunden sein.

Unsere Art unterscheidet sich von anderen glatten Plagiostoma-Arten besonders durch ihre geringe Wölbung oder auch durch ihre längliche Gestalt, so von der Lima Neocomiensis d'Orb.

Inoceramus? sp.

Tafel III, Figur 21.

Die abgebildete, flach gewölbte Schale hat mindestens 33 mm grössten Durchmesser gehabt und ist vielfach am Rande beschädigt, doch ist der rundlich-eiförmige Umriss nach den Anwachs-Runzeln leicht zu ergänzen, welche die ganze Schale bedecken und meistens gegen 2 mm von Mitte zu Mitte von einander entfernt, aber ziemlich unregelmässig sind. Sie sind rundlich bis kantig, mässig hoch und durchschnittlich etwa ebenso breit, wie ihre Zwischenräume. Die Wirbelkanten bilden einen Winkel von nahezu 120 Grad, und die vordere mit dem grössten Durchmesser der Schale einen Winkel von ca. 80 Grad. Vor dem Wirbel ist die Schale ein wenig ausgebreitet, ohne ein eigentliches Ohr zu bilden. Hinter dem Wirbel ist dagegen der Anfang eines scharf durch eine tiefe Furche begrenzten Ohres oder Flügels erhalten. Die Schale ist jedenfalls weniger als 0,2 mm dick und lässt an einer Stelle noch faserige Struktur senkrecht zur Oberfläche erkennen, wie sie eben bei der Gattung Inoceramus auftritt. Es ist daher wohl anzunehmen, dass die untere Schalenlage verschwunden ist, wie ja so häufig bei dieser Gattung; zu dieser oder Posidonomya passt unser Stück auch wohl nach der Skulptur, aber nicht in Folge der scharfen Begrenzung des hinteren Ohres, sondern durch diese eher zu Monotis oder vielleicht auch zu Didymotis Gerhardt (N. Jahrb. f. Mineralogie, Beilageband XI, S. 178, taf. V, f. 3).

Diese vergleicht zwar Gerhardt mit Posidonomya, doch hat die P. Becheri, wie ich (N. Jahrbuch f. Min. 1879 S. 334) gezeigt habe, keineswegs „papierdünne“ Schalen gehabt, wie noch in neuester Zeit von verschiedenen Autoren angegeben wurde, vielmehr ist gewöhnlich die ganze Schale oder doch die untere Lage derselben zerstört.

Eine zweite rechte Klappe vom Mungo ist noch unvollständiger erhalten.

Modiola plicifera v. Koenen.

Tafel II, Figur 2.

Ausser der abgebildeten, hinten beschädigten und etwas verdrückten rechten Klappe fanden sich in dem Kalksandstein noch Bruchstücke von mindestens 6 Schalen. Die erstere ist gegen 66 mm lang und hinten 28 mm hoch gewesen bei ca. 7 mm Dicke der Wölbung. Der Umriss der Schale ist lang-eiförmig, so dass sie etwa 7 mm von vorn nur 15 mm hoch ist. Der Wirbel ist niedrig, ziemlich stark nach vorn gerichtet und liegt 5 mm hinter dem vorderen Ende des Schalrandes, welcher dort recht gleichmässig abgerundet ist, aber unten schnell eine flachere Krümmung annimmt und so in den unteren Schalrand übergeht. Dieser ist von 10 mm vom vorderen Schalenende an auf etwa 40 mm Länge fast gerade gewesen und biegt sich dann ziemlich schnell zum hinteren Rande um, welcher schnell wieder eine flache Krümmung annimmt und allmählich in den hinteren Schlossrand übergeht, durchschnittlich aber gegen diesen mit etwa 135 Grad geneigt ist. Derselbe ist vom Wirbel an auf fast 40 mm Länge nur wenig gekrümmt. Unter ihm folgt eine flache, nach hinten immer breiter werdende Einsenkung, nach unten begrenzt durch die stärkste Wölbung, welche hinter dem Wirbel fast eine abgerundete Kante bildet und, allmählich flacher werdend, nach der kurzen Rundung zwischen dem hinteren und dem unteren Schalenrande verläuft. Der Haupttheil der Schale ist recht flach gewölbt und erst auf den vordersten 10 mm, unter und vor dem Wirbel, wieder etwas stärker.

Der hintere Theil der Schale trägt leidlich regelmässige Anwachsrippen, welche von vorn weit schärfer begrenzt sind, als von hinten, nahe dem Schlossrande sowohl, als auch auf der Hauptwölbung allmählich flacher werden und vor dieser schnell in flache, unregelmässige Falten übergehen. Diese werden nach vorn etwas runzelig. Die Rippen sind auf der erwähnten Wölbung 20 mm vom Wirbel etwa 0,8 mm, 30 mm vom Wirbel gegen 1 mm und 40 mm vom Wirbel etwa 1,2 bis 1,3 mm von Mitte zu Mitte von einander entfernt.

In der Skulptur zeigt unsere Art einige Aehnlichkeit mit einer Reihe von anderen, wie M. radiata v. Münster, in der Gestalt weicht sie jedoch recht bedeutend von denselben ab.

Lithodomus inflexus v. Koenen.

Tafel III, Figur 30 a, b.

Die beiden Klappen des einzigen Exemplares sind etwas gegen einander verschoben und an verschiedenen Stellen beschädigt, doch so, dass sie sich ergänzen, zumal da die Schale grösstentheils erhalten ist. Die Länge beträgt fast 10 mm, die Höhe 4 mm und die Dicke wohl eben so viel. Die Schale ist vorn unter dem Wirbel abgestutzt und biegt sich schnell zum unteren Schalenrande herum; dieser ist bis zum hintersten Viertel ziemlich gerade, biegt sich auf diesem ziemlich schnell auf und dann immer langsamer zum geraden hinteren Schlossrande herum, welcher höchstens die Hälfte der Schalenlänge einnimmt. Schon unter dem hinteren Theile des Schlossrandes bildet sich eine Einsenkung der Schaloberfläche aus, welche bald breiter wird und erst nahe dem hintersten Ende der Schale ganz verschwindet; von diesem zieht sich eine ziemlich gleichmässige, nach vorn immer stärker werdende Wölbung bis zum Wirbel, welche nach vorn-unten schnell in eine ebene Fläche übergeht. Die Schale ist bedeckt von zahlreichen Anwachsstreifen, welche auf der ebenen Fläche ziemlich rauh und wellig-runzelig sind, auf der hinteren Wölbung aber feiner und gleichmässiger werden. Auf dem vorderen Theile der Schale sind einzelne schwache, kantenartige Streifen vorhanden, welche nicht radial, sondern senkrecht gegen die Anwachsstreifen verlaufen, aber nicht regelmässig fortsetzen.

Durch die lange Krümmung des oberen Theiles des hinteren Schalenrandes nähert sich unsere Art manchen zu Mytilus oder Modiola gestellten Formen.

Kleine, mit Gestein erfüllte Bohrlöcher in den unreinen Kalken könnten möglicher Weise mindestens zum Theil von unserer Art herrühren.

Septifer? convolutus v. Koenen.

Tafel III, Figur 22 a, b; 23 a, b.

Ein Dutzend einzelne Schalen von verschiedener Grösse liegen vor, doch konnten sie nur theilweise äusserlich ganz von Gestein befreit werden; das Innere ist an keiner derselben zu erkennen. Die grössten Schalen sind 9,3 mm lang, 5,5 mm breit und gegen 2,5 mm hoch gewölbt, die kleine, Figur 22 abgebildete ist knapp 7 mm lang, reichlich 4 mm breit und etwa 2 mm hoch gewölbt.

Vom Wirbel läuft eine etwas abgerundete, aber fast Kiel-artige Kante nach unten, als Grenze zwischen dem vorderen und dem mittleren Theile der Schale, indem sie etwa eine halbe Windung eines Bogens beschreibt, welcher nicht in einer Ebene liegt und zuerst weit stärker gekrümmt ist, als zuletzt, aber so, dass etwa die untere Hälfte der vorderen Schalseite überhängt.

Vor dem stumpfen Wirbel springt die Schale noch ein wenig, etwa 0,5 mm, vor, doch ist dieser Theil bei den grösseren Stücken abgerieben oder angeätzt.

Der Umriss der Schale ist vorn stark eingebuchtet, nach unten ziemlich kurz gerundet und erhält nach hinten und schliesslich nach oben allmählich eine flachere Biegung bis zu dem geraden Schlossrande. Die Wölbung ist dicht hinter der erwähnten Kante recht stark, verflacht sich aber bald nach hinten zu bedeutend und weiterhin ganz allmählich bis zu einer flachen Einsenkung über dem Schlossrande. Der mittlere und hintere Theil der Schale trägt in der Jugend gegend 12 dicke, hohe, gedrängte Radialstreifen, welche bald anfangen, sich unregelmässig durch Theilung und Einschiebung zu vermehren und zugleich breitere Zwischenräume bekommen, von welchen aber die hintersten unter mehrfacher Spaltung sich nach einander nach oben biegen und an den Schlossrand beziehungsweise den hinteren Schalenrand laufen, so dass auf der Mitte der Schale zwischen dem Kiel und dem hinteren Rande nur etwa 15 Radialrippen vorhanden sind. Am unteren Rande sind die Rippen von Mitte zu Mitte etwa 0,4 mm von einander entfernt und etwa eben so breit, wie ihre Zwischenräume.

Von der vorderen, steil stehenden Fläche der Schale trägt die hintere Hälfte ähnliche Rippen, welche nicht vom Wirbel auslaufen, sondern hinter diesem sich von dem Spiralstreifen auf der Kante abspalten und schräg an den Schalrand verlaufen. Der vordere Theil dieser Fläche ist auf seiner hinteren Hälfte glatt, auf der vorderen aber auch mit ähnlichen Rippen bedeckt, welche sämmtlich von dem vorderen Ende des Wirbels nach dem vorderen Schalrande laufen. Auf dem vorderen Theile der vorderen Fläche sind etwas unregelmässige, schmale, runzeligo Anwachsfalten besonders in der Jugend sehr deutlich, verschwinden aber später; nur bei einzelnen Stücken sind sie auch im Alter auf dem mittleren und hinteren Theile der Schale vorhanden, dann aber sehr breit und bis über 1 mm von Mitte zu Mitte von einander entfernt. Sie bedingen dann Anschwellungen der Radialrippen, welche ausserdem zuweilen eine mehr oder minder deutliche und regelmässige Körnelung erkennen lassen.

Pinna latissima v. Koenen.

Tafel III, Figur 25.

Das abgebildete Bruchstück des unteren Theiles der Schale liegt allein vor. Durch eine Kante, welche nur nach unten scharf begrenzt ist, wird die Schale in zwei Flächen getheilt, welche durchschnittlich mit etwa 120 Grad gegen einander geneigt sind; die obere Fläche konnte nur in sehr geringer Ausdehnung von Gestein befreit werden, ist aber doch bis zu einer Breite von etwa 10 mm sicher zu erkennen, die untere ist 18 mm breit, aber nicht ganz eben, indem sie unterhalb des Kieles eine schmale Einsenkung hat, eine breitere, aber flachere etwa in der Mitte, und eine noch breitere zwischen letzterer und dem unteren Schalenrande. Die Schale trägt feine Radialstreifen, welche am hinteren Rande durchschnittlich 1 mm von einander entfernt sind, auf der unteren Fläche aber nur auf dem untersten Drittel höher werden und deutlicher hervortreten.

Falls der Wirbel in der Fortsetzung dieser Radialstreifen und des Kieles liegt, so würde die ganze Schale bei mindestens 25 mm Breite nur etwa 35 mm Länge gehabt haben, wovon die hintersten 20 mm erhalten sind. Sehr dünne, erhabene Anwachsstreifen laufen in Abständen von durchschnittlich etwa 0,7 mm über die Schale hinweg, indem sie zwischen je zwei Streifen immer einen Bogen nach vorn beschreiben. Diese Anwachsstreifen sind auf der unteren Hälfte der unteren Fläche, sowie auf und über dem Kiel am deutlichsten. Der hintere Rand der unteren Fläche bildet fast einen Viertelkreis.

Arca semiglabra v. Koenen.

Tafel III, Figur 28 a, b; 29 a, b.

Es liegen vier einzelne Schalen vor, welche sämmtlich etwas beschädigt sind, doch an verschiedenen Stellen; die Figur 28 abgebildete ist 18,5 mm breit, 15 mm lang und gegen 7 mm hoch gewölbt; die übrigen sind bis auf eine, welche etwas grösser, aber etwas verdrückt ist, sämmmtlich kleiner.

Von dem mässig hervorragenden Wirbel läuft eine stumpfe, abgerundete Kante nach einer eben solchen Ecke zwischen dem unteren und hinteren Schalrande, welcher unten mit ca. 80 Grad gegen den Schlossrand geneigt ist, nach oben sich aber allmählich immer mehr zu diesem umbiegt. Der gerade Schlossrand ist nicht ganz halb so lang, wie die Schale breit, und geht ohne Ecke in den vorderen Schalenrand über, welcher sich in ziemlich gleichmässigem, doch unten flacher werdendem Bogen zum unteren Schalenrande herumbiegt; dieser ist nur mässig gekrümmt und konvergirt durchschnittlich mit dem Schlossrande nach vorn unter einem Winkel von etwa 25 Grad.

Die hintere Fläche der Schale ist ein wenig eingesenkt, zumal nahe dem Wirbel, der Haupttheil dagegen vor der Kante flach gewölbt und erst weiter vorn etwas stärker. Die Schale trägt flache, unregelmässig sich spaltende Radialstreifen, welche von Mitte zu Mitte gegen 0,3 mm von einander entfernt und auf dem vorderen Theile der Schale am deutlichsten, auf dem hinteren und, im Alter, auch auf dem mittleren Theile mehr oder minder undeutlich sind. Ueber diese Radialstreifen laufen flache Anwachsstreifen hinweg, welche von Mitte zu Mitte etwa 0,3 bis 0,4 mm von einander entfernt und auf dem vorderen Theile der Schale am deutlichsten sind, nach hinten zu immer flacher werden.

Der kleine Wirbel ist kaum 1 mm vom Schlossrande entfernt, und auf dem dreieckigen Felde zwischen beiden sind noch je 2 von der Mittellinie sehr schräg nach dem Schlossrande laufende Ligamentfurchen zu erkennen. Die Schlossfläche ist vor dem Wirbel nur ganz schwach gekrümmt und trägt bis zu 8 mm weit vor dem Wirbel Schlosszähne, und zwar auf 2 mm vom Wirbel 6 schwache, senkrechtstehende, und dann 8 stärkere, von welchen die ersten geknickt sind, indem ihre untere Hälfte steil steht, die obere sich stark vorbiegt, während die vordersten Zähne nur die letztere Richtung haben, und die mittleren einen

Uebergang zwischen beiden Formen bilden. Die hintere Schlossfläche ist stark gekrümmt und trägt bis zu 7 mm vom Wirbel Schlosszähne, auf dem ersten mm einige ganz schwache, dann 13 stärkere, und zwar stehen die ersten senkrecht, die folgenden biegen sich oben nach hinten um, und die übrigen stellen sich mehr und mehr schräg, so dass die letzten, etwas schwächeren, fast dem Schlossrande parallel stehen.

In der Gestalt und zum Theil auch in der Skulptur hat unsere Art einige Aehnlichkeit mit einer Reihe von Arten der Kreide, welche theils zu der Gattung Cucullaea, theils zu Arca gestellt worden sind. Zu Cucullaea passt aber das Schloss nicht, eben so wenig, wie z. B. das von Gerhardt (Jahrb. f. Min. Beilageband XI, 1. Taf. V f. 4) als Cucullaea brevis d'Orb. abgebildete aus dem Aptien Columbien's, und von den sonst vergleichbaren Arca-Arten unterscheidet sich unsere Form durch die Gestalt, namentlich durch die Stellung des Schlossrandes zum unteren Schalenrande. Falls man unsere Art nicht einfach zu Arca stellen will, würde sie wohl zu Trigonarca Conrad zu ziehen sein, von der mir leider typische Exemplare nicht vorliegen.

Arca cardiformis v. Koenen.

Tafel III, Figur 27 a, b.

Von 6 Exemplaren haben die meisten nur noch geringe Reste der Schale, und die beiden letzten sind am Rande beschädigt, lassen sich aber leicht ergänzen. Die abgebildete linke Klappe ist 14 mm hoch, 17 mm breit und 5 mm dick gewölbt; von den übrigen ist nur eine einzige etwa eben so gross. Die Schale ist dreieckig, fast gleichseitig, doch biegt sich der untere, grossentheils nur schwach gekrümmte Schalenrand schon zu dem vordersten Drittel und auf diesem selbst erheblich stärker in die Höhe, als hinten, und der vordere Schalrand beginnt somit wesentlich höher, als der hintere, obgleich beide durch einen ziemlich weiten Bogen in den unteren übergehen; dafür steht der hintere Schalenrand etwas steiler und biegt sich erst etwa in der halben Höhe der Schale nach dem Schlossrande zu.

Der Wirbel ist niedergedrückt, recht stark umgebogen, kaum merkbar nach vorn gerichtet und ragt gegen 2 mm über den Schlossrand hinaus. Die Wölbung der Schale ist in der Mitte recht flach, nach vorn ein wenig deutlicher und zuletzt, auf dem Uebergang zur vorderen Seite eben so wie zu der hinteren, ziemlich stark; ausserdem läuft vorn eine stumpfe Kante vom Wirbel aus, vor welcher eine flache Einsenkung liegt, doch verlieren sich beide allmählich etwa 3 bis 4 mm vom Wirbel anscheinend ganz und geben in eine flache Wölbung über.

Auf der hinteren Seite der Schale beginnen am Rande recht hohe, gedrängte Anwachsrippchen, welche allmählich etwas breitere Zwischenräume bekommen, nach unten steiler abfallen und auf der stärkeren Wölbung zum mittleren Theile der Schale sich schnell ganz verflachen; nahe dem unteren Rande der Schale sind sie zuletzt etwa 0,25 mm breit, eben so breit, wie ihre Zwischenräume.

Der vordere Theil der Schale scheint ähnliche Anwachsrippen nur in nächster Nähe des Schalrandes gehabt zu haben; soweit die Schale hier genügend erhalten ist, sieht man, dass die Rippchen nach hinten sehr schnell dünner und niedriger werden und verschwinden.

Der mittlere Theil der Schale trägt auf seiner oberen Hälfte nur sehr feine Anwachsstreifen und zuletzt auch einzelne ganz flache und unregelmässige Falten; auf seiner unteren Hälfte erhält er sehr regelmässige, durch ganz enge Furchen getrennte, rundliche Anwachsrippchen, welche nach unten etwas schärfer begrenzt sind, als nach oben, und zuerst 0,2 mm bis 0,25 mm, zuletzt 0,3 mm breit sind. Nach vorn und nach hinten werden diese Rippchen flacher, und sie verschwinden resp. gehen in ganz flache und unregelmässige Falten über schon vor dem Anfange der stärkeren Wölbung auf beiden Seiten, indem sich öfters je 2 Rippchen vereinigen, andere einfach auskeilen; die Falten sind an verschiedenen Schalen recht verschieden deutlich und laufen weiter bis zu den hinteren Rippchen. Von dem Schloss habe ich nur die hintere Hälfte einigermassen frei legen können und auch diese nicht so gut, dass eine genaue Abbildung geliefert werden könnte. Der äussere Schlossrand scheint in einer Länge von etwa 4 mm gerade zu sein; unter ihm sind einige steil stehende Zähne sichtbar, von welchen die äusseren von Mitte zu Mitte gegen 0,5 mm breit sind. Nach hinten folgt ein gekrümmter Theil der Schlossfläche in einer Länge von ca. 5 mm, auf welchem die Zähne allmählich etwas dicker werden und bald eine weniger steile Stellung annehmen, so dass die letzten ziemlich horizontal stehen. Die Ligamentgruben und die mittelsten Schlosszähne sind nicht sicher zu erkennen. Ich stelle unsere Art wegen ihrer Gestalt nicht zu der Gattung Pectunculus, sondern zu Arca, wenn auch mit allem Vorbehalt.

Leda cultellus v. Koenen.

Tafel III, Figur 24 a, b, c.

Bei dem Zerschlagen der Kalkstücke konnten 10 Exemplare mehr oder minder vollständig herausgelöst werden, wenn auch grösstentheils nur als Steinkerne. Die grösste Schale ist gegen 13 mm lang und 5,7 mm hoch, eine andere gegen 11 mm lang und 4,6 mm hoch gewesen; die abgebildete ist 10 mm breit und 4 mm hoch, aber knapp 1 mm hoch gewölbt. An dem kleinen, wenig hervorragenden Wirbel bildet der Schalenrand einen Winkel von etwa 160 Grad. Die hintere Seite ist um mindestens ein Viertel länger, als die vordere, und endigt mit einer nahezu rechtwinkligen Ecke, an welcher der gerade hintere Schlossrand mit dem hinteren Schalrande zusammenstösst, während der vordere Schlossrand vorn nicht so scharf begrenzt ist, sondern sich allmählich zum vorderen Schalrande umbiegt, welcher ziemlich gleichmässig abgerundet ist, aber dann in einen flacheren Bogen und den unteren Schalrand übergeht. Dieser ist vorn noch am stärksten gekrümmt, in der Mitte recht schwach und nach

dem hinteren Schalrande zu wieder allmählich stärker. Die Wölbung der Schale ist gering und ziemlich gleichmässig bis auf den sehr flachen hintersten Theil.

Die glänzend glatte Schale lässt mit Hülfe der Loupe zahlreiche sehr feine, zum Theil fast faltenartige Anwachsstreifen erkennen. Sowohl vor als auch hinter dem Wirbel trägt die Schale längs der Schlossränder je ein sehr schmales, langes Schlossfeld, welches durch eine ziemlich tiefe Rinne begrenzt wird, zu welcher sich die Schale mit einer wenig abgerundeten Kante umbiegt. Innerhalb dieser Schlossfelder und um etwa ein Sechstel kürzer findet sich je eine Kante und darüber eine zweite Rinne dicht neben dem Schlossrande selbst.

An einzelnen Stellen anderer Exemplare sind einige Schlosszähne zu erkennen, welche knapp 0,2 mm von Mitte zu Mitte von einander entfernt sind.

Leda sp. ind.

Tafel III, Figur 26 a, b.

Ausser kleinen, stark beschädigten Schalen liegt eine fast vollständige vor, welche gegen 6,5 mm Breite und 3,5 mm Höhe hat bei etwa 1 mm Dicke der Wölbung. Sie gleicht einigermassen der Leda Foersteri Müller (Holzapfel in Palaeontogr. XXXV, S. 202. Taf. 21 f. 13—17), ist aber verhältnissmässig breiter und wohl auch flacher gewölbt. Der Wirbel liegt ziemlich in der Mitte und ist recht stumpf. Vorn ist die Schale wohl abgerundet und nimmt nach dem unteren Schalrand allmählich eine flachere Krümmung an. Dieser biegt sich erst ganz hinten stärker in die Höhe und trifft endlich den flach eingebogenen hinteren Schlossrand nahezu unter einem rechten Winkel. Die Skulptur besteht aus zahlreichen feinen, eingeritzten Anwachslinien, welche anscheinend nach unten schärfer begrenzt sind, als nach oben, und durch ganz flache, knapp 0,1 mm breite Bänder von einander getrennt werden.

Da das Schloss sowie die Lunula und das Schild nicht zu sehen sind, so verzichte ich darauf, diese Art mit einem Namen zu belegen.

Lucina sp. ind.

Tafel IV, Figur 4 a, b.

Die einzige, abgebildete linke Klappe ist vorn beschädigt und wohl nur als Steinkern erhalten; die Höhe beträgt 6 mm, die Breite 7,3 mm, die Dicke der Wölbung gegen 2 mm, der Winkel der Wirbelkanten etwa 115 Grad, doch ist der hintere Schlossrand ein wenig gekrümmt und der vordere merklich eingesenkt. Der Wirbel ragt mässig hervor und ist mässig stark nach vorn gerichtet; vor dem Wirbel liegt eine gegen 3 mm lange, anscheinend tief eingesenkte, aber von Gestein verdeckte Lunula, hinter dem Wirbel ein schmales, etwa eben so langes und ebenfalls verdecktes Feld, welches durch eine ziemlich scharfe Kante

begrenzt wird. Ueber dieser folgt eine ziemlich tiefe Einsenkung, welche fast das hinterste Viertel der Schale einnimmt und nach vorn an einer Kante aufhört, die nahe dem Wirbel recht scharf ist, nach unten allmählich stumpfer wird und sich weiter herabbiegt, so dass sie eine nur wenig stärkere Krümmung des Schalenrandes bedingt. Der Rest der Schale ist ziemlich gleichmässig gewölbt, nur weit vorn wieder etwas stärker.

Leider ist keine Spur von der Schalenoberfläche noch vom Schloss und den Eindrücken der Muskeln und des Mantels mit Sicherheit zu erkennen.

Cardium perobliquum v. Koenen.

Tafel IV, Figur 3 a, b, c.

Ausser der abgebildeten rechten Klappe fanden sich beim Zerkleinern des Gesteins nur noch zwei Steinkerne kleinerer Exemplare, welche derselben Art angehören dürften. Erstere ist 11,5 mm lang, 7,5 mm breit und 5 mm dick gewölbt; vom Wirbel verläuft eine etwas abgestumpfte Kante nach einer ein wenig abgerundeten Ecke, an welcher der schwach gekrümmte hintere Schalrand mit dem unteren unter einem Winkel von annähernd 90 Grad zusammenstösst. Der untere Schalenrand biegt sich ziemlich gleichmässig bis in die Nähe des vorderen Schlossrandes auf und dann zu diesem ein wenig schneller um. Der vor der erwähnten Kante liegende Theil der Schale ist auf seiner vorderen Hälfte etwas stärker gewölbt, als auf der hinteren. Der hintere Theil der Schale steht zunächst dem Wirbel ganz steil und ist in der Mitte ein wenig eingesenkt. Weiterhin wird die Neigung zur Schalenebene etwas weniger steil, und die Einsenkung verliert sich allmählich.

Der Schlossrand ist recht dick und in einer Länge von etwa 3,5 mm nur wenig gebogen, und der stark gekrümmte, ein wenig nach vorn gerichtete Wirbel ragt fast 2 mm über ihn hinaus. Die Schlossfläche ist etwas abgenutzt, lässt aber etwas vor ihrer Mitte und an ihrem hinteren Ende noch Spuren von Zähnen, sowie von Gruben für die Zähne der linken Klappe erkennen.

Der Kiel trägt eine hohe Radialrippe, und der vor ihm liegende Theil der Schale noch etwa 22 Rippen, von welchen die ersten 6 allmählich, die folgenden etwas schneller an Stärke und besonders auch an Höhe abnehmen, so dass sie eine etwas dachförmige Gestalt bekommen und durch enge Rinnen von einander getrennt werden, während die hintersten sehr hoch sind und durch tiefe Furchen von einander getrennt sind.

Der hintere, steil abfallende Theil der Schale trägt gegen 12 Radialrippen, welche nach hinten schmaler werden und namentlich schnell an Höhe abnehmen, so dass die erste nicht gar viel gegen die Rippe auf der Kante zurücktritt und eine Abstumpfung der letzteren bedingt, während die 6 hintersten recht niedrig und, freilich in Folge von Abnutzung, auch undeutlich sind. Sämmtliche Rippen scheinen, mindestens im Alter, Höcker getragen zu haben in Abständen von etwa 0,5 bis 0,6 mm.

Falls anders unsere Art zu der Gattung Cardium gehört, wie ich nach den vorhandenen Resten des Schlosses glauben möchte, so würde sie in die Nähe der eocänen Gattung Lithocardium Woodward zu stellen sein.

Astarte tecticosta v. Koenen.

Tafel IV, Figur 7 a, b.

Ausser der abgebildeten, fast ganz vollständigen, wenn auch besonders in der Wirbelgegend abgenutzten linken Klappe liegen noch drei bedeutend kleinere vor, welche derselben Art angehören dürften; die erstere ist 10 mm breit, 8 mm hoch und gegen 2 mm dick gewölbt. Der hintere Schlossrand ist etwas gekrümmt und gegen den etwas eingebuchteten vorderen durchschnittlich mit 90 Grad geneigt, vorn mit etwa 80 Grad, hinten mit etwa 100 Grad, und ist ziemlich noch einmal so lang, wie der vordere, welcher mit mässig kurzer Biegung in den Schalenrand übergeht. Dieser nimmt allmählich eine schwächere Krümmung an, so dass das mittlere Drittel nur schwach gekrümmt ist, doch wird auf dem hinteren Drittel die Biegung schnell wieder stärker bis zum hinteren Schlossrande.

Die Wölbung ist auf dem hinteren Drittel am stärksten, auf der Mitte am schwächsten und auf dem vordersten Viertel wieder etwas stärker. Vorn findet sich eine tiefe, 3,5 mm lange, durch eine scharfe Kante begrenzte Lunula und hinten ein ähnlich begrenztes, langes, schmales Feld.

Die Skulptur besteht aus ungewöhnlich hohen und dicken Anwachs-Rippen, welche, fast ebenso breit wie ihre Zwischenräume, von Mitte zu Mitte im Alter gegen 1 mm von einander entfernt sind, 1 mm vom Wirbel aber nur halb so weit. In der Jugend sind sie nur mässig hoch, im Alter aber mindestens so hoch wie breit und von unten her ausgehöhlt, während sie an ihrem oberen Rande steil abfallen. In den Zwischenräumen tritt öfters je ein niedriger Streifen auf.

Das Schloss lässt sich leider nicht wohl frei legen, da das Gestein hart ist und Schalentrümmer anderer Bivalven enthält.

In der Gestalt gleicht unsere Art mancherlei anderen Astarte-Arten, aber in der Skulptur weicht es von diesen wesentlich ab.

Astarte (Goodallia?) trigonella v. Koenen.

Tafel IV, Figur 1 a, b, c.

Die einzige vorliegende, abgebildete rechte Klappe ist nur unbedeutend beschädigt, und es gelang mir, auch das Schloss frei zu legen; sie ist 14,5 mm lang, ebenso breit und 5 mm dick gewölbt. Die ziemlich dicke Schale ist fast gleichseitig-dreieckig, doch mit einer starken Herausbiegung des hinteren Schalenrandes, welcher durch eine wenig abgerundete Ecke von dem grossentheils ziemlich geraden unteren Schalenrande getrennt wird. Dieser biegt sich vorn

allmählich mehr in die Höhe und geht in einer besser abgerundeten Ecke in den vorderen Schalrand über, welcher auf seiner unteren Hälfte ziemlich gerade, auf seiner oberen bis zu dem deutlich nach vorn gerichteten Wirbel mässig eingebuchtet ist. Von dem ziemlich kleinen, nieder gedrückten Wirbel läuft nach dem hinteren Ende des unteren Schalrandes eine schwach abgerundete Kante, nach dem vorderen dagegen eine vollständig abgerundete. Der hintere Theil der Schale ist deutlich eingesenkt fast in seiner ganzen Länge, der vordere nur in der Nähe des Wirbels. Eine schärfer begrenzte Lunula ist nicht vorhanden, sondern nur eine 6 mm lange und ca. 1,5 mm breite Einsenkung, dagegen läuft auf dem hinteren Theile der Schale vom Wirbel in flachem Bogen nach dem hinteren Schalenrande, 6 mm vom Wirbel, eine rundliche Kante, welche ein hinteres, bis zu 1,5 mm breites Feld begrenzt.

Die ersten drei Fünftel der Schale sind glatt, der Rest trägt auf dem mittleren Theile breite Furchen, getrennt durch recht hohe Anwachsrunzeln, welche von Mitte zu Mitte meistens 0,8 mm, zum Theil aber auch über 1 mm von einander entfernt sind, auf dem vorderen und dem hinteren Theile der Schale aber grossentheils verschwinden.

Die rechte Klappe besitzt 2 Schlosszähne und 2 Gruben für die Zähne der linken Klappe, sowie eine Grube für einen langen, schmalen vorderen Seitenzahn der letzteren. Die Grube für den vorderen Schlosszahn der linken Klappe ist sehr gross, und ihre Ränder divergiren vom Wirbel aus unter einem Winkel von ca. 80 Grad; die für den hinteren Zahn der linken Klappe ist ziemlich schmal, schmaler als der hintere Zahn der rechten, aber etwas breiter, als der vordere Zahn der rechten, und liegt unmittelbar unter dem kräftigen Ligamentträger. Die Grube in der rechten Klappe für den vorderen Seitenzahn der linken ist nach innen durch eine Leiste scharf begrenzt und reicht bis zu 6 mm vom Wirbel.

Unsere Art nähert sich in der Gestalt einigermassen solchen Formen der Gattung Opis, bei welchen der Wirbel weniger spitz und weniger stark nach vorn gedreht und die Lunula wenig eingesenkt ist, wie O. trigonalis Sow. sp. aus dem Unter-Oolith und O. semilunulata Étallon aus den Diceras-Schichten, für welche Bigot die Untergattung Trigonastarte aufstellte (Sur les Opis. Mém. Soc. Linn. de Normandie XVIII, 1894-95, S. 159), weicht aber durch das Schloss weit von ihnen ab, welches eine gewisse Uebereinstimmung mit dem einzelner Astarteähnlicher Formen zeigt, so z. B. mit der Goodallia Koeneni Speyer.

Sobald mehr und besseres Material von unserer Art vorliegt, dürfte für dieselbe eine besondere Untergattung aufzustellen sein.

Cardita sphaericula v. Koenen.

Tafel IV, Figur 2 a, b.

Die einzige vorliegende linke Klappe ist vielleicht ein wenig abgenutzt, doch gelang es, das Schloss frei zu legen. Sie ist 4,7 mm breit, 5 mm lang und

2,3 mm dick gewölbt. Der stumpfe Wirbel ragt verhältnissmässig stark hervor, und die Wirbelseiten bilden einen Winkel von ca. 80 Grad; im Uebrigen ist der Umriss rundlich und die Krümmung am Uebergang des hinteren Schalenrandes zum unteren und zum Schlossrande noch am stärksten, ein wenig schwächer am oberen Ende des vorderen Schalrandes, und am schwächsten am unteren Schalenrande. Die Wölbung ist hinter der Mitte der Schale am stärksten. Vor dem Wirbel befindet sich eine ca. 2 mm lange, ziemlich tiefe, aber anscheinend nicht scharf begrenzte Lunula.

Die Skulptur besteht aus etwa 25 dicken, durch schmalere Furchen getrennten Radialrippen, welche freilich nach dem Wirbel zu und auf der hinteren Hälfte der Schale mehr oder minder abgenutzt sind; nahe dem hinteren Rande werden sie jedenfalls etwas schmaler. Sie scheinen nicht glatt, sondern gekerbt oder gekörnelt gewesen zu sein und werden durch 2 verhältnissmässig starke Absätze je 0,5 mm vom Schalenrande und von einander förmlich unterbrochen.

Das Schloss ist recht kräftig, leider in seinem dem Wirbel zunächst liegenden Theile abgenutzt; in seiner Mitte steht ein dicker, dreieckiger Zahn, dessen Seiten nach oben mit ca. 45 Grad konvergiren; von einem vorderen Schlosszahn sind nur Spuren vorhanden. Die lange Grube für den hinteren Schlosszahn der linken Klappe ist etwas breiter, als die für den vorderen.

Cytherea Wohltmanni v. Koenen.

Tafel IV, Figur 8 a, b; 9; var? Figur 6.

Die häufigste Art, von welcher ich beim Zerschlagen der unreinen Kalke über 20 mehr oder minder vollständige Schalen erhielt, aber mindestens 50 gesehen habe, ist eine rundlich-eiförmige Form, welche sich freilich wegen ihrer rauhen Skulptur nur schwer und unvollständig mit ihrer Aussenschale vom Gestein befreien lässt.

Das abgebildete, zweiklappige Exemplar ist 24 mm breit, 20 mm hoch und 11,5 mm dick; die grössten der übrigen sind allerhöchstens 25 mm breit. Der Wirbel liegt dicht hinter dem vorderen Drittel der Schale, ist recht stark nach vorn gerichtet, aber verhältnissmässig wenig aufgetrieben.

Der untere Schalrand ist hinten am wenigsten gekrümmt und geht hier in kurzem Bogen in den hinteren Schalrand und den mässig gekrümmten Schlossrand über. Nach vorn erhält er unten allmählich eine stärkere Biegung und geht so in den vorderen Schalenrand und endlich in den vorderen Schlossrand über, welcher mit dem mittleren Theile des hinteren Schlossrandes einen Winkel von knapp 110 Grad bildet.

Die Wölbung ist auf dem hintersten Drittel am stärksten, in der Mitte am schwächsten. Die Skulptur besteht aus ziemlich hohen Anwachsrippen, welche besonders im Alter von oben ausgehöhlt oder doch scharf begrenzt sind, nach unten aber ziemlich gleichmässig abfallen und nahe dem unteren Rande zum

Theil über 1 mm breit sind, vorher etwa 0,7 mm, über der Mitte der Schale gegen 0,5 mm, und auf dem obersten Viertel nur etwa 0,1 mm bis 0,2 mm. Die Lunula ist nur wenig vertieft und etwa 5 mm lang und 4 mm breit.

Das Schloss habe ich an einer rechten Klappe grösstentheils frei legen können. Nach den Zahngruben in demselben zu urtheilen, ist der vordere Zahn der linken Klappe ein wenig breiter, als der mittlere und als der mittlere der rechten, aber merklich dünner, wenn auch weit gedrungener, als der hintere Schlosszahn, und wesentlich stärker, als der schmale vordere der rechten Klappe, auf deren Schlossplatte vorn eine schmale Grube vorhanden ist, so dass die linke Klappe einen vorderen Seitenzahn gehabt hat. Der hintere Schlosszahn der linken Klappe ist jedenfalls ziemlich dünn und erhebt sich am Rande des Ligamentträgers.

Dass Schloss ist somit ziemlich ähnlich dem von anderen Arten der Gattung, wie C. despecta Desh. (Anim. sans Vert. du bassin de Paris Taf. 30 f. 17, 18). Ob einzelne Schlosszähne gespalten waren, kann ich nicht entscheiden, da es nicht möglich war, die Oberfläche der Schlosszähne aus dem festen Gestein ganz unversehrt herauszupräpariren. Die inneren Abdrücke der Schale sind leider nicht scharf genug, um die Muskeleindrücke und den Verlauf des Manteleindruckes erkennen zu lassen; nur an einem Stück sieht man, wenn auch wenig deutlich, dass eine Mantelbucht bis über das hintere Drittel der Schale hinausreicht.

Vielleicht sind als Varietät derselben Art anzusehen das Figur 6 abgebildete, wohl erhaltene Exemplar, dessen Schloss sich leider nicht frei legen lässt, und ein Paar Bruchstücke. Ersteres ist 13,5 mm hoch, 16,5 mm breit und 4 mm dick gewölbt und weicht von der ächten C. Wohltmanni besonders dadurch ab, dass der Wirbel etwas weniger weit vorn liegt und weniger stark vorwärts gerichtet ist, dass der Schlossrand fast gerade und der Schalenrand hinten breiter abgerundet ist.

Cytherea corbuloides v. Koenen.

Tafel IV, Figur 10 a, b.

Die einzige, abgebildete linke Klappe ist vorn etwas beschädigt und etwas abgenutzt, besonders auf ihrer oberen Hälfte. Sie ist 16 mm hoch, fast 19 mm breit und etwa 5,5 mm dick gewölbt; sie hat einen rundlich-eiförmigen Umriss, abgesehen von dem recht stark hervorragenden und nach vorn gerichteten Wirbel und einer recht kurzen Rundung zwischen dem unteren und dem hinteren Rande. Die Wölbung ist am stärksten ganz hinten und ganz vorn, und auf der hinteren Hälfte etwas stärker, als auf der vorderen. In der Richtung vom Wirbel nach unten ist die Wölbung auf der oberen Hälfte wesentlich geringer, als auf der unteren, und über dem untersten Sechstel findet sich ein verhältnissmässig tiefer und breiter Absatz der Schale. Der untere Schalrand ist hinten nur flach gekrümmt und biegt sich nach vorn allmählich immer stärker zum vorderen

Rande nnd dem stark eingesenkten vorderen Schlossrande um, hinten dagegen recht kurz zu dem recht stark gekrümmten hinteren Rande und dem hinteren Schlossrande, welcher besonders auf seiner vorderen Hälfte verhältnissmässig stark gebogen ist.

Die Skulptur ist nur auf der unteren Hälfte der Schale erhalten und besteht aus Anwachsrippen, welche oben scharf begrenzt sind, nach unten allmählich abfallen und gegen 0,5 bis 0,6 mm von einander entfernt sind.

Die Lunula ist mässig vertieft, durch eine enge Furche begrenzt und 4 mm lang und 1,3 mm breit.

Das Schloss liess sich leidlich gut reinigen, wenn auch die Oberfläche der Zähne zum Theil ein wenig dabei abgenutzt worden ist. Der mittlere Schlosszahn der linken Klappe ist fast doppelt so dick, wie der vordere, und mindestens doppelt so dick, wie der lange hintere, welcher nur durch eine enge Furche vom Ligamentträger getrennt ist; er ist ferner, nach den Gruben zu urtheilen, kaum halb so dick, wie der hintere Zahn der rechten Klappe, etwas schmaler, wie der mittlere, und ziemlich doppelt so dick, wie der vordere der rechten. Auf der vorderen Schlossfläche befindet sich endlich nahe dem Rande, diesem parallel, eine fast 2 mm lange, schmale Zahngrube, welche nach innen durch einen verhältnissmässig dicken und hohen Zahnhöcker begrenzt wird.

Das Innere der Schale selbst lässt sich nicht wohl frei legen.

Cytherea n. sp.?

Tafel IV, Figur 5.

Ausser der abgebildeten linken Klappe, von welcher die Schale grösstentheils abgesprungen ist, liegt noch eine kleinere rechte vor, welche allenfalls derselben Art angehören könnte und die Schale grösstentheils noch besitzt, aber am Rande, besonders vorn, und am Wirbel vielfach beschädigt ist. Erstere ist 27 mm hoch, gegen 35 mm breit und 8 mm dick gewölbt gewesen. Eine von dem nur wenig vorwärts gedrehten, wenig hervorragenden Wirbel gerade nach unten verlaufende Linie ist vom vorderen Schalrande 15 mm, vom hinteren 20 mm entfernt; der flach eingesenkte vordere Schlossrand trifft den schwach gekrümmten hinteren am Wirbel unter einem Winkel von etwa 110 Grad. Der wenig gekrümmte untere Schalrand biegt sich auf dem hintersten Sechstel der Schale ziemlich schnell in die Höhe zum hinteren Schalrande und dann in weitem Bogen zum hinteren Schlossrande, auf dem vorderen Viertel dagegen allmählich schneller in die Höhe zum vorderen Schalenrande und dann ziemlich gleichmässig, nur zuletzt wieder langsamer, zum vorderen Schlossrande.

Die stärkste Wölbung liegt auf dem hintersten Sechstel und, zunächst dem Wirbel, auf dem vordersten Viertel; der mittlere Theil der Schale ist ziemlich flach gewölbt.

Die Lunula ist nicht erhalten, war aber jedenfalls nicht stärker vertieft.

Die Skulptur besteht aus unregelmässigen, feinen, etwas faltigen Anwachslinien, welche auf dem unteren Theile der Schale deutlicher hervortreten.

Die Mantelbucht ist abgerundet und reicht über die hintersten zwei Fünftel der Schale noch ein wenig hinaus.

Das erwähnte kleinere Stück gleicht dem grösseren wohl in der Skulptur, ist aber doch etwas ungleichseitiger, hat einen stärker nach vorn gedrehten Wirbel und einen, besonders nach hinten zu, stärker gekrümmten unteren Schalenrand, so dass ich es nur mit allem Vorbehalt und nur vorläufig derselben Art zurechne.

Das Schloss ist an beiden Stücken zum Theil zerstört, und der Rest lässt sich nicht wohl frei legen.

Cytherea cf. plana Sow.

Tafel IV, Figur 11 a, b.

Ausser der abgebildeten linken Klappe, welche am Wirbel und am hinteren und vorderen Schalenrande beschädigt ist, liegen noch ein Paar noch stärker beschädigte, kleinere vor, welche vielleicht noch derselben Art angehören könnten. Die erstere ist gegen 35 mm breit und 27 mm hoch gewesen bei 10 mm Dicke der Wölbung; der Wirbel erreichte noch das vorderste Drittel der Schale, und der Winkel der Schlosskanten betrug gegen 110 Grad, doch ist der hintere Schlossrand ein wenig gekrümmt, der vordere beträchtlich eingesenkt. Der Wirbel ragte jedenfalls nicht unbedeutend vor und war recht stark nach vorn gerichtet.

Im mittleren Drittel ist der untere Schalrand nur flach gekrümmt und biegt sich bis zum hintersten Sechstel der ganzen Breite nur allmählich, auf diesem aber schneller und in weitem Bogen zum hinteren Schlossrande herum, während er auf dem vorderen Drittel sich in einem allmählich immer kürzer werdenden Bogen bis vorn gerade in die Höhe zieht und dann ziemlich schnell zum vorderen Schlossrande umbiegt.

Die Schale ist ziemlich dick und trägt neben einigen stärkeren Absätzen zahlreiche, etwas faltige Anwachsstreifen, welche auf dem hintersten Sechstel deutlicher hervortreten und dieses rauher erscheinen lassen; es ist durch eine kurze, stärkere Wölbung von dem Hauptttheile der Schale getrennt, welche auf der Mitte nur flach und erst auf dem vordersten Drittel wieder stärker gewölbt ist.

Vor dem Wirbel liegt eine wenig deutlich durch eine schwache Furche begrenzte Lunula, welche anscheinend gegen 8 mm lang, aber wenig über 1 mm in jeder Klappe breit ist. Mindestens eben so lang ist der Ligamentträger.

Die Schlossplatte ist auffallend schmal, selbst wenn der fehlende, dem Wirbel zunächst liegende, kleine Theil ergänzt wird; der vordere Schlosszahn der linken Klappe ist fast doppelt so breit, wie der mittlere, aber, nach den betreffenden Gruben in der linken Klappe zu urtheilen, etwa eben so dick, wie

der mittlere Zahn der rechten, und fast doppelt so dick wie der hintere und vor allem der vordere Zahn der rechten Klappe; der hintere Zahn der linken bildet eine ziemlich dünne, gegen 6 mm lange Leiste unterhalb des Ligamentträgers. Auf der vorderen Schlossfläche befindet sich ein ziemlich langer, stumpfer Seitenzahn, welcher durch eine seichte Furche vom Schlossrande getrennt wird, aber etwas abgenutzt erscheint.

Durch breitere, weniger stark ungleichseitige Gestalt, vor allem aber durch die schmale Schlossfläche und kürzere Schlosszähne unterscheidet sich unsere Art von den Vorkommnissen aus dem Cenoman und Senon, welche von Sowerby (Min. Conch. pl. 20 f. 2), Goldfuss (Petref. Germaniae Taf. 148 f. 4), Stoliczka und Holzapfel (Palaeontogr. XXXV pl. XIII f. 16—18) als Venus oder Cytherea plana Sow. angeführt worden sind.

Die sonst noch von d'Orbigny, Pictet und Anderen beschriebenen Arten sind theils für so mangelhaft erhaltene Stücke aufgestellt, dass sie einen genaueren Vergleich überhaupt nicht zulassen, theils weichen sie in der Gestalt und Skulptur mehr oder minder weit von den mir vorliegenden von Kamerun ab.

Cytherea tenuidentata v. Koenen.

Tafel IV, Figur 12 a, b.

Es liegt nur die abgebildete rechte Klappe vor, welche etwas verdrückt und aussen ziemlich stark abgenutzt ist, aber durch geringere Wölbung, kleinen Wirbel und weit weniger kräftiges Schloss von C. Wohltmanni und C. corbuloïdes sich wesentlich unterscheidet. Die Schale ist reichlich 16 mm hoch, 19 mm breit und etwa 4 bis 4,5 mm dick gewölbt gewesen. Der ziemlich gerade, nur vorn deutlicher gekrümmte hintere Schlossrand bildet mit dem flach eingesenkten vorderen an dem kleinen, niedergedrückten, mässig stark nach vorn gerichteten Wirbel einen Winkel von ca. 115 Grad. Eine vom Wirbel nach unten gezogene Linie theilt die Schale in zwei Theile, von welchen der hintere etwa um die Hälfte breiter ist, als der vordere. Der untere Schalenrand ist grossentheils mässig gekrümmt und zieht sich vorn in weitem, ziemlich gleichmässigem Bogen zum vorderen Schlossrande hinauf, während er sich hinten allmählich immer stärker aufbiegt, und der hintere Schalenrand zum hinteren Schlossrande wieder eine schwächere Krümmung annimmt. Die Lunula ist nicht deutlich zu erkennen, aber jedenfalls kaum oder nicht vertieft.

Die Skulptur ist nur auf dem untersten Theile der Schale stellenweise noch einigermassen erhalten; sie besteht dort aus Anwachsrippen, welche von Mitte zu Mitte gegen 0,8 mm von einander entfernt sind. Das Schloss ist ziemlich schwach entwickelt, besonders gegenüber den vorstehend angeführten Arten. Der hintere Rand des hinteren Schlosszahnes bildet mit dem vorderen Rande des vorderen annähernd einen rechten Winkel. Der mittlere Schlosszahn ist wenig dicker, als der hintere, aber wohl doppelt so dick, wie der ungenügend erhaltene

vordere, und, nach den Zahngruben zu urtheilen, wie der hinterste und vorderste Zahn der linken Klappe, sowie etwa eben so breit, wie der mittlere Zahn derselben. Auf dem vorderen Theile der Schlossplatte liegt eine ziemlich tiefe Grube für den Seitenzahn der linken Klappe und darunter ein stark abgenutzter Seitenzahn.

Cytherea? sp. ind.

Tafel IV, Figur 13.

Die abgebildete rechte Klappe enthält nur noch geringe Reste der Schale und ist sonst als Steinkern oder innerer Abdruck erhalten, mindestens 24 mm breit und 14 mm hoch bei etwa 3 mm Dicke der Wölbung. Die Wirbelkanten bilden einen Winkel von ca. 140 Grad an dem kleinen, wenig hervorragenden Wirbel, welcher um etwa ein Drittel weiter vom hinteren Ende der Schale entfernt ist, als vom vorderen. Der untere Schalenrand ist nur flach gekrümmt zwischen den hintersten Viertel und dem vordersten Fünftel, welches ziemlich kurz abgerundet ist, wesentlich kürzer, als der hintere Theil der Schale. Die Schale lässt feine, unregelmässige Anwachsstreifen und einzelne Falten erkennen, der Steinkern im Alter in Abständen von durchschnittlich etwa 1 mm die Eindrücke von flachen Anwachsfalten, welche nach unten weit deutlicher begrenzt sind, als von oben.

Die Mantelbucht ist wenigstens theilweise zu erkennen; sie bleibt noch reichlich 1 mm von der Mitte der Schale entfernt. Das Schloss lässt sich nicht wohl frei legen, so dass ich es ganz dahin gestellt lassen muss, ob dieses Exemplar wirklich zu der Gattung Cytherea gehört.

Cytherea? sp. ind.

Tafel IV, Figur 16.

Aus dem feinkörnigen Sandstein liegt ausser Bruchstücken der abgebildete Steinkern vor, welcher die Skulptur etwas abgeschwächt, gewissermassen aufgeprägt enthält und bei 32 mm Breite und 17,5 mm Höhe reichlich 3 mm dick gewölbt ist. Die Wirbelränder bilden einen Winkel von etwa 145 Grad an dem kleinen, wenig hervorragenden Wirbel, welcher dem vorderen Ende der Schale etwa 2,5 mm näher liegt, als dem hinteren. Der untere Schalenrand ist zwischen dem hinteren Drittel und dem vorderen Viertel der Schale ziemlich gerade, biegt sich aber nach hinten allmählich immer mehr in die Höhe und geht durch den breit gerundeten hinteren Schalrand ohne scharfe Grenze in den hinteren Schlossrand über, während er sich vorn weit schneller aufbiegt, und der vordere Schalrand ziemlich kurz gerundet ist. Die Skulptur besteht, soweit sie eben erhalten ist, aus unregelmässigen Anwachs-Streifen und Falten, welche auf der Mitte der

Schale am deutlichsten hervortreten nnd allenfalls an die Sknlptur von Panopaea- oder Mya-artigen Bivalven erinnern.

Von den Mnskeleindrücken oder dem Manteleindruck ist leider nichts zu erkennen.

Liopistha ventricosa v. Koenen.

Tafel IV, Figur 22; 23 a, b.

? Avicula sp. K. Gerhardt, Neues Jahrb. f. Mineralogie. Beilageband XI, S. 178 Taf. V f. 2.

Ansser 3 verdrückten und beschädigten Steinkernen ans dem feinkörnigen Sandstein liegen 2 heschädigte, aher sehr wenig verdrückte Stücke aus dem Kalk vor, von welchen besonders das eine, Figur 22 abgebildete, noch einen Theil der Schale besitzt. Dasselhe dürfte gegen 25 mm breit, fast 20 mm hoch und gegen 7 mm dick gewesen sein. Der bauchige Wirbel ragt fast 3 mm über den Schlossrand hinans und ist recht deutlich nach vorn gedreht. Die ganze Gestalt und auch die Sknlptur hat grössere Aehnlichkeit mit manchen Abbildungen der Liopistha (Corbula oder Pholadomya) aeqnivalvis, dem Cardinm candatum Roemer's, aus dem Senon von Kieslingswalde, Quedlinbnrg, Aachen etc., namentlich anch mit denen von Geinitz (Palaeontographica XX. 2. Taf. 19 f. 6 u. 7), doch ist der Wirbel banchiger und mehr nach vorn gerichtet, wie dies anch bei Goldfuss' Abbildnng (Petref. Germ. Taf. 151 f. 15) der Fall ist; bei dieser ist freilich der Wirbel jedenfalls zn spitz und nach einem unvollkommen erhaltenen Exemplar gezeichnet. Besonders unterscheiden sich von der senonen Art unsere Stücke durch die Skulptur, indem die 2 Radialrippen, welche znnächst vor der glatten hinteren Einsenkung folgen, die stärksten sind und den grössten Abstand von einander haben; die folgenden Rippen werden schwächer, beziehungsweise die Zwischenränme derselben schmaler, bei den meisten vorliegenden Schalen allmählich bis zur Mitte der Schalen, bei dem abgebildeten jedoch sehr schnell, sodass schon von der dritten Rippe an die Abstände ziemlich die gleichen bleiben, während freilich die kantigen Rippen noch schwächer und schon anf der Mitte der Schale ziemlich undeutlich werden. Dasselhe ist anf dem anderen Stück aus dem Kalk der Fall, während die Sandstein-Steinkerne anch auf der vorderen Hälfte der Schale sehr deutliche, wenn anch etwas gedrängtere Rippen besitzen, als hinter der Mitte. Ausserdem finden sich in der Jngend auf dem vordersten Theile der Schale recht starke Anwachs-Rippen, welche von Mitte zu Mitte etwa um die Hälfte weiter von einander entfernt sind, als die Radialrippen, aber schon vor der Mitte verschwinden, je weiter vom Wirhel desto früher, und 7 bis 8 mm vom Wirbel überhaupt ganz undeutlich werden.

Auf der Schalenoberfläche des grössten Exemplares ist mit Hülfe der Loupe auch stellenweise zu erkennen, dass anf den Kanten der Rippen sich kleine Knötchen oder Spitzen befunden haben, im Alter in Abständen von etwa 1,2 bis

1,5 mm. Das Schloss frei zu legen, ist nicht wohl ausführbar, doch ist es nach der allgemeinen Analogie der Gestalt und Skulptur mit L. aequivalvis Goldf. anzunehmen, dass unsere Stücke derselben Gattung angehören, wie diese Art, die übrigens nach den Abbildungen von Geinitz in der Radialskulptur auch nicht unerheblich variirt. Die starken Anwachs-Rippen der vorderen Seite in der Jugend würden freilich eine Aenderung der Diagnose der Gattung bedingen, wie sie von Meek und dann von Zittel (Handb. der Paläontologie II S. 131) gegeben wurde.

Die als Avicula sp. von Gerhardt a. a. O. angeführte und abgebildete Form aus dem „Urgo-Aptien" Columbien's zeigt in Gestalt und Skulptur mindestens einige Aehnlichkeit mit unserer Art und dürfte ebenfalls zu der Gattung Liopistha gehören.

Corbula incurvata v. Koenen.

Tafel IV, Figur 19 a, b, c; 20 a, b; 21 a, b.

Es liegen mir 4 ziemlich vollständige Schalen und 2 Steinkerne der rechten Klappe vor. Diese erreicht 9 mm Höhe, ca. 11 mm Breite und 4,5 mm Dicke der Wölbung. Von aussen gesehen hat die Schale die Gestalt eines Dreieckes, allerdings mit abgerundeten Ecken und etwas eingesenkten oder ausgebogenen Seiten, bei welchem der etwas abgerundete untere Schalrand mit dem deutlich eingebuchteten oberen Rande einen Winkel von etwa 30 Grad bildet, und mit dem schwach eingebuchteten vorderen Rande einen Winkel von ca. 70 Grad.

Der Wirbel der dicken Schale ist sehr stark umgebogen, besonders von vorn gesehen, und erscheint zugleich nach hinten gerichtet, da der vordere Schalenrand zunächst dem Wirbel stark eingezogen ist, um fast 2,5 mm, während der Abstand des Wirbels vom unteren Schalrande gegen 7 mm beträgt; der eingezogene, gleichsam überkippte Theil der Schale ist durch eine verhältnissmässig kurze Wölbung von dem übrigen Theile der Schale getrennt, welche auf den folgenden zwei Dritteln flach gewölbt, auf dem hintersten Drittel deutlich eingesenkt ist und ihre grösste Dicke auf dem vordersten Viertel erreicht; nach hinten wird sie weit flacher.

Die Skulptur besteht aus groben Anwachsrunzeln, welche in der Nähe des Wirbels kaum 0,3 mm, im Alter aber bis zu 1 mm von Mitte zu Mitte von einander entfernt sind; sie sind meistens etwas breiter, als ihre Zwischenräume, welche sich nach hinten zu verflachen und an der erwähnten Einsenkung grossentheils verschwinden, so dass auf dieser nur wenige breite Furchen, beziehentlich Anschwellungen sichtbar sind.

Auf dem Figur 20 abgebildeten Steinkern sind die Muskeleindrücke, sowie auch der Manteleindruck und die kleine Mantelbucht recht scharf zu erkennen.

Die linken Schalen, welche vermuthlich zu unserer Art gehören, haben bis zu 9 mm Breite, reichlich 6 mm Höhe und gegen 4 mm Dicke der Wölbung.

Die grösste Dicke liegt vor der Mitte der Schale, welche vorn sehr bauchig ist und zum vorderen Schlossrande steil abfällt. Dieser nimmt allmählich eine immer stärkere Krümmung an und geht so in den vorderen Schalrand über, welcher von dem wenig gebogenen unteren Schalenrand nicht scharf getrennt ist. Dieser stösst mit dem ziemlich stark gekrümmten hinteren Schalrande, welcher mit dem hinteren Schlossrande zusammenhängt, in einer stumpfen Ecke zusammen, von welcher eine stumpfe, wenig deutliche Kante nach dem Wirbel verläuft. Dieser ist klein, ragt sehr wenig hervor und ist im Ganzen ein wenig rückwärts gerichtet, mit seinem ersten Anfange aber doch etwas nach vorn; von dem vorderen Schalenrande ist er ziemlich eben so weit entfernt, wie von dem hinteren.

Die Skulptur besteht aus flachen, wenig deutlichen Anwachsfalten, welche auf dem hinteren Theile der Schale erst von einem stärkeren Absatze über dem unteren Rande an ganz unregelmässig werden, auf der vorderen Hälfte dagegen auch in der Jugend schon recht verschieden breit sind.

Das Schloss habe ich an keiner Schale beobachten können.

Vielleicht gehören zu einer anderen Art ein Paar verdrückte und stärker abgenutzte rechte Schalen, welche weniger ungleichseitig zu sein scheinen, und deren Anwachsrippen auch im Alter nur etwa 0,3 bis 0,4 mm von Mitte zu Mitte von einander entfernt sind.

Tellina phylloïdes v. Koenen.

Tafel IV, Figur 14; 15.

Ausser einigen ungenügend erhaltenen Steinkernen aus dem Sandstein und einigen Bruchstücken liegen nur die ziemlich vollständige, Fig. 14 abgebildete linke Klappe und das Fig. 15 abgebildete Exemplar vor, welches einen grossen Theil der Mantelbucht erkennen lässt. Die erstere ist 20 mm breit, 12 mm hoch und gegen 3 mm dick gewölbt. An dem kleinen, sehr wenig hervorragenden Wirbel, welcher ziemlich in der Mitte der Schale liegt, bilden die Wirbelkanten einen Winkel von ca. 145 Grad. Vorn weicht der Schalrand erst nahe dem vorderen Ende von der Richtung des vorderen Schlossrandes stärker ab und biegt sich dann ziemlich kurz zu dem unteren Schalrande um, welcher grösstentheils nur flach gekrümmt ist und sich erst nahe dem hinteren Ende ziemlich schnell in die Höhe zum hinteren Schalrande biegt; dieser nimmt nach oben bald eine flachere Krümmung an und geht allmählich in den hinteren Schlossrand über. Hinten ist also die Schale merklich höher, als vorn, und zugleich etwas nach unten gleichsam verlängert, so dass von hier auch eine deutlichere Wölbung nach dem Wirbel verläuft, noch deutlicher, als vorn, während sonst die Schale recht flach gewölbt ist. Sie ist ziemlich dünn und lässt nur sehr feine, unregelmässige Anwachsstreifen erkennen.

Die Mantelbucht reicht etwa bis zur Mitte der Schale unterhalb des Wirbels; ausserdem lässt die Innenseite der rechten Klappe noch eine Grube für einen vorderen Seitenzahn der linken Klappe erkennen.

Psammobia? auriformis v. Koenen.

Tafel IV, Figur 17; 18.

Ausser einigen Bruchstücken habe ich aus dem Kalk und Kalksandstein die beiden abgebildeten rechten Klappen herauslösen können, von welchen die grössere 10,5 mm hoch, 17,5 mm breit und ca. 2,5 mm dick, die kleinere 8 mm hoch, 13 mm breit und höchstens 2 mm dick gewölbt ist. Die vordere Seite der Schale ist um reichlich 1 mm länger, als die hintere; an dem kleinen, nur wenig hervorragenden Wirbel bilden die Wirbelkanten einen Winkel von fast 160 Grad und biegen sich vorn sehr allmählich nach unten, hinten erheblich schneller, wo der Schlossrand dann in sehr breitem, gleichmässigem Bogen in den hinteren Schalrand und weiter in den unteren Schalenrand übergeht. Dieser nimmt schnell eine weit geringere Krümmung an, hebt sich aber auf seiner vorderen Hälfte allmählich immer mehr, so dass die Schale vorn ziemlich symmetrisch gekrümmt ist und mit einem weit kürzeren Bogen endigt, als hinten. Die Wölbung ist ziemlich gleichmässig, doch natürlich in der Nähe des Wirbels und Schlossrandes stärker, als weiter nach unten. Das kleinere Exemplar lässt auf dem unteren Theile der sehr dünnen Schale sehr feine, regelmässige Anwachsstreifen erkennen, welche nur etwa 0,1 mm von einander entfernt sind, und hinter dem Wirbel Schalenreste, welche von dem Ligamentträger herrühren könnten, allerdings das einzige Merkmal, dass unsere Art wirklich zu der Gattung Psammobia gehört. Im Uebrigen hat unsere Art einige Aehnlichkeit mit Formen wie Lavignon minuta d'Orb. (Paléont. franç. Lamellibr. Crét. pl. 377 f. 1—4).

Pholadomya cf. elongata v. Münster.

Es liegt mir aus dem bräunlichen Kalksandstein nur der recht unvollständige Steinkern eines etwas verdrückten, doppelklappigen Exemplares vor, welches mindestens 40 mm breit und 20 mm hoch gewesen ist und in der Gestalt an Ph. elongata v. Münster (Goldfuss Petref. Germ. II S. 270 taf. 157 f. 3) erinnert, flache, unregelmässige Anwachsrunzeln trägt, sowie auf dem Haupttheile auch dünne, nicht ganz regelmässige Radialrippen besitzt, nicht aber auf dem vorderen und dem hintersten Theile der Schale; die von d'Orbigny (Paléontologie française, Lamellibr. crétacés pl. 362) als Ph. elongata Münster abgebildeten Typen haben wohl stärkere Rippen und sind namentlich nach hinten-unten verlängert. Hierdurch weichen sie auch erheblich von der neuerdings von Maas (Zeitschrift der deutsch. geol. Gesellsch. 1895 S. 279 Taf. 9 f. 1. 2) als Ph. elongata Münster angeführten Formen aus dem Gault-Sandstein ab.

Lingula cf. truncata Sow.

Tafel IV, Fig. 24 a, b.

In dem grauen Kalksandstein fand sich ein einziges Stück, welches am Stirnrand etwas verdrückt und des grössten Theiles der Schale beraubt ist; die Länge der flach gewölbten Schale beträgt 8 mm, die Breite knapp 5 mm. Die grösste Breite liegt unterhalb der Mitte, und von hier konvergiren die Seitenränder nach dem Wirbel zu bis zum obersten Viertel nur schwach, dann aber schneller; nach dem Stirnrande zu nimmt die Krümmung der Seitenränder schneller zu, und der Stirnrand selbst ist höchstens in einer Breite von 2 mm etwas abgestutzt, aber nicht schärfer von den Seitenrändern getrennt. Die Wirbelränder bilden einen Winkel von ca. 120 Grad. Mit Hülfe der Loupe erkennt man auf der Oberfläche der Schale flache, unregelmässige Anwachsfalten.

Unser Stück ist wohl verwandt der L. truncata Sow aus dem Neokom (Davidson, Brit. Cretaceous Brachiop. S. 6 Taf. I f. 27, 28, 31), aber zu einer entscheidenden Vergleichung nicht genügend erhalten.

Discina sp.

Tafel IV, Figur 25.

Eine Schale von 8,5 mm Durchmesser und gegen 2 mm Höhe ist auf einer Seite beschädigt und überall mehr oder minder stark angewittert oder abgenutzt, doch lassen die Anwachsringe noch erkennen, dass der Umfang annähernd kreisförmig war, und dass der Wirbel ziemlich in der Mitte der Schale liegt.

Serpula octangula v. Koenen.

Tafel IV, Figur 26 a, b.

Beim Zerschlagen der harten Kalke wurden mehrere Exemplare einer schwach gekrümmten Serpula angetroffen, aber fast durchweg nur als Steinkerne; nur bei dem abgebildeten Bruchstück gelang es, die Oberfläche der Schale grösstentheils frei zu legen. Dasselbe ist 18 mm lang, zuerst 3,5 mm und zuletzt ca. 4 mm dick, und auf seiner ersten Hälfte etwas stärker gekrümmt, als auf seiner letzten, wo die Krümmung recht gering ist.

Der innere Durchmesser beträgt zuerst 1,5 mm, zuletzt 2,5 resp. 3 mm, ist hier also nicht gang kreisrund. Aussen trägt die Röhre in ungleichen Abständen 8 stumpf-kantige Längsrippen, deren Zwischenräume meist eben oder flach eingesenkt sind, zum Theil aber auch flache Rinnen bilden.

Die Rippen tragen flache, rundliche Körner, welche von Mitte zu Mitte etwa 0,5 bis 0,6 mm von einander entfernt sind, und die Körner sind meist durch flache, rundliche Anwachsstreifen mit einander verbunden, welche indessen ziemlich unregelmässig verlaufen und zuweilen in den Zwischenräumen durch einige Anschwellungen oder flache Höcker vertreten werden.

Verzeichniss der beschriebenen Arten.

1.	Pulchellia gibbosula v. K.	Seite 9.	Taf. I	Fig. 5.		
2.	P. perovalis v. K.	„ 10.	„ I	„ 3;	Taf. II f. 6.	
3.	Neoptychites? lentiformis v. K.	„ 11.	„ II	„ 1, 4, 7.		
4.	N.? Wohltmanni v. K.	„ 13.	„ I	„ 2;	„ II „ 3, 9.	
5.	N.? ingens v. K.	„ 12.	„ I	„ 4;	„ II „ 5, 8.	
6.	Acanthoceras n. sp.?	„ 14.				
7.	Natica cf. cretacea Goldf.	„ 14.				
8.	N. sp. ind.	„ 14.				
9.	Turritella gemmulifera v. K.	„ 15.	„ III	„ 1.		
10.	T. Kamerunensis v. K.	„ 15.	„ III	„ 2.		
11.	Nerita multigranosa v. K.	„ 16.	„ III	„ 3, 4.		
12.	Xenophora sp. ind.	„ 17.	„ III	„ 5.		
13.	Ostrea sp. ind.	„ 17.	„ III	„ 11.		
14.	Gryphaea sp. juv.	„ 18.	„ III	„ 12.		
15.	Exogyra sp.	„ 18.				
16.	E. auriformis v. K.	„ 18.	„ III	„ 10.		
17.	Anomia laevigata Sow?	„ 19.	„ III	„ 13.		
18.	Pecten Kamerunensis v. K.	„ 20.	„ III	„ 14, 15.		
19.	P. productus v. K.	„ 20.	„ III	„ 17.		
20.	Plicatula rugulosa v. K.	„ 21.	„ III	„ 7, 8.		
21.	P. cf. placunea Lam.	„ 21.	„ III	„ 9.		
22.	P. multiplicata v. K.	„ 22.	„ III	„ 6.		
23.	Lima Mungoensis v. K.	„ 23.	„ III	„ 16.		
24.	L. reniformis v. K.	„ 23.	„ III	„ 20.		
25.	L. dilatata v. K.	„ 24.	„ III	„ 18.		
26.	L. perplana v. K.	„ 24.	„ I	„ 1;	Taf. III f. 19.	
27.	Inoceramus? sp. ind.	„ 25.	„ III	„ 21.		
28.	Modiola plicifera v. K.	„ 26.	„ II	„ 2.		
29.	Lithodomus inflexus v. K.	„ 27.	„ III	„ 30.		
30.	Septifer? convolutus v. K.	„ 27.	„ III	„ 22; 23.		

31. Pinna latissima v. K.	Seite	28.	Taf.	III	Fig.	25.
32. Arca semiglabra v. K.	„	29.	„	III	„	28; 29.
33. A. cardiformis v. K.	„	30.	„	III	„	27.
34. Leda cultellus v. K.	„	31.	„	III	„	24.
35. L. sp. ind.	„	32.	„	III	„	26.
36. Lucina sp. ind.	„	32.	„	IV	„	4.
37. Cardium perobliquum v. K.	„	33.	„	IV	„	3.
38. Astarte tecticosta v. K.	„	34.	„	IV	„	7.
39. Astarte? trigonella v. K.	„	34.	„	IV	„	1.
40. Cardita sphaericula v. K.	„	35.	„	IV	„	2.
41. Cytherea Wohltmanni v. K.	„	36.	„	IV	„	8; 9.
42. C. corbuloides v. K.	„	37.	„	IV	„	10.
43. C. n. sp.?	„	38.	„	IV	„	5.
44. C. cf. plana Low.	„	39.	„	IV	„	11.
45. C. tenuidentata v. K.	„	40.	„	IV	„	12.
46. C.? sp. ind.	„	41.	„	IV	„	13.
47. C. sp. ind.	„	41.	„	IV	„	16.
48. Liopistha ventricosa v. K.	„	42.	„	IV	„	22; 23.
49. Corbula incurvata v. K.	„	43.	„	IV	„	19; 20; 21.
50. Tellina phylloides v. K.	„	44.	„	IV	„	14; 15.
51. Psammobia? auriformis v. K.	„	45.	„	IV	„	17; 18.
52. Pholadomya cf. elongata v. Münster	„	45.				
53. Lingula cf. truncata Sow.	„	46.	„	IV	„	24.
54. Discina sp. ind.	„	46.	„	IV	„	25.
55. Serpula octangula v. K.	„	46.	„	IV	„	26.

Tafel I.

Figur 1.	Lima perplana v. Koenen. Vergl. Taf. III, fig. 19 a, b.	Seite 24.
Figur 2.	Neoptychites? Wohltmanni v. Koenen. Vergl. Taf. II, fig. 3 nnd 9.	„ 12.
Figur 3.	Pulchellia perovalis v. Koenen. Vergl. Tafel II, Fig. 6.	„ 10.
Figur 4.	Neoptychites? ingens v. Koenen. Vergl. Tafel II, Fig. 5 und 8.	„ 12.
Figur 5 a, b, c.	Pulchellia? gibbosula v. Koenen.	„ 9.

Tafel II.

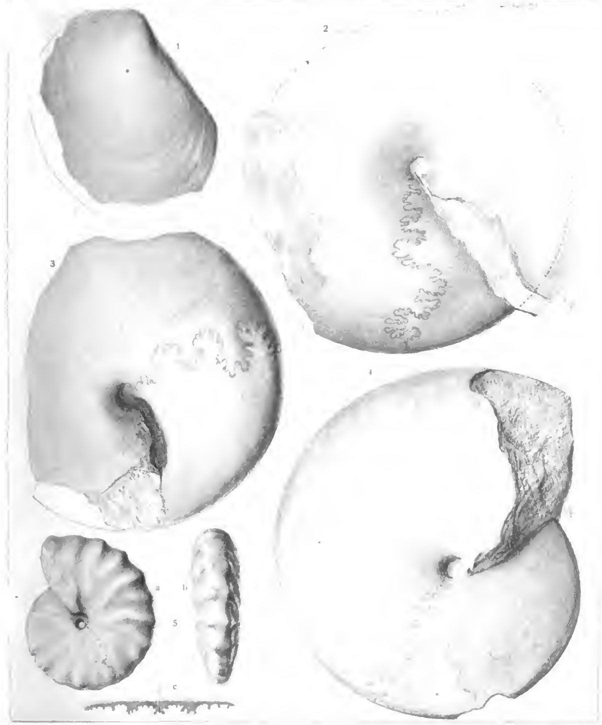
Figur 1; 4; 7.	Neoptychites? lentiformis v. Koenen.	Seite 11.
Figur 2.	Modiola plicifera v. Koenen.	„ 26.
Figur 3; 9.	Neoptychites? Wohltmanni v. Koenen. Vergl. Taf. I, fig. 2.	„ 13.
Figur 5; 8.	Neoptychites? ingens v. Koenen. Vergl. Taf. I, fig. 4.	„ 12.
Figur 6.	Pulchellia perovalis v. Koenen. Vergl. Tafel I, fig. 3.	„ 10.

Tafel III.

Figur 1 a, b. Turritella gemmulifera v. Koenen (1 b vergrössert). Seite 15.
Figur 2 a, b. Turritella Kamerunensis v. Koenen (2 b vergrössert). „ 15.
Figur 3 a, b, c; 4 a, b. Nerita multigranosa v. Koenen (3 b, c; 4 b vergrössert). „ 16
Figur 5 a, b. Xenophora sp. ind. (5 b vergrössert). „ 17.
Figur 6 Plicatula multiplicata v. Koenen. „ 22.
Figur 7; 8 a, b. Plicatula rugulosa v. Koenen (10 b vergrössert). „ 21.
Figur 9. Plicatula cf. placunea Lam. „ 21.
Figur 10 a, b. Exogyra auriformis v. Koenen. „ 18.
Figur 11. Ostrea sp. ind. „ 17.
Figur 12 a, b, c. Gryphaea sp. ind. juv. (12 b, c vergrössert). „ 18.
Figur 13. Anomia laevigata Sow. „ 19.
Figur 14 a, b; 15 a, b. Pecten Kamerunensis v. Koenen (14 b; 15 b vergrössert). „ 20.
Figur 16. Lima Mungoensis v. Koenen. „ 23.
Figur 17 a, b. Pecten productus v. Koenen (17 b vergrössert). „ 20.
Figur 18 a, b. Lima dilatata v. Koenen (18 b vergrössert). „ 24.
Figur 19 a, b. Lima perplana v. Koenen (19 b vergrössert). Vergl. Taf. I f. 1. „ 24.
Figur 20 a, b. Lima reniformis v. Koenen (20 b vergrössert). „ 23.
Figur 21. Inoceramus? sp. ind. „ 25.
Figur 22 a, b; 23 a, b. Septifer convolutus v. Koenen (22 b; 23 b vergrössert). „ 27.
Figur 24 a, b, c. Leda cultellus v. Koenen (24 b, c vergrössert). „ 31.
Figur 25. Pinna latissima von Koenen. „ 28.
Figur 26 a, b. Leda sp. ind. (26 b vergrössert). „ 32.
Figur 27 a, b. Arca cardiformis v. Koenen (27 b vergrössert). „ 30.
Figur 28 a, b; 29 a, b. Arca semiglabra v. Koenen (28 b; 29 b vergrössert). „ 29.
Figur 30 a, b. Lithodomus inflexus v. Koenen (30 b vergrössert). „ 27.

Tafel IV.

Figur 1 a, b, c. Astarte (Goodallia?) trigonella v. Koenen (1 c vergrössert). Seite 34.
Figur 2 a, b. Cardita sphaericula v. Koenen (2 b vergrössert). „ 35.
Figur 3 a, b, c. Cardium perobliquum v. Koenen (3 b, c vergrössert). „ 33.
Figur 4 a, b. Lucina sp. ind. (4 b vergrössert). „ 32.
Figur 5. Cytherea n. sp.? „ 38.
Figur 6. Cytherea Wohltmanni v. Koenen var.? „ 36.
Figur 7 a, b. Astarte tecticosta v. Koenen (7 b vergrössert). „ 34.
Figur 8 a, b; 9. Cytherea Wohltmanni v. Koenen (7 b vergrössert). „ 36.
Figur 10 a, b. Cytherea corbuloïdes v. Koenen. „ 37.
Figur 11 a, b. Cytherea cf. plana Sow (11 b vergrössert). „ 39.
Figur 12 a, b. Cytherea tenuidentata v. Koenen. „ 40.
Figur 13. Cytherea? sp. ind. „ 41.
Figur 14; 15. Tellina phylloïdes v. Koenen. „ 44.
Figur 16. Cytherea? sp. ind. „ 41.
Figur 17; 18. Psammobia? auriformis v. Koenen. „ 45.
Figur 19 a, b, c; 20 a, b; 21 a, b. Corbula incurvata v. Koenen (20 b, c; 21 b; 22 b vergrössert). „ 43.
Figur 22; 23 a, b. Liopistha ventricosa v. Koenen (24 b vergrössert).. „ 42.
Figur 24 a, b. Lingula cf. truncata Sow (25 b vergrössert). „ 46.
Figur 25. Discina sp. ind. „ 46.
Figur 26 a, b. Serpula octangula v. Koenen (27 b vergrössert). „ 46.



Weidmannsche Buchhandlung in Berlin.



ABHANDLUNGEN
DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.
MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE.
NEUE FOLGE BAND 1. Nro. 2.

Theorie der kleinen Planeten.

Von

Martin Brendel.

Erster Teil.



Berlin.
Weidmannsche Buchhandlung.
1898.

Theorie der kleinen Planeten.

Von

Martin Brendel.

Erster Teil.

Vorgelegt in der Sitzung vom 31. Juli 1897 durch W. Schur.

Einleitung.

1. Die Zahl der Entdeckungen kleiner Planeten hat sich in den letzten Jahren ausserordentlich vermehrt, seitdem die von Herrn Max Wolf eingeführte photographische Methode Anwendung gefunden hat, und es wird heutzutage solchen Neuentdeckungen weit weniger Interesse entgegengebracht als in früheren Zeiten, wo dieselben noch verhältnissmässig selten waren. Die grosse Anzahl der bereits bekannten kleinen Planeten beginnt vielmehr die Astronomen in Verlegenheit zu setzen, da es immer schwieriger wird, den Bewegungen dieser vielen Himmelskörper rechnerisch zu folgen. Aus diesem Grunde hat man sogar davon sprechen hören, dass man den Planetenentdeckern anheim geben wolle, ihre Entdeckungen während einer längeren Zeit möglichst einzuschränken, um den Rechnern Gelegenheit zu geben, die Bahnen der bereits bekannten kleinen Planeten genauer festzulegen, ohne sie durch weitere Entdeckungen mit Rechnungsmaterial zu überhäufen.

Der Verfasser ist der Ansicht, dass es sehr verfehlt wäre, diesen Planetenentdeckungen Einhalt thun zu wollen; denn eine jede Beobachtung kann für die Zukunft von grosser Wichtigkeit werden, wenn sie auch im Augenblicke wertlos erscheint, und wir müssen sicherlich danach streben, unsere Kenntniss des Sonnensystems möglichst zu vervollkommnen. Wenn man Zweifel aussprechen hört an dem Werte der genannten Entdeckungen, so ist dies nur ein Anzeichen dafür, dass die Rechnung mit der Beobachtung nicht mehr gleichen Schritt halten kann. Dies hat aber seinen Grund nicht allein in der grossen Menge der neuentdeckten Planeten, sondern es sind thatsächlich die Fortschritte auf dem Gebiete der praktischen Störungsrechnung hinter denen der beobachtenden Astronomie zurückgeblieben, trotzdem auf dem Gebiete der Theorie, hauptsächlich in Schweden

und in Frankreich, die letzte Zeit eine grosse Reihe hervorragender Arbeiten zu verzeichnen hat. Doch haben bei der Complicirtheit des Problems die theoretischen Erfolge noch immer nicht rechte Früchte tragen können für die rechnende Astronomie.

Es erscheint daher als eine sehr dringliche Aufgabe, Methoden aufzustellen, mittels deren man den Bewegungen der zahlreichen kleinen Planeten rechnerisch folgen kann. Man wird von vornherein darauf verzichten müssen, die Coordinaten aller dieser Himmelskörper mit derselben Genauigkeit durch die Rechnung darzustellen, mit der man den Bewegungen der grossen Planeten folgt, denn das Arbeitsmaterial würde zu gross werden. Nur diejenigen der kleinen Planeten, die aus irgend einem Grunde ein specielleres Interesse verdienen, wird man mit aller erreichbaren Schärfe berechnen.

Es bieten sich demnach der rechnenden Astronomie in bezug auf die kleinen Planeten die folgenden beiden Aufgaben:

I. Ihre Coordinaten soweit genähert zu berechnen, dass man sie ohne Schwierigkeiten nach einem gewissen Zeitraum am Himmel wieder auffinden und die neuen Planeten von den bereits bekannten leicht unterscheiden kann.

II. Ihre Coordinaten innerhalb der Beobachtungsfehler darzustellen, wenn es sich um die Bestimmung irgend einer der Constanten unseres Sonnensystems oder um Fragen der Mechanik oder der Cosmogonie handelt.

Bei Bearbeitung der ersteren Aufgabe können offenbar die auszuführenden Störungsrechnungen sehr erheblich abgekürzt werden. Herr Berberich, dem die astronomische Welt für seine mühevolle Arbeit der Identificirung des grössten Teils der in den letzten Jahren neu beobachteten Planeten verpflichtet ist, hat gezeigt, dass man mit Hilfe der Photographie einen Planeten nach mehreren Jahren wieder auffinden kann, ohne überhaupt Störungen zu rechnen, indem man die elliptische Bewegung zu Grunde legt. Es wird indessen angezeigter sein, die Störungen soweit zu bestimmen, dass man den Planeten nach einem Zeitraum von 50 bis 100 Jahren mit dem Fernrohr ohne besondere Schwierigkeit wieder findet.

Die Pariser Académie des Sciences hatte für den Prix Damoiseau für das Jahr 1894 folgende Aufgabe gestellt:

„Perfectionner les méthodes de calcul des perturbations des petites planètes en se bornant à représenter leur position, à quelques minutes d'arc près, dans un intervalle de cinquante ans; construire ensuite des tables numériques permettant de déterminer rapidement les parties principales des perturbations“.

Es ist dies die erste der beiden eben genannten Aufgaben, mit der wir uns im Folgenden in erster Linie beschäftigen werden, und es ist die vorliegende Abhandlung im Wesentlichen eine weitere Ausarbeitung einer von der Akademie mit dem Preise gekrönten kürzeren Arbeit. Ich will aber die Grenzen noch etwas enger ziehen und versuchen, die geocentrischen Coordinaten der Planeten während eines Jahrhunderts im Allgemeinen innerhalb der Bogenminute darzustellen: und ferner will ich den Entwicklungen eine solche Allgemeinheit

geben, dass sie auch zur Lösung der zweiten Aufgabe als Grundlage dienen können.

Bei Bearbeitung der ersteren Aufgabe wird man Jupiter allein als störenden Körper berücksichtigen (wenn man einige vereinzelte kleine Planeten ausschliesst, welche von Seiten des Mars[1]) oder Saturns beträchtliche Störungen erleiden), und zwar wird man die Bewegung Jupiters als elliptisch ansehen.

Im zweiten Falle muss man ausser dem Einflusse Jupiters auch noch die anderen störenden Körper einführen, und man wird auch die wahre Bewegung der störenden Körper betrachten müssen, wie sie aus ihrer gegenseitigen Anziehung folgt.

Ich werde versuchen, beiden Aufgaben gerecht zu werden, indem ich mich einerseits auf die Betrachtung eines einzigen störenden Körpers (Jupiters) beschränke, da die Berücksichtigung mehrerer störender Körper keinen wesentlichen Unterschied in den Entwicklungen bedingt. Andererseits aber werde ich die Bewegung Jupiters, um die Allgemeinheit des Problems zu wahren, nicht von vornherein als elliptisch ansehen, sondern ich werde seine wahre Bewegung in die Entwicklungen einführen. Im weiteren Verlaufe sollen dann mit Rücksicht auf die erstere Aufgabe bedeutende Vereinfachungen vorgenommen werden, dadurch, dass ich die Bewegung Jupiters in die elliptische übergehen lasse.

2. Unsere Entwicklungen und Annäherungen werden nach Potenzen von gewissen Constanten fortschreiten, die den Excentricitäten und Neigungen in der elliptischen Bewegung analog, aber unabhängig von der störenden Masse sind; und zwar wird zunächst die Störungsfunktion nach Potenzen dieser Grössen entwickelt werden. Ich will jedes Glied, welches die n-te Potenz oder ein entsprechendes Produkt dieser Grössen als Faktor enthält, ein Glied **n-ten Grades** nennen, und bei der Entwicklung der Störungsfunktion die Glieder dritten Grades zunächst vernachlässigen. Bei der weitaus grössten Mehrzahl der kleinen Planeten wird diese Genauigkeit ausreichend sein, um ihre Coordinaten innerhalb der in der ersten Aufgabe gegebenen Grenzen darzustellen. Nur für diejenigen Planeten, deren Excentricität oder Neigung einen aussergewöhnlich hohen Betrag erreicht, ebenso wie für diejenigen, deren mittlere Bewegung sehr nahe in einem commensurablen niedrigzahligen Verhältniss zur mittleren Bewegung Jupiters steht, wird man eine weniger scharfe Darstellung erreichen. Doch wird es nicht schwierig sein, in diesen Fällen einige wichtigen Glieder dritten und vierten Grades nachzutragen. Ich werde demnach in den Differentialgleichungen für die Coordinaten des gestörten Körpers die Glieder dritten Grades (welche sämmtlich mit der störenden Masse multiplicirt sind) bei Seite lassen; dagegen werde ich in den Integralen (oder richtiger Lösungen) dieser Gleichungen, d. h. in den Ausdrücken für die Coordinaten, nicht durchweg alle Glieder höheren als zweiten Grades vernachlässigen; denn aus Gliedern, welche in den

1) Vgl. H. Lemke, Ueber die Mars- und Jupiterstörungen der kleinen Planeten vom Hebe-Typus. Inaugural-Dissertation, Berlin 1897.

Differentialgleichungen niederen als dritten Grades sind, können in den Integralen beträchtliche Glieder vom dritten und von höheren Graden durch den Integrationsprocess (Kapitel VI—VII) entstehen, namentlich, wenn die mittlere Bewegung des betreffenden Planeten sehr nahe in einem commensurablen Verhältniss zu derjenigen Jupiters steht.

3. Die Excentricitäten und Neigungen in der elliptischen Bewegung, nach deren Potenzen die Entwicklungen in den älteren Störungstheorieen fortschreiten, enthalten implicit die störende Masse; die Entwicklungen nach ihren Potenzen enthalten also schon implicit eine Entwicklung nach den Potenzen der störenden Masse, was bei uns nicht der Fall ist. Ausserdem wird auch in den älteren Theorieen im Allgemeinen nach den Potenzen der explicit auftretenden störenden Masse entwickelt. Diese Entwicklungen sind nun in vielen Fällen unbedingt divergent, wie von Gyldén und anderen gezeigt worden ist. Wir werden darum nicht in jedem Falle unsere Entwicklungen und Annäherungen nach den Potenzen der störenden Masse ordnen; dennoch will ich, der Uebersichtlichkeit halber, ein jedes Glied, das die n-te Potenz der störenden Masse enthält, als Glied **n-ter Ordnung** bezeichnen. Man kann in dieser Beziehung die Planeten in zwei Gruppen teilen:

I. Solche Planeten, deren mittlere Bewegung so beschaffen ist, dass ihr Verhältniss zu derjenigen Jupiters keinem (niedrigzahligen) Bruche sehr nahe kommt; in diesem Falle können die Annäherungen unbedenklich nach den Potenzen der störenden Masse geordnet werden; ich will diese Planeten **gewöhnliche** nennen.

II. Diejenigen Planeten, deren mittlere Bewegung sehr nahe commensurabel mit derjenigen Jupiters ist; wir nennen sie nach einer von Gyldén eingeführten Bezeichnungsweise **charakteristische** Planeten. Hier führen die Entwicklungen nach den Potenzen der störenden Masse langsam oder garnicht zum Ziele; ich werde daher bei diesen Planeten die wichtigen Störungsglieder höherer Ordnungen schon in der ersten Annäherung berücksichtigen. Diejenigen unter den charakteristischen Planeten, welche einem commensurablen Verhältniss in bezug auf die mittleren Bewegungen besonders nahe kommen, d. h. näher kommen als eine gewisse später zu bezeichnende untere Grenze, nenne ich **kritische** Planeten (in gewisser Analogie mit Gyldén's kritischen Gliedern); unter ihnen sind diejenigen einbegriffen, welche jene Form der Bewegung zeigen, die man Libration genannt hat. Ob indessen im Systeme der kleinen Planeten wirklich Fälle von Libration vorkommen, kann erst nach Abschluss der auszuführenden Rechnungen entschieden werden.

4. Die Methode, welche ich anwende, hat als Grundlage die Untersuchungen, welche Gyldén in seiner schönen Theorie der absoluten Bahnen gegeben hat, und ich habe den Störungen im Wesentlichen dieselbe Form gegeben wie er. Gyldén hat sich allerdings als Hauptziel eine Darstellung der Planetenbewegungen gesetzt, welche für einen unbegrenzten Zeitraum giltig sein und es daher auch erlauben soll, über die Stabilität des Systems zu entscheiden; wir

wollen uns vorläufig nur vornehmen, die Coordinaten des gestörten Körpers während eines beschränkten, wenn auch ziemlich langen Zeitraums (eines Jahrhunderts) darzustellen, und deshalb können wir uns viele Umänderungen und Vereinfachungen gestatten, die zwar die unbeschränkte Convergenz unseres Verfahrens in Frage stellen, aber für die praktische Rechnung von bedeutendem Vorteil sind.

Es sei noch besonders hervorgehoben, dass unsere Methode auch für die charakteristischen und kritischen Planeten anwendbar ist, und dass sie es auch ermöglicht, die Fälle zu behandeln, in denen Libration stattfindet. Das Hauptprincip ist die strenge Anordnung der Annäherungen nach dem Grade der Glieder, nicht aber nach den Potenzen der störenden Masse. Die Grundzüge unserer Methode finden sich bereits in einer in schwedischer Sprache erschienenen Abhandlung[1]) und in meiner Dissertation[2]), wenn sie auch seitdem recht erhebliche Vereinfachungen erfahren hat. Ich will indessen hier eine vollständige Darstellung geben, und es vermeiden, den Leser auf die genannten Arbeiten zu verweisen.

5. Die unabhängige Veränderliche, welche ich nach dem Vorgange Gyldén's anwende, ist nicht die Zeit, sondern die wahre Länge des gestörten Planeten in seiner momentanen Bahnebene, die mit v bezeichnet wird. Ich habe mich überzeugt, dass dies Verfahren sehr bedeutende Vorteile mit sich bringt. Schon in der elliptischen Bewegung drückt man den Radiusvektor als Funktion der Länge aus; denn wenn man ihn als explicite Funktion der Zeit darstellen will, so erhält man einen sehr complicirten Ausdruck, der sich nur durch eine unendliche Reihe geben lässt, die nach Potenzen der Excentricität fortschreitet; führt man nun aber in die Differentialgleichung des Radiusvektors in der gestörten Bewegung die Zeit als unabhängige Veränderliche ein[3]), so erhält man in dieser Gleichung eine ebensolche unendliche Reihe, welche nach den Potenzen der Excentricität fortschreitet, und deren Glieder nicht mit der störenden Masse multiplicirt sind; vernachlässigt man dann, von einer gewissen Potenz der Excentricität an, die Glieder dieser Reihe, so vernachlässigt man Glieder, die man sonst in der ungestörten Bewegung berücksichtigt; wenn auch bei geringen Excentricitäten diese Glieder sehr klein sein können, so bringt doch ein solches Verfahren erhebliche Nachteile mit sich. In den älteren Methoden drückt man auch thatsächlich den Radiusvektor durch die Gleichung

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v-\pi)}$$

als Funktion von v aus, und giebt dann allerdings gewöhnlich $e\cos\pi$ und $e\sin\pi$

1) Om användningen af den absoluta störingsteorien etc. Astronomiska Jakttagelser och Undersökningar anstälda på Stockholms Observatorium. Utgifna af H. Gyldén. Band IV Heft 3.

2) Ueber die Anwendung der Gyldén'schen absoluten Störungstheorie etc. Berlin-Göttingen 1890.

3) Backlund, Ueber die Bewegung einer gewissen Gruppe der kleinen Planeten. Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg, VII. Série. Tome XXXVIII No. 11.

als Funktionen der Zeit, oder man fügt dem angeführten Ausdruck einen Faktor hinzu, der die Störungen des Radiusvektors als Funktionen der Zeit enthält. Gegen ein solches Verfahren lässt sich Nichts einwenden. Am vorteilhaftesten habe ich gefunden, einige der auftretenden Funktionen durch v, andere durch die Zeit auszudrücken; um jedoch die Integrationen nicht unnütz zu compliciren, habe ich zunächst überall v als unabhängige Veränderliche beibehalten und ersetze dann da, wo es angemessen erscheint, v durch die Zeit. Auch nimmt die Gyldén'sche Entwicklung der Störungsfunktion, die nach diesem Princip ausgeführt ist, eine sehr symmetrische Form an.

In seinem Werke „Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste“ macht Herr Poincaré[1]) einige Bemerkungen über den Gebrauch von v als unabhängiger Veränderlicher. Er sagt, die wahre Länge v' des störenden Körpers, welche in der Störungsfunktion auftritt, sei eine bekannte Funktion der Zeit, aber eine unbekannte Funktion von v; bei Ersetzung von v' durch v führe man also noch unbekannte Grössen ein, was man nicht thäte, wenn man v' durch die Zeit ersetzt. Indessen enthält die Störungsfunktion nicht nur v', sondern auch v, und vor allem die Differenz $v-v'$. Vermeidet man, v' selbst durch noch unbekannte Grössen auszudrücken, so findet man dieselben an anderer Stelle wieder, und die Differenz $v-v'$ enthält stets solche unbekannten Grössen, wie man sie auch transformiren möge.

6. Im vorliegenden ersten Teile werde ich die Grundformeln für die Bewegung des gestörten Planeten geben und die Differentialgleichungen seiner Coordinaten integriren, d. h. die Relationen zwischen den heliocentrischen Coordinaten und der Zeit herstellen. Da wir als unabhängige Veränderliche die wahre Länge v einführen, so werden wir den Radiusvektor des Planeten, seine Breite über der Fundamentalebene und die Zeit als Funktion von v erhalten, und um die Coordinaten direkt als Funktion der Zeit darzustellen, ist noch eine unschwer auszuführende Transformation erforderlich, die ich im zweiten Teile zu geben beabsichtige.

Zur leichteren Orientirung habe ich der Arbeit ein ausführliches Inhaltsverzeichniss beigegeben.

Die Ausdrücke für die Coordinaten, die ich in diesem Teile ableite, sind so beschaffen, dass sie nach Potenzen der erwähnten mit den Excentricitäten und Neigungen vergleichbaren Grössen fortschreiten und dass ihre Coefficienten im Uebrigen nur von der mittleren Bewegung des gestörten Planeten abhängig sind und also mit derselben als Argument tabulirt werden können. Die zur Herstellung solcher allgemeinen Tafeln nötigen Rechnungen sind für die Planeten, deren mittlere Bewegungen zwischen 700″ und 1200″ liegen, bereits im Gange, und ich hoffe sie dem zweiten Teile einverleiben zu können; aus ihnen können die Störungsglieder für einen beliebigen Planeten direkt entnommen werden.

Begreiflicherweise kann ich im Folgenden die Formeln für die charakteri-

1) Tome II pag. 204.

stischen Planeten nicht in solcher Ausführlichkeit geben wie für die gewöhnlichen; denn je mehr ein Planet sich der strengen Commensurabilität nähert, desto mehr Glieder müssen berücksichtigt werden, und desto mehr Einfluss gewinnt der Betrag der Excentricität und der Neigung auf die Entwicklungen. Ich werde darum für die charakteristischen Planeten die Entwicklungen nur bis zu Gliedern niederen Grades vollständig geben, jedoch so, dass der weitere Gang der Rechnung ohne Schwierigkeiten zu übersehen ist. Aus dem genannten Grunde lassen sich die charakteristischen (oder wenigstens die kritischen) Planeten auch nicht ohne Weiteres in die zu berechnenden allgemeinen Tafeln aufnehmen, und es empfiehlt sich mehr, sie einzeln zu berechnen. Dennoch werde ich bestrebt sein, die Lücken, welche unsere Tafeln in der Nähe der Commensurabilitäten zunächst zeigen werden, auszufüllen, wenn dies auch der wenigen Planeten wegen, welche sich dort befinden, nicht lohnend erscheinen mag. Es ist aber von hohem Interesse, eine Uebersicht zu gewinnen, wie fictive Planeten sich an diesen Stellen verhalten würden; und es ist das Endziel unserer Arbeit, beurteilen zu können, wie jeder beliebige kleine Planet sich bewegen würde, der sich in dieser Zone befinden kann.

Im zweiten Teile soll von der numerischen Anwendung der im ersten gegebenen Entwicklungen die Rede sein und von der Herstellung der genannten allgemeinen Tafeln. Des weiteren soll der zweite Teil von der Bearbeitung der einzelnen Planeten handeln, d. h. also:

Von der Bestimmung der Bahnelemente aus den Beobachtungen mit Berücksichtigung der Störungen;

Von der Herstellung kurzgefasster Tafeln für die einzelnen Planeten, aus denen entweder die jeweiligen osculirenden oder analoge (instantane) Elemente entnommen werden können; diese Tafeln, welche auf einen Zeitraum von je hundert Jahren ausgedehnt werden sollen, werden für je einen Planeten den Raum von zwei Quartseiten voraussichtlich nicht übersteigen. Für den Planeten (91) Aegina sind sie bereits berechnet;

Endlich von der Verbesserung der Bahnelemente und der genannten Tafelwerte aus den gefundenen Differenzen „Beobachtung—Rechnung", worin auch die im sechsten Kapitel dieses ersten Teils erwähnte seculare Variation der Elemente einbegriffen ist.

7. Man wird vielleicht in dieser Arbeit Untersuchungen darüber vermissen, ob die angewandten Reihenentwicklungen und Annäherungsverfahren in streng mathematischem Sinne convergent sind. Ich bin aus begreiflichen Gründen in dieser Frage einstweilen nicht zu abschliessenden Resultaten gelangt, und habe mich mit der Thatsache begnügt, dass sie für die praktische Lösung unserer Aufgabe brauchbar sind, wie aus den wertvollen Untersuchungen des Herrn Poincaré folgt, soweit es nicht im Folgenden selbst bewiesen ist. Meine Bemühungen waren darauf gerichtet, mit einer gewissen mathematischen Strenge — zu der ich die Anregung Herrn Poincaré's wertvollem Werk [1]) verdanke —,

1) Poincaré, Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste.

vorzugehen, indem ich wenigstens die Vorbedingungen für die Brauchbarkeit unserer Methode festgestellt, und es vermieden habe, den Ausdruck Convergenz da zu brauchen, wo seine Berechtigung nicht nachgewiesen ist.

Damit stelle ich mich auch nicht auf den Standpunkt, den nach Herrn Poincaré die Astronomen im Allgemeinen einnehmen; es wäre zweckmässig, dass man sich stets des Ausdrucks fallende (und zwar stark oder schwach fallende) und steigende Reihen bediente, wenn es sich um asymptotische oder endliche Reihen handelt. Bei uns treten nämlich (Kap. VII § 4) u. a. steigende endliche Reihen auf, und auch die asymptotischen Reihen reduciren sich in der Praxis auf endliche, die die betreffende Funktion genähert darstellen.

8. In der längeren Reihe von Jahren, während der die vorliegende Arbeit entstanden ist, habe ich Gelegenheit gehabt, Ratschläge, die mir von vielen Seiten freundlichst erteilt wurden, zu befolgen, und aus dem Verkehr mit befreundeten Astronomen Nutzen zu ziehen.

In allererster Linie schulde ich meinem unvergesslichen Lehrer Gyldén ein dankbares Andenken. Vom September 1885 bis zum Mai 1888 habe ich, mit nur 7-monatlicher Unterbrechung im Jahre 1887, in Stockholm unter seiner Leitung studirt. Ihm verdanke ich die Anregung zur vorliegenden Abhandlung, wenn ich auch in den Jahren seit 1890, in denen diese Arbeit die gegenwärtige Form erhalten hat, mehr und mehr den praktischen Zielen der Störungsrechnung gefolgt und häufig nicht unerheblich von den von Gyldén eingeschlagenen Wegen abgewichen bin.

Ich kann nicht unterlassen, zu erwähnen, dass über dieser Arbeit insofern ein trauriges Schicksal gewaltet hat, als ich während der Abfassung derselben den Tod dreier Männer zu beklagen hatte, die ihr nahe gestanden und ein lebhaftes Interesse für sie bekundet haben. Am 24. Mai 1895 starb Hans Masal im Alter von nur 28 Jahren, mit dem ich in Stockholm gemeinsam gearbeitet und oft die Pläne meiner Arbeiten besprochen habe. Am 20. Oktober 1896 starb Tisserand, dem ich nicht nur für Erteilung wertvoller Ratschläge zur grössten Dankbarkeit verpflichtet bin, sondern auch für das Interesse, dass er mir in jeder Beziehung entgegenbrachte. Endlich am 9. November 1896 starb Gyldén.

Den Herren Bohlin und Callandreau verdanke ich ebenfalls manchen Gedanken, der für die Ausführung meines Planes von Wichtigkeit geworden ist; ersterer hat inzwischen eine sehr interessante Abhandlung[1]) veröffentlicht, die einen ähnlichen Zweck verfolgt, in der aber andere Methoden zur Anwendung kommen, so dass eine Vergleichung der auf beiden verschiedenen Wegen gewonnenen Resultate nicht nur eine wertvolle Controlle bietet, sondern auch in mancher anderen Hinsicht zu wichtigen Schlüssen führen dürfte.

Bei der Berechnung der im Folgenden erwähnten allgemeinen Tafeln hat

1) Karl Bohlin, Formeln und Tafeln zur gruppenweisen Berechnung der allgemeinen Störungen benachbarter Planeten. Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Upsala 1895—96.

mir Herr Wellmann, zuerst auf Veranlassung von Herrn Förster und dann auf Veranlassung von Herrn Bauschinger, Hilfe geleistet; der letztere, der mir auch sonst in dieser Angelegenheit freundlich entgegenkam, hat gleich nach der Uebernahme des Direktorats des astronomischen Recheninstituts die Organisation[1]) der Bearbeitung der kleinen Planeten in einer Weise in die Hand genommen, die die besten Aussichten auf Erfolg bietet.

Endlich hat Herr Schur die Freundlichkeit gehabt, die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen dafür zu gewinnen, dass sie die vorliegende Arbeit in ihre Abhandlungen aufnahm, was deswegen für mich von besonderem Wert war, weil ich nach längeren vergeblichen Bemühungen, eine Gelegenheit für den Druck derselben in Deutschland zu finden, schon vollständig ratlos war.

Allen diesen Herren, sowie der genannten Gesellschaft, sage ich meinen wärmsten Dank.

Erstes Kapitel.

Die Grundprincipien der Gyldén'schen Störungstheorie. — Die allgemeine Form der Differentialgleichungen und ihrer Integrale. — Die Gyldén'schen Coordinaten ϱ, η und S.

1. Ich will nun die Grundlagen besprechen, auf denen unsere Methode beruht und werde dabei Gelegenheit haben, auf die Hauptpunkte der Gyldén'schen Störungstheorie einzugehen. Seien:

x, y, z die Coordinaten des gestörten Körpers in bezug auf drei rechtwinklige Axen von unveränderlicher Richtung, deren Anfangspunkt in den Schwerpunkt der Sonne fällt,

r sein Radiusvektor,

m seine Masse in Teilen der Sonnenmasse, so dass also m eine absolute Zahl ohne Dimension ist,

x', y', z', r', m' die analogen Grössen in bezug auf den störenden Körper,

t die Zeit,

k^2 das Quadrat der Constante der Gravitation, also die Sonnenmasse, aus-

1) Bauschinger, Ueber die Bearbeitung der kleinen Planeten. Vierteljahrschrift der Astronomischen Gesellschaft. 31. Jahrgang (1896). IV. Heft pag. 284.

gedrückt in denselben Einheiten, die für die Entfernnngen und für die Zeit angenommen werden. Nehmen wir als Einheit für die Entfernungen denjenigen Wert für die halbe grosse Axe der Erdbahn, den Ganss benntzt hat, und als Einheit für die Zeit den mittleren Sonnentag, so ist $\log k^2 = 8.2355814 - 10$.

Bezeichnen wir endlich mit $M = k^2(1+m)$ die Summe der Massen der Sonne nnd des gestörten Körpers, so gelten die folgenden Differentialgleichungen für die Coordinaten des gestörten Körpers:

1)
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{Mx}{r^3} = M\frac{\partial\Omega}{dx}, \;{}^{1)}$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{My}{r^3} = M\frac{\partial\Omega}{dy},$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{Mz}{r^3} = M\frac{\partial\Omega}{dz},$$

wo die Störungsfnnktion Ω durch folgenden Ausdrnck gegeben ist:

$$\Omega = \frac{m'}{1+m}\left\{\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} - \frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right\}.$$

Dies sind die Gleichungen, welche wir zn lösen haben. Ihre rechten Seiten sind mnltiplicirt mit der störenden Masse m', ohne dass jedoch von vornherein angenommen werden könnte, dass sie auch stets mit dieser Masse an Grösse vergleichbar bleiben. Wenn es sich indessen, wie in vorliegender Arbeit, um die Berechnung der Störungen handelt, welche die kleinen Planeten dnrch die grossen erleiden, so können wir ans den Beobachtungen, wie ans analytischen Untersuchungen, schliessen, dass — wenigstens während eines beschränkten und zwar beträchtlich langen Zeitranmes — die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

I. Die Radienvektoren der störenden nnd des gestörten Planeten oscilliren um gewisse Mittelwerte, von denen sie böchstens nm Grössen abweichen, die mit den Excentricitäten der gegenwärtigen osculirenden Ellipsen verglichen werden können.

II. Dieselbe Bedingung für die Geschwindigkeiten der Planeten.

III. Die Differenzen zwischen den Radienvektoren der störenden und des gestörten Planeten und daher auch ihre gegenseitigen Entfernungen bleiben stets an Grösse vergleichbar mit den Radienvektoren selbst; es finden also keine bedentenden Annäherungen zwischen den einzelnen Körpern des Systems statt.

IV. Die momentanen Bahnebenen der störenden und des gestörten Körpers, d. h. die Ebenen, die dnrch den Radinsvektor nnd die augenblickliche Bewegungsrichtnng (die Tangente an die Bahn) bestimmt sind, bilden unter sich Win-

1) Ich bediene mich bei Darstellung partieller Differentialquotienten stets dieser Schreibweise, da in der That das im Nenner stehende Differential ein totales ist, und man auf diese Weise sich leichter gegen Fehler schützen kann.

kel, welche stets mit den gegenseitigen Neigungen der gegenwärtigen osculirenden Ellipsen vergleichbar bleiben. Hierdurch schliessen wir auch den Fall einer rückläufigen Bewegung aus.

2. So lange diese Voraussetzungen erfüllt sind, sind die rechten Seiten der Gleichungen 1) nicht nur klein von der Ordnung der störenden Masse, sondern sie können auch in Reihen entwickelt werden, die nach Potenzen von Grössen fortschreiten, welche von der Ordnung der genannten Excentricitäten und Neigungen sind. Dieses sind die Gesichtspunkte, welche den Weg angezeigt haben für die praktische Lösung des Dreikörperproblems nach den älteren Methoden. Man hat in der ersten Annäherung die rechten Seiten der Gleichungen 1) vernachlässigt, woraus sich die elliptische Bewegung ergab, und hat die Glieder, welche man bei späterer Berücksichtigung dieser rechten Seiten erhält, „Störungen" genannt. Die successiven Annäherungen, welche man auf diese Weise erhielt, schreiten nach den Potenzen der störenden Masse m' fort; aber nicht eigentlich nach den reinen Potenzen dieser Masse, sondern in Wahrheit nach solchen der Störungen selbst. Da nun aber diese Störungen in vielen Fällen beträchtlich grösser sind als die störende Masse, so wird dieses Verfahren häufig unbrauchbar. Es werden nämlich die Störungen durch Reihen dargestellt, deren Glieder in die folgenden drei Gruppen zerfallen:

I. Die secularen Glieder: dieselben sind Grössen von der Ordnung der störenden Masse multiplicirt mit der Zeit t, oder Potenzen solcher Grössen. Wenn es auch wahrscheinlich ist, dass bei richtiger Anordnung der Annäherungen die Reihen, welche diese Glieder bilden, convergent bleiben, so kann doch nur für beschränkte Werte von t ihre Convergenz hinreichend stark sein, um sie praktisch verwertbar zu machen. Sichere Schlüsse über den Verlauf der Planetenbewegungen während eines unbeschränkten Zeitraumes werden sich mit ihrer Hilfe schwerlich ziehen lassen.

II. Die sogenannten langperiodischen Ungleichheiten; dieselben treten auf, wenn das Verhältniss der mittleren Bewegungen des störenden und des gestörten Körpers sich einem commensurablen Verhältniss nähert, in welchem Falle die betreffenden Glieder durch den Integrationsprocess sehr kleine Divisoren erhalten und beträchtlich gross werden. Wenn auch diese Glieder eine gewisse obere Grenze nicht überschreiten, so tritt doch der Fall ein, dass die Reihen, welche sich aus ihnen zusammensetzen, überhaupt erst bei einem späteren Gliede anfangen zu fallen. Infolge dessen führen die ersten Annäherungen zu illusorischen Resultaten und bei nicht streng richtiger Anordnung der Entwicklungen wird man divergente Reihen erhalten.

III. Die gewöhnlichen Glieder, d. h. die periodischen Glieder, deren absolute Werte mit der störenden Masse numerisch vergleichbar sind; durch ihr Auftreten wird die Brauchbarkeit des Näherungsverfahrens nicht in Frage gestellt, so dass sie keine Schwierigkeiten bieten.

3. Die Unzuträglichkeiten, welche aus den Entwicklungen nach den Gliedern



der beiden ersten Klassen entstehen, haben Gyldén veranlasst, neue Methoden aufzusuchen. Schon Lagrange und Laplace war es geglückt, die secularen Glieder in periodischer Form darzustellen, allerdings mit Vernachlässigung der Glieder vierten Grades in bezug auf die Excentricitäten und Neigungen; sie erhielten Glieder von ausserordentlich langen Perioden, die indessen nicht mehr die störende Masse als Faktor enthalten, sondern von der Ordnung der Excentricitäten und Neigungen selbst sind. Um die secularen Glieder in dieser periodischen Form darzustellen, hatte Lagrange die Gleichungen 1) integrirt, indem er bereits in der ersten Annäherung denjenigen Teil der rechten Seiten berücksichtigte, welcher secularer Natur ist. Hiermit hatte er bereits die Keppler'sche Ellipse als Grundlage für die Annäherungen verlassen, und sich der wahren Form der Planetenbahnen genähert. Gyldén hat sich vorgenommen, das Auftreten secularer Glieder in den Integralen der Gleichungen 1) vollständig zu vermeiden, und zu diesem Zweck führt er Glieder ein, die den von Lagrange gefundenen analog sind, und die er elementare Glieder nennt. Die absolute Bahn Gyldén's ist eine Bahn, die man erhält, indem man die Gleichungen 1) mit Berücksichtigung aller dieser elementaren (also im Integrale die störende Masse nicht als Faktor enthaltenden) Glieder integrirt. Diese Bahn weicht von der wahren Bahn nur um Grössen ab, welche mit der störenden Masse multiplicirt sind, und sie ist vielleicht bei Untersuchungen über die Bewegungen der Planeten während eines erheblich langen (oder unbeschränkten) Zeitraumes, also auch über die Stabilität des Systems, von grösster Bedeutung.

Die Differenz zwischen der wahren und der absoluten Bahn, nach der obigen Definition, die Gyldén für die letztere giebt[1]), bleibt also stets unterhalb einer gewissen Grenze; indessen erreicht sie in vielen Fällen recht erhebliche Beträge, und die Berechnung der absoluten Bahn an und für sich ist für die praktische Rechnung in keiner Weise ausreichend, um den Ort eines Planeten so genau zu geben, dass seine Wiederauffindung mit dem Fernrohr ohne grosse Mühe möglich wäre.

Bei Darstellung der Planetenbewegungen für einen Zeitraum von wenigen Jahren oder Jahrzehnten gewinnt man durch Anwendung der absoluten Bahn keinen wesentlichen Vorteil gegenüber der Keppler'schen Ellipse; denn diejenigen Störungsglieder, welche während eines kurzen Zeitraums am merklichsten sind, sind in derselben nicht einbegriffen. Die Bedeutung der absoluten Bahn liegt also auf dem Gebiete der theoretischen Untersuchungen über den Verlauf der Planetenbewegungen während eines sehr langen Zeitraumes und über die Stabilität unseres Planetensystemes, nicht aber auf dem Gebiete der praktischen Störungsrechnung.

Man kann vielmehr bei diesen Rechnungen von der Herstellung des Ausdrucks für die absolute Bahn vollständig absehen und statt der elementaren

1) Gyldén, Traité analytique des Orbites absolues des 8 Planètes principales. Tome I pag. 48 und 33 ff.

Glieder die secularen Glieder der älteren Methoden anwenden. Zu dieser Frage verweise ich auf die Bemerkungen zu Anfang des sechsten und auf das achte Kapitel.

Wenn nun auch die eigentliche absolute Bahn für die praktische Störungsrechnung keine wesentlichen Vorteile mit sich bringt, so ist doch das sonst von Gyldén eingeführte Verfahren zur Berechnung der Störungen dazu angethan, diese Rechnungen in ganz hervorragendem Maasse einfach und übersichtlich zu gestalten. Sehr verbreitet ist die irrige Meinung, dass die von Gyldén angewandten teilweise recht complicirten Transformationen und Integrationsverfahren in jedem Falle von Störungsrechnung in der Praxis angewandt werden müssten; in Wahrheit sind aber die Grundzüge der Gyldén'schen Störungstheorie ausserordentlich einfach und die complicirteren Entwicklungen treten nur da auf, wo es sich um Untersuchungen über die Stabilität des Systems und über besonders schwierige Fälle handelt, in welchen die älteren Methoden versagen.

Gyldén ist davon ausgegangen, dass die in den älteren Theorieen auftretenden Störungen von derselben Grösse sein können, wie die Abweichung der als Ausgangspunkt für die Annäherungen genommenen Keppler'schen Ellipse von einer Kreisbahn; er wollte daher den Untersuchungen bereits in der ersten Annäherung eine Bahn zu Grunde legen, welche der wahren so nahe kommt, dass die Abweichungen dieser Bahn von der wahren wirklich als kleine Grössen aufzufassen sind, und in dieser Absicht entwickelt er den Begriff der absoluten Bahn.

4. Auch wir wollen versuchen, schon in der ersten Annäherung der wahren Bewegung möglichst nahe zu kommen, und zwar näher als die absolute Bahn, indem wir uns allerdings damit begnügen, diese Bewegung während eines beschränkten Zeitraums darzustellen; wir stellen uns die folgende Aufgabe:

Da es gegenwärtig unmöglich ist, die Differentialgleichungen 1) von vornherein mit voller Berücksichtigung der rechten Seiten zu integriren, so soll wenigstens bereits in der ersten Annäherung diesen rechten Seiten insoweit Rechnung getragen werden, dass die endgiltige Form der Lösungen sich von vornherein ergiebt. Die Form der Reihen, durch welche die Coordinaten dargestellt werden, soll also bereits in der ersten Annäherung hergestellt sein; durch die weiteren Annäherungen sollen die Coefficienten der Glieder dieser Reihen genauer bestimmt und nur solche neuen Glieder hinzugefügt werden, die denen der ersten Annäherung analog sind, d. h. keine von jenen wesentlich verschiedene Perioden haben. Diese Bedingung ist in den älteren Methoden nicht erfüllt, da namentlich in der ersten Annäherung denjenigen Gliedern nicht Rechnung getragen ist, deren Perioden von der Umlaufszeit des störenden Körpers abhängen.

Um sich der wahren Form der Planetenbewegungen möglichst zu nähern, führt Gyldén mehrere Hilfsgrössen ein, von denen ich die Wichtigeren beibehalten habe. Nehmen wir der Einfachheit wegen an, dass der gestörte Planet sich in einer festen Ebene bewege, und nennen wir r den Radiusvektor und v

die Länge des Planeten in dieser Ebene, gerechnet von irgend einer festen Richtnng an, so können wir offenbar die Gleichnng der vom Planeten beschriebenen Curve unter der Form

2) $$r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\varrho}$$

schreiben; in dieser Gleichung bedeutet die Constante a einen gewissen Mittelwert des Radiusvektor; η und ϱ sind Funktionen der Länge v und sollen durch trigonometrische Reihen dargestellt werden. Ueber η wollen wir später verfügen und zwar so, dass es an Grösse mit der elliptischen Excentricität verglichen werden kann und ausserdem sich nur sehr langsam mit v (oder mit der Zeit) ändert. Die Funktion ϱ bestimmen wir durch Integration einer Differentialgleichnng zweiter Ordnung, die wir später aus den Gleichungen 1) ableiten werden. Die Gleichung 2) steht also in gewisser Analogie mit der Gleichung der Ellipse

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v-\pi)}.$$

Solange die obengenannte Bedingung I (pag. 12) besteht, wird offenbar ϱ stets an Grösse mit der elliptischen Excentricität verglichen werden können, wenn a passend gewählt wird. In seiner Theorie der absolnten Bahnen nennt Gyldén a den Protometer; ich will diese Grösse im Folgenden **Halbaxe der Bahn** nennen, da sie bei nns nicht immer ein absolutes Element im Gyldén'schen Sinne ist.

Wir wollen nun die Relation zwischen der Länge v nnd der Zeit t betrachten; in der elliptischen Bewegung gilt das Princip von der Erhaltung der Flächen

$$r^2\frac{dv}{dt} = \sqrt{Ma(1-e^2)}.$$

In der gestörten Bewegung ist dasselbe für den gestörten Planeten nicht mehr erfüllt; solange aber die Bedingung II (pag. 12) besteht, wird anch die Flächengeschwindigkeit nm einen gewissen Mittelwert oscilliren, so dass wir in Analogie mit der vorigen die folgende Gleichung ansetzen können:

3) $$r^2\frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{Ma(1-\eta^2)}}{1+S},$$

wo also die Funktion S eine kleine Grösse ist. Es wird sich später zeigen, dass S nnr solche Glieder enthält, die mit der störenden Masse multiplicirt sind, also keine elementaren Glieder. Man bewirkt dies dnrch die Gyldén'sche Definition der Fnnktion η, welche wir noch in diesem Kapitel geben wollen. Die Fnnktion S bestimmt sich aus einer Differentialgleichung der ersten Ordnung, und zur Herstellung der Relation zwischen v und t muss znletzt noch die Gleichnng 3) integrirt werden.

5. Die Gleichungen zur Bestimmung der Funktionen ϱ, S, η u. a., welche ich Gyldén'sche Coordinaten nennen will, werden im zweiten Kapitel abgeleitet; wir wollen aber jetzt gleich einige Betrachtungen über die Form dieser Gleichungen und ihrer Integrale machen und wollen auch dabei über die Funktion η verfügen. Diese Differentialgleichungen sind nämlich von folgenden beiden Typen:

$$\frac{dS}{dv} = \sum a_n \sin(\lambda_n v - B_n) \tag{4}$$

$$\frac{d^2\varrho}{dv^2} + (1-\beta)\varrho = \sum b_n \cos(\lambda_n v - B_n). \tag{5}$$

Wir nehmen an, dass die Grössen a_n, b_n, λ_n, B_n und β Constante seien und dass die Grössen a_n, b_n und β die störende Masse als Faktor enthalten und mit ihr an Grösse vergleichbar sind. In Wahrheit trifft dies nicht immer zu, doch werden unsere vorläufigen Betrachtungen durch diese Annahme nicht beeinträchtigt.

Die Integration der Gleichung 4) giebt uns:

$$S = a_0 - \sum \frac{a_n}{\lambda_n} \cos(\lambda_n v - B_n), \tag{6}$$

wo a_0 die Integrationsconstante ist. Die Grösse der verschiedenen Glieder, aus denen sich die Funktion S zusammensetzt, hängt also im Wesentlichen von den Divisoren λ_n, also von der Periode der Glieder ab; man kann drei Klassen dieser Divisoren, von denen übrigens keiner gleich Null ist, unterscheiden, entsprechend den drei Klassen von Gliedern, die wir bei Besprechung der älteren Methoden pag. 13 erwähnt haben:

I. Die Divisoren λ_n, welche klein von der Ordnung der störenden Masse sind; die von ihnen abhängigen Glieder werden durch die Integration um eine Ordnung der störenden Masse herabgedrückt und demnach sehr beträchtlich vergrössert. Sind sie in der Differentialgleichung 4) mit der ersten Potenz der störenden Masse multiplicirt, so werden sie im Integral 6) diese Masse nicht mehr als Faktor enthalten, also nach Gyldén's Bezeichnung elementar werden. Da die Coefficienten λ_n in diesem Falle sehr klein sind, so werden sich die entsprechenden Glieder äusserst langsam mit der Zeit ändern; wir nennen sie darum **langperiodisch elementare** Glieder.

II. Die Divisoren λ_n können auch klein sein, ohne die störende Masse als Faktor zu enthalten, wenn nämlich das Verhältniss der mittleren Bewegungen des störenden und des gestörten Planeten nahe commensurabel ist. Die entsprechenden Glieder in dem Integral 6) werden zwar erster Ordnung in bezug auf die störende Masse bleiben, indessen können sie ihrem numerischen Betrage nach weit grösser werden. Ich werde später zeigen, dass sie im Maximum (wenigstens in speciellen Fällen) von der Ordnung der dritten Wurzel aus der störenden Masse werden. Gyldén nennt sie charakteristische Glieder, und da

auch für sie der Faktor λ_n klein ist, so können wir sie **langperiodisch charakteristische** Glieder nennen. Gyldén hat darauf aufmerksam gemacht, dass man sie nicht an Grösse mit der störenden Masse vergleichen darf, und also ihre höheren Potenzen in vielen Fällen schon bei der ersten Annäherung berücksichtigen muss. Wir besitzen gegenwärtig mehrere Methoden zu ihrer Berechnung, welche ausser von Gyldén selbst auch von den Herren Harzer, Backlund u. a. angewandt worden sind. Ich werde dasselbe äusserst einfache Verfahren anwenden, dessen Grundzüge sich bereits in meiner vor 8 Jahren erschienenen schwedischen Arbeit finden, wenn dasselbe auch etwas modificirt werden muss, um allgemein angewandt werden zu können.

III. Die Glieder, deren Divisoren λ_n nicht klein sind, wollen wir **gewöhnliche** Glieder nennen; sie sind im Integral nicht wesentlich grösser als in der Differentialgleichung.

Dieses sind die drei Klassen von Gliedern, welche genau den drei oben erwähnten Klassen der älteren Theorieen entsprechen.

Wir wollen die λ_n der ersten Klasse mit σ_n bezeichnen, wo also die σ_n von der Ordnung der störenden Masse sind. Die Divisoren der zweiten Klasse bezeichnen wir mit δ_n, wo die δ_n auch klein, jedoch erheblich grösser als die störende Masse sind.

Um unser Verfahren übersichtlicher zu gestalten, wollen wir die Glieder der drei Klassen trennen und die Gleichung 4) schreiben, wie folgt:

$$\text{4a)} \qquad \frac{dS}{dv} = \sum a_n \sin(\sigma_n v - A_n) + \sum a'_n \sin(\delta_n v - C_n) + \sum a''_n \sin(\lambda_n v - B_n),$$

wo die λ_n also nicht mehr kleine Grössen vorstellen. Das Integral wird:

$$\text{6a)} \qquad S = a_0 - \sum \frac{a_n}{\sigma_n}\cos(\sigma_n v - A_n) - \sum \frac{a'_n}{\delta_n}\cos(\delta_n v - C_n) - \sum \frac{a''_n}{\lambda_n}\cos(\lambda_n v - B_n).$$

Wir wollen nun in gleicher Weise die Gleichung 5) betrachten. Wenn wir sie integriren, so erhalten wir:

$$\text{7)} \qquad \varrho = \varkappa\cos[\sqrt{1-\beta}\,v - \Gamma] + \sum \frac{b_n}{1-\beta-\lambda_n^2}\cos(\lambda_n v - B_n),$$

wo $\varkappa$ und Γ die beiden Integrationsconstanten sind. Wir bemerken von vornherein, dass, wie sich unten zeigen wird, keiner der Coefficienten λ_n gleich $\sqrt{1-\beta}$ ist, was zur Folge hätte, dass das entsprechende Glied den Divisor Null erhielte; indessen befinden sich unter den λ_n:

I. Solche, welche sich von der Einheit nur um eine Grösse von der Ordnung der störenden Masse unterscheiden; wir setzen sie unter die Form:

$$\lambda_n = 1 - \sigma_n,$$

wo die σ_n, wie oben, Grössen von der Ordnung der störenden Masse sind. Die

entsprechenden Glieder in ϱ erhalten dann einen Divisor von eben dieser Ordnung und werden elementar sein, aber nicht von langer Periode (wenigstens nicht in der Form, in der sie hier auftreten); ihre Periode wird sich vielmehr um äusserst wenig von der Umlaufszeit des Planeten unterscheiden; wir nennen sie **kurzperiodisch elementare** Glieder.

Ferner befinden sich unter den λ_n:

II. Solche, welche sich von der Einheit um kleine Grössen von der Ordnung der oben erwähnten δ_n unterscheiden: wir geben ihnen die Form:

$$\lambda_n = 1 - \delta_n,$$

und nennen die so definirten Glieder **kurzperiodisch charakteristische**, da ihre Divisoren ebenfalls von der Ordnung der δ_n sind, und auch sie durch die Integration stark vergrössert werden.

III. Diejenigen der Coefficienten λ_n, welche beträchtlich von der Einheit abweichen, verursachen keine kleinen Divisoren; die von ihnen abhängigen Glieder werden durch die Integration nicht wesentlich vergrössert und wir nennen sie **gewöhnliche Glieder**.

Die eben genannten drei Klassen von Gliedern entsprechen ebenfalls den in der Funktion S, sowie den in der älteren Störungstheorie auftretenden Klassen.

Wir zerlegen die in ϱ vorkommenden Glieder wieder, indem wir schreiben:

$$5\text{a)}\quad \frac{d^2\varrho}{dv^2} + (1-\beta)\varrho = \sum b_n \cos[(1-\sigma_n)v - \Gamma_n] + \sum b'_n \cos[(1-\delta_n)v - D_n] + \sum b''_n \cos(\lambda_n v - B_n),$$

wo die Γ_n und die D_n Constante sind, und wo nunmehr unter den λ_n nur diejenigen begriffen sind, welche zu gewöhnlichen Gliedern gehören. Man hat dann

$$7\text{a)}\quad \varrho = \varkappa\cos[(1-\varsigma)v - \Gamma] + \sum \varkappa_n \cos[(1-\sigma_n)v - \Gamma_n] + \sum \beta_n \cos[(1-\delta_n)v - D_n] + \sum \bar{b}_n \cos(\lambda_n v - B_n),$$

wo bezeichnet ist:

$$1 - \varsigma = \sqrt{1-\beta}$$

$$\varkappa_n = \frac{b_n}{2\sigma_n - \sigma_n^2 - \beta} = \frac{b_n}{2(\sigma_n - \varsigma) - (\sigma_n^2 - \varsigma^2)}$$

$$\beta_n = \frac{b'_n}{2\delta_n - \delta_n^2 - \beta} = \frac{b'_n}{2(\delta_n - \varsigma) - (\delta_n^2 - \varsigma^2)}$$

$$\bar{b}_n = \frac{b''_n}{1 - \lambda_n^2 - \beta}.$$

6. Wir können nun die Funktion η bestimmen. Zu diesem Zweck bezeichnen wir nach Gyldén mit (ϱ) den Teil der Funktion ϱ, welcher elementarer Form ist; wir setzen also

8) $$(\varrho) = \varkappa \cos[(1-\varsigma)v - \Gamma] + \sum \varkappa_n \cos[(1-\sigma_n)v - \Gamma_n].$$

Zur Abkürzung bezeichne ich:

9) $$\begin{aligned} \omega &= \Gamma + \varsigma v \\ \omega_n &= \Gamma_n + \sigma_n v \end{aligned}$$

so dass:

8a) $$(\varrho) = \varkappa \cos(v-\omega) + \sum \varkappa_n \cos(v-\omega_n).$$

Wir bestimmen nun die beiden Funktionen η und Π so, dass

10) $$\begin{aligned} \eta \cos \Pi &= \varkappa \cos \omega + \sum \varkappa_n \cos \omega_n \\ \eta \sin \Pi &= \varkappa \sin \omega + \sum \varkappa_n \sin \omega_n, \end{aligned}$$

und wenn wir die erste dieser Gleichungen mit $\cos v$ und die zweite mit $\sin v$ multipliciren und addiren, so kommt:

11) $$(\varrho) = \eta \cos(v - \Pi).$$

Die Funktionen η und Π sind also aus langperiodisch elementaren Gliedern zusammengesetzt, und für Π können wir schreiben:

12) $$\Pi = \Pi_0 + \varsigma v.$$

Es gelten dann auch die folgenden Relationen:

10a) $$\begin{aligned} \eta \cos \Pi_0 &= \varkappa \cos \Gamma + \sum \varkappa_n \cos(\omega_n - \varsigma v) \\ \eta \sin \Pi_0 &= \varkappa \sin \Gamma + \sum \varkappa_n \sin(\omega_n - \varsigma v) \end{aligned}$$

10b) $$\begin{aligned} \eta \cos(\Pi_0 - \Gamma) &= \varkappa + \sum \varkappa_n \cos(\omega_n - \omega) \\ \eta \sin(\Pi_0 - \Gamma) &= \sum \varkappa_n \sin(\omega_n - \omega), \end{aligned}$$

welch letztere von Gyldén angewandt werden, dessen π mit unserem Π_0 identisch ist. Ferner:

13) $$\eta^2 = (\varrho)^2 + \left(\frac{D(\varrho)}{dv}\right)^2,$$

wo das Differentialzeichen D bedeutet, dass bei der Differentiation die Grössen ω nnd ω_n als Constanten anzusehen sind.

7. Offenbar wird, solange die pag. 12 gegebenen Bedingungen erfüllt sind, ϱ numerisch mit den elliptischen Excentricitäten verglichen werden können; es wird dies auch der Fall sein für die Funktion η und für die Coefficienten $\varkappa$ und $\varkappa_n$. Allerdings ist das für die letzteren von vornherein nicht unbedingt notwendig: es könnten einige dieser Coefficienten sogar recht erhebliche Werte haben, ihre Snmme aber während eines sehr langen Zeitraumes sich auf eine kleine Grösse redneiren, wenn ihre Perioden sehr nahe gleich sind; indessen folgt ans

den Ausführungen des achten Kapitels, dass während eines beschränkten Zeitraums sich alle $\varkappa_n$ als solche kleine Grössen darstellen lassen.

Wir nennen nun, wie schon pag. 5 bemerkt, eine jede Grösse, die die n-te Potenz von η oder ein äquivalentes Produkt der $\varkappa_n$-Coefficienten enthält, eine Grösse **n-ten Grades**: dazu bemerken wir, dass (ausser $\varkappa$ selbst) nur soviele der $\varkappa_n$-Coefficienten ersten Grades sind, wie es störende Körper giebt, dass die übrigen höheren und zwar stets ungeraden Grades sind; im Folgenden wird sich dies ergeben. Ebenso werden wir später sehen, dass die Funktion ρ auch Glieder nullten Grades enthält, welche ihrem numerischen Betrage nach nicht grösser werden können als die elliptischen Excentricitäten; es ist aber infolge dessen z. B. nur die Grösse $(\rho)^n$, und nicht auch ρ^n, vom n-ten Grade.

Unter den Coefficienten b_n der Gleichung 5) werden natürlich auch solche sich befinden, welche mit dem Quadrat oder einer höheren Potenz der störenden Masse multiplicirt sind; dieselben werden durch den Integrationsprocess nicht eigentlich elementar (nullter Ordnung in bezug auf die störende Masse), sondern sie werden nur um eine Grössenordnung erniedrigt. Gyldén nennt sie s u b e l e m e n t a r e G l i e d e r; sie haben durchaus dieselbe Form wie die elementaren, und da es überhaupt nicht immer thunlich ist, sie von den letzteren zu trennen, so denken wir sie uns stets mit einbegriffen, wenn wir von Gliedern elementarer Form sprechen.

Ich will nun noch eine Bezeichnung einführen, die ich bereits in meinen früheren Arbeiten benutzt habe. Es soll nämlich nach dem gewöhnlichen Gebrauch ein Glied, das die n-te Potenz der störenden Masse als Faktor enthält, kurz ein Glied **n-ter Ordnung** genannt werden. Da aber diese Bezeichnung häufig keine richtige Vorstellung von der numerischen Grösse des betreffenden Gliedes giebt, da dasselbe kleine Divisoren von der Ordnung der δ_n enthalten kann, so nenne ich ein Glied, das die n-te Potenz der störenden Masse enthält und auch seinem absoluten Betrage nach mit derselben verglichen werden kann, ein Glied **rein n-ter Ordnung**. Es werden demnach z. B. in der Gleichung 7a) die gewöhnlichen Glieder (also die Coefficienten b_n) rein erster Ordnung, die charakteristischen (also die Coefficienten β_n) aber nicht rein erster Ordnung sein; ein Produkt aus einem b_n- und einem β_n-Coefficienten wird zwar zweiter Ordnung, aber nur rein erster Ordnung sein. Ich befolge stets das Princip, die Glieder rein erster Ordnung durch lateinische Buchstaben, diejenigen, welche kleine Divisoren von der Ordnung der δ_n enthalten, dagegen mit griechischen Buchstaben zu bezeichnen, so dass man sich leicht eine Vorstellung vom Betrage eines jeden Gliedes machen kann.

Wir erinnern zum Schluss daran, dass wir also vor allem vier Arten von Gliedern zu betrachten haben, deren Argumente die folgenden sind:

$$\text{14)}\quad \begin{array}{llll} \text{A)} & \sigma_n v - A_n, & \text{C)} & \delta_n v - C_n \\ \text{B)} & (1-\sigma_n)v - \Gamma_n, & \text{D)} & (1-\delta_n)v - D_n, \end{array}$$

wie sie schon Herr Harzer[1]) bezeichnet hat, und wir wollen sie im Folgenden kurz Glieder der Form A, B, C oder D nennen. Die Glieder der Formen A und B sind die elementaren (und subelementaren), die der Formen C und D die charakteristischen. Andererseits sind die Glieder A und C langperiodisch, die Glieder B und D kurzperiodisch. Weiter unten wird sich zeigen, dass die Glieder A stets von einem geraden, mindestens vom zweiten Grade, dagegen die Glieder B stets von einem ungeraden Grade sind.

Alle Glieder, welche keiner der Formen 14) angehören, nenne ich „gewöhnliche" Glieder.

Zweites Kapitel.

Ableitung der Differentialgleichungen für die Gyldén'schen Coordinaten. — Formeln für die Bewegung des Planeten in seiner momentanen Bahnebene.

1. Kehren wir zurück zu den Gleichungen 1) für die Coordinaten des gestörten Körpers:

$$15)\qquad \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{Mx}{r^3} &= M\frac{\partial\Omega}{dx},\\ \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{My}{r^3} &= M\frac{\partial\Omega}{dy},\\ \frac{d^2z}{dt^2}+\frac{Mz}{r^3} &= M\frac{\partial\Omega}{dz},\end{aligned}$$

wo man für die Störungsfunktion Ω hat, ausgedrückt in rechtwinkligen Coordinaten:

$$16)\qquad \Omega = \frac{m'}{1+m}\left\{\frac{1}{\varDelta}-\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right\},\quad \varDelta = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2},$$

und ausgedrückt in Polarcoordinaten, wenn man mit H den Winkel zwischen den Radienvektoren des gestörten und des störenden Körpers bezeichnet:

$$17)\qquad \Omega = \frac{m'}{1+m}\left\{\frac{1}{\varDelta}-\frac{r}{r'^2}\cos H\right\},\quad \varDelta = \sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos H}.$$

---

1) Harzer, Untersuchungen über einen speciellen Fall des Problems der drei Körper. Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg, VII. Serie. Tome XXXIV No. 12.

Wir wollen die Coordinaten $x\,y\,z$ auf irgend eine als fest angenommene Lage der Ekliptik beziehen; im allgemeinen wird man hierfür die mittlere Ekliptik irgend eines bestimmten Jahresanfangs, wie 1850.0, 1900.0 u. s. w. wählen.

Zunächst haben wir nun die Gleichungen 15) in derselben Weise zu transformiren, wie dies schon Hansen gethan hat, indem wir die Bewegung des Planeten in seiner momentanen Bahnebene — welche durch den Radiusvektor und die augenblickliche Bewegungsrichtung, also die Tangente an die Bahn bestimmt ist — trennen von der Bewegung dieser beweglichen Bahnebene gegen die feste Ekliptikalebene der $x\,y$. Wir führen zu diesem Zweck ein zweites rechtwinkliges Coordinatensystem ein, dessen Axen von veränderlicher Richtung sind, aber denselben Anfangspunkt haben wie das System der $x\,y\,z$; wir nennen die Coordinaten in bezug auf dieses Systems $x_1\,y_1\,z_1$.

Wenn $\alpha, \beta, \gamma, \;\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \;\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ die Cosinus der Winkel bedeuten, welche die positiven Axen der x und x_1, der x und y_1, der x und z_1, u. s. w. mit einander bilden, so bestehen die drei Relationen:

18)
$$\begin{aligned} x &= \alpha\, x_1 + \beta\, y_1 + \gamma\, z_1, \\ y &= \alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1 z_1, \\ z &= \alpha_2 x_1 + \beta_2 y_1 + \gamma_2 z_1, \end{aligned}$$

und umgekehrt

19)
$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha x + \alpha_1 y + \alpha_2 z, \\ y_1 &= \beta x + \beta_1 y + \beta_2 z, \\ z_1 &= \gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2 z. \end{aligned}$$

Zwischen den neun Cosinus α, β, γ u. s. w., welche übrigens variable Grössen sind, gelten die sechs folgenden Bedingungen, welche ausdrücken, dass die beiden Coordinatensysteme rechtwinklig sind:

20)
$$\begin{aligned} \alpha^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2 &= 1, & \alpha\beta+\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2 &= 0, \\ \beta^2+\beta_1^2+\beta_2^2 &= 1, & \alpha\gamma+\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2 &= 0, \\ \gamma^2+\gamma_1^2+\gamma_2^2 &= 1, & \beta\gamma+\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2 &= 0, \end{aligned}$$

und umgekehrt:

21)
$$\begin{aligned} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 &= 1, & \alpha\,\alpha_1+\beta\,\beta_1+\gamma\,\gamma_1 &= 0, \\ \alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2 &= 1, & \alpha\,\alpha_2+\beta\,\beta_2+\gamma\,\gamma_2 &= 0, \\ \alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2 &= 1, & \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2 &= 0. \end{aligned}$$

Aus diesen Relationen lassen sich die folgenden ableiten:

22)
$$\begin{aligned} \alpha &= \beta_2\gamma_1-\beta_1\gamma_2, & \beta &= \alpha_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1, & \gamma &= \alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2, \\ \alpha_1 &= \beta\gamma_2-\beta_2\gamma, & \beta_1 &= \alpha_2\gamma-\alpha\gamma_2, & \gamma_1 &= \alpha\beta_2-\alpha_2\beta, \\ \alpha_2 &= \beta_1\gamma-\beta\gamma_1, & \beta_2 &= \alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma, & \gamma_2 &= \alpha_1\beta-\alpha\beta_1. \end{aligned}$$

Die Gleichungen 20) bis 22) enthalten nur 6 unabhängige Bedingungen; es bleiben also zur Bestimmung der neun Cosinus, d. h. der Lage des Coordinatensystems der $x_1\,y_1\,z_1$ noch drei Relationen zu wählen. Wenn wir, wie Hansen, als $x_1\,y_1$-Ebene die momentane Bahnebene des Planeten nehmen, so muss der Radiusvektor des Planeten in dieser Ebene liegen, also

23) $$z_1 = 0$$

sein, oder:

a) $$\gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2 z = 0.$$

Dies ist die Gleichung aller Ebenen, welche den Radiusvektor zur Zeit t enthalten; für diejenige unter ihnen, welche auch die Tangente an die Bahn enthält, muss die Gleichung a) auch noch bestehen, wenn man x, y, z durch $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ ersetzt. Es muss also auch

b) $$\gamma dx + \gamma_1 dy + \gamma_2 dz = 0$$

sein, aus welcher Gleichung mit Hilfe von a) sich die folgende ergiebt:

24) $$x d\gamma + y d\gamma_1 + z d\gamma_2 = 0.$$

Durch die Bedingungen a) und b) haben wir die $x_1 y_1$-Ebene in die momentane Bahnebene des Planeten gelegt; es bleibt nun noch die Aufstellung einer dritten Relation übrig, welche die Lage der x_1-Axe in dieser Ebene definirt. Wir bestimmen dieselbe durch die Relation

c_1) $$\beta d\alpha + \beta_1 d\alpha_1 + \beta_2 d\alpha_2 = 0,$$

oder, wie mit Hilfe von 20) hieraus folgt,

c_2) $$\alpha d\beta + \alpha_1 d\beta_1 + \alpha_2 d\beta_2 = 0,$$

womit die Lage der x_1-Axe durch eine Differentialgleichung bestimmt ist; es wird uns also später (Kap. III Nr. 4) noch übrig bleiben, die Integrationsconstante zu wählen, welche die Lage dieser Axe für einen bestimmten Zeitpunkt giebt.

2. Wir multipliciren nunmehr die drei Gleichungen 18) der Reihe nach einmal mit $d\alpha$, $d\alpha_1$, $d\alpha_2$ und ein andermal mit $d\beta$, $d\beta_1$, $d\beta_2$ und addiren; dann wird mit Hilfe der Relationen 20), 23) und c):

25) $$\begin{aligned} x d\alpha + y d\alpha_1 + z d\alpha_2 &= 0, \\ x d\beta + y d\beta_1 + z d\beta_2 &= 0, \end{aligned}$$

welche Gleichungen mit 24) zusammengestellt werden können. Wenn wir nun die Gleichungen 19) differenziren, und auf 24) und 25) Rücksicht nehmen, so kommt:

26)
$$\begin{aligned} dx_1 &= \alpha dx + \alpha_1 dy + \alpha_2 dz \\ dy_1 &= \beta dx + \beta_1 dy + \beta_2 dz \\ 0 &= \gamma dx + \gamma_1 dy + \gamma_2 dz, \end{aligned}$$

deren letzte identisch mit b) ist. Man kann also die Gleichungen 19) differenziren, indem man die Cosinus α, β, γ u. s. w. als constant ansieht, was auch daraus folgt, dass die Ebene der $x_1 y_1$ mit der Ebene der osculirenden Ellipse zusammenfällt.

Wir multipliciren nun wieder die drei letzten Gleichungen der Reihe nach einmal mit α, β, γ, ein andermal mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und ein drittes Mal mit $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, und addiren, so wird mit Rücksicht auf 21):

$$\begin{aligned} dx &= \alpha\, dx_1 + \beta\, dy_1 \\ dy &= \alpha_1 dx_1 + \beta_1 dy_1 \\ dz &= \alpha_2 dx_1 + \beta_2 dy_1, \end{aligned}$$

und wenn wir endlich diese Gleichungen wieder der Reihe nach einmal mit $d\alpha$, $d\alpha_1$, $d\alpha_2$ und ein andermal mit $d\beta$, $d\beta_1$, $d\beta_2$ multipliciren und wieder addiren, so wird nach den Gleichungen 20) und c):

$$\begin{aligned} d\alpha dx + d\alpha_1 dy + d\alpha_2 dz &= 0 \\ d\beta dx + d\beta_1 dy + d\beta_2 dz &= 0. \end{aligned}$$

Nun differenziren wir die Gleichungen 26) ein zweites Mal und erhalten mit Hilfe der vorigen:

27)
$$\begin{aligned} d^2x_1 &= \alpha d^2x + \alpha_1 d^2y + \alpha_2 d^2z \\ d^2y_1 &= \beta d^2x + \beta_1 d^2y + \beta_2 d^2z. \end{aligned}$$

Man kann also die Gleichungen 19) zweimal differenziren, indem man die Cosinus α, β, γ u. s. w. als constant ansieht; dies haben wir durch unsere Definition der Lage der x_1-Axe (Gleichung c)) erreicht, welche schon Hansen angewandt hat.

3. Wir können jetzt die Gleichungen 15) in derselben Weise transformiren wie Hansen, indem wir sie der Reihe nach einmal mit $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ und ein andermal mit β, β_1, β_2 multipliciren und addiren. Wir erhalten dann mit Berücksichtigung von 27) und 19)

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{Mx_1}{r^3} = M\left[\alpha\frac{\partial\Omega}{dx} + \alpha_1\frac{\partial\Omega}{dy} + \alpha_2\frac{\partial\Omega}{dz}\right]$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} + \frac{My_1}{r^3} = M\left[\beta\frac{\partial\Omega}{dx} + \beta_1\frac{\partial\Omega}{dy} + \beta_2\frac{\partial\Omega}{dz}\right].$$

Da aber nach 18):

$$\alpha = \frac{\partial x}{dx_1}, \quad \alpha_1 = \frac{\partial y}{dx_1}, \quad \alpha_2 = \frac{\partial z}{dx_1}$$

$$\beta = \frac{\partial x}{dy_1}, \quad \beta_1 = \frac{\partial y}{dy_1}, \quad \beta_2 = \frac{\partial z}{dy_1},$$

so erhalten wir die Differentialgleichungen für die Bewegung des gestörten Planeten in seiner momentanen Bahnebene in folgender Gestalt:

28)
$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{Mx_1}{r^3} = M\frac{\partial\Omega}{dx_1}$$
$$\frac{d^2y_1}{dt^2} + \frac{My_1}{r^3} = M\frac{\partial\Omega}{dy_1},$$

also ganz analog den Gleichungen 15).

4. In die Gleichungen 28) führen wir nun Polarcoordinaten ein durch die Relationen:

29) $$x_1 = r\cos v, \qquad y_1 = r\sin v,$$

wo v der Winkel zwischen der positiven x_1-Axe und dem Radiusvektor (also die wahre Länge des Planeten in seiner momentanen Bahnebene) ist, dieselbe Grösse, welche in den Gleichungen 4) und 5) der Einleitung figurirt. Da die Ebene der $x_1 y_1$ nicht fest im Raume ist, also die vom Planeten beschriebene Curve keine geschlossene ist, so darf man v nicht überall in Perioden von 360° zählen, sondern im Allgemeinen von $-\infty$ bis $+\infty$. Man wird so disponiren, dass v ungefähr in der Mitte des Zeitraums, auf den man die Rechnungen ausdehnt, gleich Null ist.

Aus den Gleichungen 28) leitet man leicht die folgenden ab:

30) $$x_1\frac{d^2y_1}{dt^2} - y_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = M\left[x_1\frac{\partial\Omega}{dy_1} - y_1\frac{\partial\Omega}{dx_1}\right].$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist Nichts anderes als der Differentialquotient des vom Radiusvektor während des Zeitelements dt beschriebenen Flächenelements nach der Zeit, also gleich:

$$\frac{d}{dt}\left[x_1\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dx_1}{dt}\right] = \frac{d}{dt}\left(r^2\frac{dv}{dt}\right),$$

und da nach 29)

$$\frac{\partial x_1}{dv} = -y_1, \qquad \frac{\partial y_1}{dv} = x_1,$$

so wird die rechte Seite der Gleichung 30) gleich:

$$M\left[\frac{\partial\Omega}{dy_1}\frac{\partial y_1}{dv} + \frac{\partial\Omega}{dx_1}\frac{\partial x_1}{dv}\right] = M\frac{\partial\Omega}{dv}.$$

Der partielle Differentialquotient $\frac{\partial \Omega}{dv}$ ist folgendermassen zu verstehen: Durch die Gleichung 16) ist Ω gegeben als Funktion der drei Variabeln x, y, z, wenn wir von den Coordinaten des störenden Körpers absehen, die bei der Differentiation von Ω als Constanten fungiren. In den Gleichungen 28) muss man sich im Ausdruck für Ω die Variabeln x, y, z mit Hilfe von 18) ersetzt denken durch x_1, y_1 und die Cosinus α, β, γ u. s. w., welche zusammen die dritte Variable (z_1 ist gleich Null) vorstellen. Hiernach sind die Differentialquotienten $\frac{\partial \Omega}{dx_1}$ und $\frac{\partial \Omega}{dy_1}$ unzweideutig definirt. Führen wir nun nach 29) Polarcoordinaten ein, so wird Ω Funktion der drei Variabeln r, v und der Cosinus α, β, γ u. s. w. oder irgend einer anderen dritten Variabeln, die die Lage der momentanen Bahnebene gegen die feste ausdrückt. Bei Bildung der Differentialquotienten $\frac{\partial \Omega}{dv}$ und $\frac{\partial \Omega}{dr}$ sind also die Grössen, die sich auf die Lage beider Ebenen zu einander beziehen, als constant anzusehen; es ist wichtig, dies zu bemerken, da v in den Grössen, welche die Lage beider Ebenen definiren, implicit vorkommt.

Die Gleichung 30) geht also über in:

$$31)\qquad \frac{d}{dt}\left(r^2 \frac{dv}{dt}\right) = M \frac{\partial \Omega}{dv}.$$

Ferner leiten wir aus den Gleichungen 28) die folgende ab:

$$32)\qquad x_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + y_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + \frac{M}{r} = M\left[x_1 \frac{\partial \Omega}{dx_1} + y_1 \frac{\partial \Omega}{dy_1}\right].$$

Da aber

$$\frac{\partial x_1}{dr} = \frac{x_1}{r}, \qquad \frac{\partial y_1}{dr} = \frac{y_1}{r},$$

so wird

$$x_1 \frac{\partial \Omega}{dx_1} + y_1 \frac{\partial \Omega}{dy_1} = r \frac{\partial \Omega}{dr}.$$

Aus den Gleichungen 29) folgt aber:

$$x_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + y_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = r \frac{d^2 r}{dt^2} - r^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2.$$

Die Gleichung 32) geht also in die folgende über:

$$33)\qquad r \frac{d^2 r}{dt^2} - r^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{M}{r} = Mr \frac{\partial \Omega}{dr},$$

welche Gleichung, ebenso wie 31), mit den von Hansen angewandten identisch ist.

5. Wir wollen nun in die Gleichungen 31) und 33), welche die Bewegung

des Planeten in seiner momentanen Bahnebene bestimmen, als abhängige Veränderliche die Gyldén'schen Coordinaten ϱ, η und S, und als unabhängige Veränderliche die wahre Länge v einführen; hierzu dienen uns die Gleichungen 2) und 3), die wir jetzt auf die momentane Bahnebene beziehen:

$$2)\quad r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\varrho}, \qquad 3)\quad r^2\frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{Ma(1-\eta^2)}}{1+S}$$

Die Gleichung 31) geht mit Hilfe von 3) unmittelbar über in:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\sqrt{Ma(1-\eta^2)}}{1+S}\right) = M\frac{\partial\Omega}{dv},$$

und wenn man die Differentiation linker Hand ausführt, sowie dt mit Hilfe von 3) durch dv ersetzt, so kommt:

$$34a)\qquad -\frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv} = (1+S)^2 Q + \tfrac{1}{2}\frac{1}{1-\eta^2}\frac{d\eta^2}{dv},$$

wo gesetzt ist:

$$34)\qquad Q = \frac{r^2}{a(1-\eta^2)}\frac{\partial\Omega}{dv}.$$

Die vorstehende Gleichung wird zur Bestimmung von S dienen.

Um die Differentialgleichung für die Funktion ϱ abzuleiten, bemerken wir, dass wir nach 3) haben:

$$\frac{dr}{dt} = -r^2\frac{d\frac{1}{r}}{dt} = -\frac{\sqrt{Ma(1-\eta^2)}}{1+S}\frac{d\frac{1}{r}}{dv},$$

woraus durch Differentiation sich ergiebt:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{Ma(1-\eta^2)}{r^2(1+S)^2}\left\{\frac{d^2\frac{1}{r}}{dv^2} - \tfrac{1}{2}\frac{1}{1-\eta^2}\frac{d\eta^2}{dv}\frac{d\frac{1}{r}}{dv} - \frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv}\frac{d\frac{1}{r}}{dv}\right\},$$

oder mit Rücksicht auf 34):

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{Ma(1-\eta^2)}{r^2(1+S)^2}\left\{\frac{d^2\frac{1}{r}}{dv^2} + (1+S)^2 Q\frac{d\frac{1}{r}}{dv}\right\}.$$

Setzt man diesen Wert ein in die Gleichung 33), und ersetzt man dort $\frac{dv}{dt}$ durch seinen Wert 3), so wird:

$$35)\qquad a(1-\eta^2)\left\{\frac{d^2\frac{1}{r}}{dv^2} + (1+S)^2 Q\frac{d\frac{1}{r}}{dv} + \frac{1}{r}\right\} - (1+S)^2 = -r^2(1+S)^2\frac{\partial\Omega}{dr}.$$

Aus 2) ergeben sich aber durch Differentiation die folgenden Relationen:

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dv} = \frac{1}{a(1-\eta^2)}\left\{\frac{d\varrho}{dv} + \frac{1+\varrho}{1-\eta^2}\frac{d\eta^2}{dv}\right\}$$

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{dv^2} = \frac{1}{a(1-\eta^2)}\left\{\frac{d^2\varrho}{dv^2} + \frac{2}{1-\eta^2}\frac{d\eta^2}{dv}\frac{d\varrho}{dv} + 2\frac{1+\varrho}{(1-\eta^2)^2}\left(\frac{d\eta^2}{dv}\right)^2 + \frac{1+\varrho}{1-\eta^2}\frac{d^2\eta^2}{dv^2}\right\},$$

nnd mit ihrer Hilfe geht Gleichung 35) in die folgende über:

36) $$\frac{d^2\varrho}{dv^2} + \varrho = -\left\{\frac{2}{1-\eta^2}\frac{d\eta^2}{dv} + (1+S)^2 Q\right\}\frac{d\varrho}{dv} + 2S + S^2 - (1+S)^2 P$$
$$-\left\{\frac{1}{1-\eta^2}\frac{d^2\eta^2}{dv^2} + \frac{2}{(1-\eta^2)^2}\left(\frac{d\eta^2}{dv}\right)^2 + \frac{(1+S)^2}{1-\eta^2} Q \frac{d\eta^2}{dv}\right\}(1+\varrho),$$

wo wir bezeichnet haben:

36a) $$P = r^2\frac{\partial\Omega}{dr}.$$

Die vorstehende Gleichung dient uns znr Bestimmung der Funktion ϱ und die in der zweiten Reihe stehenden Glieder können fast immer vernachlässigt werden. Wenn wir die Störnngsfunktion und ihre Derivirten P und Q in trigonometrische Reihen entwickeln, so werden offenbar die Gleichnngen 34) und 36) auf die Form der oben besprochenen Gleichnngen 4) nnd 5) geführt werden.

Die Integrale der Gleichungen 34) nnd 36) geben die Bewegung des gestörten Planeten in seiner momentanen Bahnebene; indessen wird hierzn noch die Integration der Gleichnng 3) erfordert, welche wir zn diesem Zweck im Folgenden anf eine etwas andere Form bringen wollen.

6. Wir wollen nun einige Betrachtungen machen über die Bewegung des gestörten Planeten in seiner momentanen Bahnebene, nnd wollen die nötigen Formeln herstellen znr Berechnnng von r nnd v für einen gegebenen Wert der Zeit; hierbei soll zugleich die Gleichung 3) auf eine Form gebracht werden, die für ihre Integration von Vorteil ist.

Wir haben mit (ϱ) denjenigen Teil der Funktion ϱ bezeichnet, welcher von der Form B ist, und wenn wir setzen

37) $$\varrho = (\varrho) + R,$$

so ist die Funktion R offenbar erster Ordnnng, wenn sie auch ihrem absolnten Betrage nach erheblich grösser sein kann als die störende Masse.

Sind die Funktionen η, Π nnd R bekannt, so kann der Radinsvektor ans v berechnet werden mit Hilfe der Relation

38) $$r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+(\varrho)+R} = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\eta\cos\mathrm{v}+R},$$

wo gesetzt ist

39) $$\mathrm{v} = v - \Pi.$$

Gyldén definirt den „absoluten Radiusvektor" (r) durch die Relation

40) $$(r) = \frac{a(1-\eta^2)}{1+(\varrho)} = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\eta\cos\mathrm{v}},$$

woraus also folgt:

41) $$r = \frac{(r)}{1+\frac{R}{1+\eta\cos\mathrm{v}}}.$$

Wir wollen nun, nach Gyldén, eine neue Variable ε einführen, welche in gewisser Analogie zur excentrischen Anomalie der elliptischen Bewegung steht. Wir setzen nämlich:

42) $$(r) = a(1-\eta\cos\varepsilon).$$

Es wird also:

43) $$1-\eta\cos\varepsilon = \frac{1-\eta^2}{1+\eta\cos\mathrm{v}}, \quad \cos\varepsilon = \frac{\eta+\cos\mathrm{v}}{1+\eta\cos\mathrm{v}}, \quad \sin\varepsilon = \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{1+\eta\cos\mathrm{v}}\sin\mathrm{v},$$

woraus sich ergiebt:

44) $$\mathrm{tg}\frac{\mathrm{v}}{2} = \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}}\,\mathrm{tg}\frac{\varepsilon}{2}.$$

Ebenso führen wir in Analogie mit der elliptischen Bewegung die mittlere Anomalie M ein durch die Gleichung:

45) $$M = \varepsilon - \eta\sin\varepsilon.$$

Man kann nun die Grössen ε und M als Funktionen von v darstellen durch die folgenden Reihen, welche denen der elliptischen Bewegung durchaus entsprechen, und welche wir darum hier nicht besonders ableiten[1]),

$$\varepsilon = \mathrm{v} + \sum A_n \sin n\mathrm{v},$$

wo

$$A_n = 2\frac{(-1)^n}{n}\frac{\eta^n}{(1+\sqrt{1-\eta^2})^n},$$

und

46) $$M = \varepsilon - \eta\sin\varepsilon = \mathrm{v} + \sum B_n \sin n\mathrm{v},$$

wo

$$B_n = 2\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{\eta}{1+\sqrt{1-\eta^2}}\right)^n (1+n\sqrt{1-\eta^2}).$$

1) Siehe Tisserand, Traité de Mécanique céleste. Tome I pag. 223.

Wenn man die Ausdrücke für die B_n nach Potenzen von η entwickelt, so erhält man bis zu den Gliedern fünften Grades:

47)
$$B_1 = -2\eta \qquad B_4 = \tfrac{5}{32}\eta^4 + \cdots\cdots$$
$$B_2 = \tfrac{3}{4}\eta^2 - \tfrac{1}{8}\eta^4 + \cdots\cdot \qquad B_5 = -\tfrac{3}{40}\eta^5 - \cdots\cdot$$
$$B_3 = -\tfrac{1}{3}\eta^3 - \tfrac{1}{8}\eta^5 - \cdots\cdot \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

Differenziren wir die Gleichung 46), indem wir η als constant ansehen und das Differential durch den Buchstaben D bezeichnen, so wird:

48)
$$(1 - \eta\cos\varepsilon)\frac{D\varepsilon}{D\mathrm{v}} = 1 + \sum n\, B_n \cos n\mathrm{v}.$$

Aus den Gleichungen 43) ergiebt sich aber

$$\frac{D\varepsilon}{D\mathrm{v}} = \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{1+\eta\cos\mathrm{v}},$$

und

$$(1 - \eta\cos\varepsilon)\frac{D\varepsilon}{D\mathrm{v}} = \frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\eta\cos\mathrm{v})^2}.$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in 48) erhält man die Entwicklung

49)
$$\frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\eta\cos\mathrm{v})^2} = 1 + \sum n\, B_n \cos n\mathrm{v},$$

von der ich im Folgenden Gebrauch machen werde.

7. Wir kehren nun zurück zur Gleichung 3) (pag. 28) zwischen der wahren Länge v und der Zeit, welche wir schreiben:

$$\frac{dt}{dv} = \frac{r^2(1+S)}{\sqrt{Ma(1-\eta^2)}}.$$

Wir setzen

50)
$$n = \frac{\sqrt{M}}{a^{\frac{3}{2}}},$$

und nennen n die „Bewegungsconstante" des Planeten. Die vorige Relation lässt sich dann, wie folgt, schreiben:

51)
$$n\frac{dt}{dv} = \frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\varrho)^2}(1+S),$$

und diese haben wir zu integriren.

Die mittlere Länge des Planeten L definiren wir durch die Gleichung:

52)
$$L = nt + A,$$

wo A Integrationsconstante ist und die mittlere Länge zur Zeit $t = 0$ bezeichnet.

Ferner führen wir die reducirte Zeit (t) ein durch die Relation

53) $$n(t) + A = M + \Pi.$$

Es wird also nach 46)

54) $$n(t) + A = v + \sum B_n \sin nv.$$[1]

Wenn wir diese letztere Gleichung differenziren und berücksichtigen, dass

$$B_n \sin n\text{v} = B_n \cos n\Pi \sin nv - B_n \sin n\Pi \cos nv,$$

so wird

$$n\frac{d(t)}{dv} = 1 + \sum n B_n \cos n\text{v} + \frac{d\Xi}{dv},$$

wo gesetzt ist

55) $$\frac{d\Xi}{dv} = \sum \frac{d(B_n \cos n\Pi)}{dv} \sin nv - \sum \frac{d(B_n \sin n\Pi)}{dv} \cos nv.$$

Bedenkt man die Entwicklung 49), so hat man endlich:

56) $$n\frac{d(t)}{dv} = \frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\eta\cos\text{v})^2} + \frac{d\Xi}{dv}.$$

Wenn wir nun die Differenz zwischen der wahren und der reducirten Zeit durch eine Funktion W darstellen, indem wir setzen:

57) $$nt = n(t) + W,$$

so wird

57a) $$L = nt + A = v + \sum B_n \sin n\text{v} + W,$$

und

57b) $$\frac{dW}{dv} = n\frac{dt}{dv} - n\frac{d(t)}{dv},$$

oder nach 51) und 56):

58) $$\frac{dW}{dv} = \frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\eta\cos\text{v})^2}\left\{\frac{1+S}{\left(1+\frac{R}{1+\eta\cos\text{v}}\right)^2} - 1\right\} - \frac{d\Xi}{dv}.$$

Wenn wir die Entwicklung 49) bedenken, und den vorigen Ausdruck auch nach Potenzen von R und S entwickeln, so erhalten wir zur Bestimmung von W die folgende Differentialgleichung:

---

1) Dass der Buchstabe n hier in zwei verschiedenen Bedeutungen vorkommt, kann wohl zu keinem Missverständniss führen.

59)
$$\frac{dW}{dv} = S-2R-2RS+3R^2\pm\cdots\cdots$$
$$+\{6R-2S-12R^2+6RS\pm\cdots\cdot\}\eta\cos v$$
$$-3\eta^2R+\{\tfrac{3}{2}S-6R\pm\cdots\cdot\}\eta^2\cos 2v$$
$$\pm\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-\frac{d\Xi}{dv}.$$

Wir haben diese Gleichung, welche an Stelle von 3) tritt, hier nur soweit entwickelt, wie sie für die uns vorliegende Aufgabe von Wichtigkeit ist. Man sieht, dass sie vom selben Typus ist, wie die Gleichung 6) für S. Die Integrationsconstante, welche bei ihrer Integration auftritt, werden wir gleich Null setzen, da sie sich mit A vereinigt.

8. Die Funktion Ξ ist äusserst klein, und kann fast immer bei Seite gelassen werden; man kann sie aus 55) bestimmen. Die in 55) auftretenden Grössen $B_n\cos n\Pi$ und $B_n\sin n\Pi$ sind von der Form A, ihre Differentiale sind also rein erster Ordnung, und da sie in Gleichung 55) mit $\sin nv$ und $\cos nv$ multiplicirt werden, so ist Ξ von der Form B, und durch die Integration dieser Gleichung werden keine Glieder vergrössert. Ξ ist also rein erster Ordnung und übrigens ersten Grades, also äusserst klein; will man diese Funktion doch bestimmen, so kann man 55) partiell integriren und erhält:

60)
$$\Xi = -\sum\frac{1}{n}\frac{d(B_n\cos n\Pi)}{dv}\cos nv-\sum\frac{1}{n}\frac{d(B_n\sin n\Pi)}{dv}\sin nv$$
$$+\sum\frac{1}{n}\int\frac{d^2(B_n\cos n\Pi)}{dv^2}\cos nv\,dv+\sum\frac{1}{n}\int\frac{d^2(B_n\sin n\Pi)}{dv^2}\sin nv\,dv.$$

Die in der zweiten Reihe stehenden Glieder werden in allen Fällen vernachlässigt werden können, da die zweiten Differentialquotienten von $B_n\cos n\Pi$ und $B_n\sin n\Pi$ rein zweiter Ordnung sind; auch kann man die partielle Integration fortsetzen, und erhält dann eine sehr stark convergirende Reihe für Ξ.

Indessen lässt sich die Funktion Ξ noch auf eine bequemere Weise bestimmen; die Gleichung 55) lässt sich nämlich folgendermaassen schreiben:

61)
$$\frac{d\Xi}{dv} = \sum\frac{D(B_n\sin nv)}{Dv},$$

wo das Zeichen D bedeutet, dass die Differentiation nur in bezug auf η und Π auszuführen ist, und nicht in bezug auf v, soweit es explicit in $B_n\sin nv$ vorkommt. Man kann diese Gleichung auch schreiben:

$$\frac{d\Xi}{dv} = \sum\left\{\frac{\partial(B_n\sin nv)}{d\eta}\frac{d\eta}{dv}+\frac{\partial(B_n\sin nv)}{d\Pi}\frac{d\Pi}{dv}\right\}.$$

Doch ist diese Form zur Rechnung nicht geeignet. Zur Integration der Gleichung 61) kann man im Ausdruck $B_n \sin n\mathrm{v}$ mit Hilfe der Gleichungen 10) η und Π durch die Grössen $\varkappa_n$ und ω_n ersetzen, wonach sich die weitere Rechnung sehr einfach gestaltet.

9. Unsere Aufgabe ist jetzt auf die Integration der drei Gleichungen 34), 36) und 59) geführt. Ist diese Integration, von der wir im Folgenden handeln, ausgeführt und sind die Funktionen S, η, Π, R und W bestimmt, so gestaltet sich die Berechnung der Coordinaten r und v folgendermaassen:

Es ergiebt sich die mittlere Länge aus:

62)

$$L = nt + \Lambda,$$

dann die mittlere Anomalie nach den Gleichungen 53) und 57) aus:

$$M = L - \Pi - W,$$

ferner die excentrische Anomalie aus:

$$\varepsilon - \eta \sin \varepsilon = M,$$

und die wahre Anomalie aus:

$$\operatorname{tg} \frac{\mathrm{v}}{2} = \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2}.$$

Die wahre Länge in der Bahn und der Radiusvektor werden dann gefunden mittels der Relationen:

62)

$$\left\{\begin{aligned} v &= \mathrm{v} + \Pi \\ (r) &= a(1 - \eta \cos \varepsilon) \\ r &= \frac{(r)}{1 + \dfrac{R}{1 + \eta \cos \mathrm{v}}}.\ ^{1)} \end{aligned}\right.$$

Es wird angebracht sein, diese Relationen mit den entsprechenden Hansen'schen zu vergleichen; dieselben lauten bekanntlich:

$$n_0 z = n_0 t + c_0 + n\,\delta z$$

$$\bar{\varepsilon} - e_0 \sin \bar{\varepsilon} = n_0 z$$

$$\operatorname{tg} \frac{\bar{f}}{2} = \sqrt{\frac{1+e_0}{1-e_0}} \operatorname{tg} \frac{\bar{\varepsilon}}{2}$$

1) Ich werde im zweiten Teile diesen Relationen noch eine andere Form geben, die sich besser zur praktischen Rechnung eignet.

$$v = \bar{f} + \pi_0$$
$$\bar{r} = a_0(1 - e_0 \cos \bar{\varepsilon})$$
$$r = \bar{r}(1 + \nu).$$

Unsere Funktion W giebt also im Wesentlichen die Hansen'schen Störungen der mittleren Anomalie, also die Grösse $n_0 \delta z$ wieder; doch sind die Störungen der Form B von ihr abgezweigt und durch Einführung der Funktionen η und Π berücksichtigt. Dagegen legen wir unseren Rechnungen durchaus andere Bahnelemente zu Grunde als Hansen. Hansen's Elemente n_0, a_0, e_0, c_0, π_0 sind mit einer gewissen Willkürlichkeit zu wählen; sie sollen gleich den osculirenden elliptischen Elementen in irgend einem Zeitpunkt sein, oder wenigstens überhaupt innerhalb der Grenzen liegen, zwischen denen die osculirenden Elemente schwanken können. Diese Grenzen werden, wie Hansen hervorhebt, allerdings nur um Grössen auseinanderliegen, welche von der Ordnung der störenden Masse sind (wobei natürlich von den secularen Störungen abgesehen ist), aber diese Grössen können ihrem numerischen Betrage nach sehr erheblich sein; sie sind nach unserer Definition nicht rein erster Ordnung. Wenn man also nach der Hansen'schen Methode rechnet, so kann es sich ereignen, dass man die Rechnung mit Voraussetzung von Elementen beginnt, welche zwar innerhalb der festgesetzten Grenzen liegen, aber von den wahren (oder mittleren) Elementen erheblich abweichen. Hierdurch können die Resultate gänzlich entstellt werden, namentlich dann, wenn der angenommene Wert von n_0, aus dem die Integrationsdivisoren bestimmt werden, vom wahren stark abweicht.

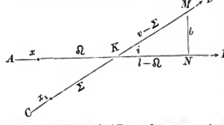
In unseren Formeln sind die Elemente n, a, $\varkappa$, $\varDelta$, $\varGamma$ strenger definirt, und wenn wir stets zu brauchbaren Resultaten kommen wollen, so ist der Spielraum, den man zu ihrer Wahl hat, ausserordentlich klein, jedenfalls viel kleiner als die Schwankungen, denen die osculirenden Elemente ausgesetzt sind.

Drittes Kapitel.

Formeln für die heliocentrische Bewegung des Planeten. — Lage der momentanen Bahnebene zu der als Fundamentalebene gewählten Ekliptik.

1. Nachdem wir im vorigen Kapitel die Bewegung des Planeten in seiner momentanen Bahnebene betrachtet haben, wollen wir jetzt seine Position in bezug auf die feste Fundamentalebene behandeln, damit man im Stande ist, seine heliocentrischen und geocentrischen Coordinaten im Raum zu berechnen.

Sei AB der grösste Kreis, in dem die feste Fundamentalebene der xy die um den Schwerpunkt der Sonne mit dem Radius Eins beschriebene Kugelfläche schneidet, und sei CD der grösste Kreis, in dem die momentane Bahnebene des Planeten diese Kugel schneidet. Sei x der Durchschnittspunkt der x-Axe mit dem Kreise AB und x_1 der Durchschnittspunkt der x_1-Axe mit dem Kreise CD, ferner M der Durchschnittspunkt des Radiusvektors des Planeten mit dem Kreise CD. Fällen wir von M ein Lot auf AB, und nennen seinen Fusspunkt N, so ist xN die Länge und MN die Breite des Planeten in bezug auf die Fundamentalebene, welche Grössen wir durch l und b bezeichnen. Der Pfeil bei B giebt die Richtung der Zählweise von l und der Pfeil bei D die Richtung der Bewegung des Planeten an. Weiter nennen wir K den Schnittpunkt der beiden Kreise AB und CD, also den aufsteigenden Knoten der momentanen Bahnebene und i die Neigung der letzteren. Endlich sei Ω die Länge des aufsteigenden Knotens oder der Bogen xK, sowie Σ der Bogen x_1K. Der Bogen x_1M ist dann die wahre Länge v des Planeten in seiner Bahnebene, und der Bogen KM, d. h. das Argument der Breite, ist gleich $v-\Sigma$.



Aus dem Dreieck KMN folgen die Relationen:

64) $$\sin b = \sin i \sin(v-\Sigma)$$

65) $$\cos b \sin(l-\Omega) = \cos i \sin(v-\Sigma)$$
$$\cos b \cos(l-\Omega) = \cos(v-\Sigma)$$

66) $$\operatorname{tg}(l-\Omega) = \cos i \operatorname{tg}(v-\Sigma).$$

Man kann mit Hilfe der dritten der Gleichungen 15) nach einigen Transformationen die Grössen i, Ω und Σ bestimmen, und dann die Coordinaten l und b des Planeten nach den obigen Formeln aus v berechnen. Indessen wird es angebrachter sein, l und b direkt als Funktionen der Zeit oder der Länge v darzustellen.

2. Hiermit wollen wir uns zunächst beschäftigen und erst später die Relationen für die Grössen i, Ω und Σ aufstellen. Die dritte der Gleichungen 15) lautet:

67) $$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{Mz}{r^3} = M\frac{\partial\Omega}{dz}.$$

Es ist aber:

$$z = r \sin b,$$

und wenn wir mit Gyldén bezeichnen

68) $$\mathfrak{z} = \sin b,$$

so wird

$$z = r\mathfrak{z},$$

und die Gleichung 67) geht in die folgende über:

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} + \frac{\mathfrak{z}}{r}\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{2}{r}\frac{d\mathfrak{z}}{dt}\frac{dr}{dt} + \frac{M\mathfrak{z}}{r^3} = \frac{M}{r}\frac{\partial\Omega}{dz}.$$

Ersetzen wir $\frac{d^2r}{dt^2}$ durch seinen aus 33) folgenden Wert, so wird:

69) $$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} + \mathfrak{z}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{2}{r}\frac{d\mathfrak{z}}{dt}\frac{dr}{dt} = \frac{M}{r}\frac{\partial\Omega}{dz} - \frac{M\mathfrak{z}}{r}\frac{\partial\Omega}{dr}.$$

In diese Gleichung führen wir nun wieder die wahre Länge v als unabhängige Veränderliche ein nach Gleichung 3); man hat:

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} = \frac{1}{r^4}\frac{Ma(1-\eta^2)}{(1+S)^2}\left\{\frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2} - \frac{2}{r}\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\frac{dr}{dv} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-\eta^2}\frac{d\eta^2}{dv}\frac{d\mathfrak{z}}{dv} - \frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv}\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right\},$$

oder mit Berücksichtigung von 34):

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} = \frac{1}{r^4}\frac{Ma(1-\eta^2)}{(1+S)^2}\left\{\frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2} - \frac{2}{r}\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\frac{dr}{dv} + (1+S)^2Q\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right\}.$$

Ferner ist

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = \frac{1}{r^4}\frac{Ma(1-\eta^2)}{(1+S)^2},$$

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dt}\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r^4}\frac{Ma(1-\eta^2)}{(1+S)^2}\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\frac{dr}{dv},$$

und Gleichung 69) geht über in die folgende, welche uns zur Bestimmung von $\mathfrak{z}$ dienen wird:

70) $$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2} + \mathfrak{z} = -(1+S)^2Q\frac{d\mathfrak{z}}{dv} + (1+S)^2Z,$$

wo wir bezeichnet haben:

70a) $$Z = \frac{r^3}{a(1-\eta^2)}\left\{\frac{\partial\Omega}{dz} - \mathfrak{z}\frac{\partial\Omega}{dr}\right\}.$$

Diesen Wert von Z wollen wir noch transformiren; man erhält nämlich aus dem Ausdrucke 16) von Ω:

$$\frac{\partial\Omega}{dz} = \frac{m'}{1+m}\left\{-\frac{z}{\Delta^3}+z'\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)\right\}$$

und aus dem Ausdruck 17):

$$\frac{\partial\Omega}{dr} = \frac{m'}{1+m}\left\{-\frac{r}{\Delta^3}+r'\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)\cos H\right\}.$$

Wenn wir b' die Breite des störenden Planeten in bezug auf die Fundamentalebene nennen und

$$\mathfrak{z}' = \sin b'$$

setzen, so wird auch

$$z' = r'\mathfrak{z}',$$

und die Relation 70a) geht mit Hilfe der vorstehenden in die folgende über:

$$71)\qquad Z = \frac{m'}{1+m}\,\frac{r^2 r'}{a(1-\eta^2)}\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)(\mathfrak{z}'-\mathfrak{z}\cos H).$$

Diesen Ausdruck werden wir zur Entwicklung von Z benutzen.

3. Ich will nun einige Bemerkungen machen über die Integration der Gleichung 70) und über die Form, unter der sich die Funktion $\mathfrak{z}$ darstellen wird. Man sieht, dass diese Gleichung vom selben Typus ist wie die Gleichung 36) für ϱ, also auch wie die Gleichung 5). Die Bemerkungen, welche wir über die Integration der letzteren im ersten Kapitel pag. 18 f. gemacht haben, finden demnach auch auf $\mathfrak{z}$ Anwendung. Diese Funktion wird also elementare Glieder der Form B und charakteristische der Form D enthalten.

Wir setzen darum, ähnlich wie für die Funktion ϱ,

$$72)\qquad \mathfrak{z} = (\mathfrak{z})+\mathfrak{Z},$$

wo $(\mathfrak{z})$ alle Glieder der Form B enthalten soll, und $\mathfrak{Z}$ demnach mit der störenden Masse multiplicirt ist. In $\mathfrak{Z}$ werden sich aber, gerade wie in R, charakteristische Glieder der Form D vorfinden, wenn das Verhältniss der mittleren Bewegungen des störenden und des gestörten Planeten nahezu commensurabel ist.

Ebenso wie wir für (ϱ) den Ausdruck 8) eingeführt haben, setzen wir $(\mathfrak{z})$ unter die Form:

$$(\mathfrak{z}) = \sin\iota\sin[(1+\tau)v-\Theta]+\sum\sin\iota_n\sin[(1+\tau_n)v-\Theta_n],$$

wo die Grössen ι_n, τ, τ_n, Θ_n Constanten und ι und Θ die beiden Integrationsconstanten sind. τ und die τ_n sind von der Ordnung der störenden Massen.

Wir setzen weiter:

$$73)\qquad \begin{aligned}\vartheta &= \Theta-\tau v\\ \vartheta_n &= \Theta_n-\tau_n v,\end{aligned}$$

wonach also:

74) $$(\mathfrak{z}) = \sin\iota\sin(v-\vartheta) + \sum \sin\iota_n \sin(v-\vartheta_n).$$

Gyldén hat nun zwei Funktionen $\sin j$ und σ eingeführt, welche wie η und Π langperiodischer Natur und von der Form A sind; wir setzen:

75) $$\sin j \,{}^{\cos}_{\sin}\,\sigma = \sin\iota \,{}^{\cos}_{\sin}\,\vartheta + \sum \sin\iota_n \,{}^{\cos}_{\sin}\,\vartheta_n.$$

Es wird dann:

76) $$(\mathfrak{z}) = \sin j \sin(v-\sigma) = \sin j \sin \mathfrak{v},$$

wenn wir nämlich bezeichnen:

77) $$\mathfrak{v} = v - \sigma.$$

Die Funktion σ wird indessen, wie Π, auch einen secularen Teil enthalten und man kann setzen:

78) $$\sigma = \sigma_0 - \tau v.$$

Es bestehen dann auch die Relationen:

79) $$\begin{aligned} \sin j \cos\sigma_0 &= \sin\iota\cos\Theta + \sum \sin\iota_n \cos(\vartheta_n + \tau v) \\ \sin j \sin\sigma_0 &= \sin\iota\sin\Theta + \sum \sin\iota_n \sin(\vartheta_n + \tau v) \end{aligned}$$

80) $$\begin{aligned} \sin j \cos(\sigma_0 - \Theta) &= \sin\iota + \sum \sin\iota_n \cos(\vartheta_n - \vartheta) \\ \sin j \sin(\sigma_0 - \Theta) &= \qquad\quad \sum \sin\iota_n \sin(\vartheta_n - \vartheta), \end{aligned}$$

sowie

81) $$\sin^2 j = (\mathfrak{z})^2 + \left(\frac{D(\mathfrak{z})}{dv}\right)^2,$$

wo das Zeichen D bedeutet, dass bei der Differentiation die Grössen ϑ und ϑ_n als constant anzusehen sind.

Die Funktion $\sin j$ und die Grössen $\sin\iota$ und $\sin\iota_n$ werden ihrem Betrage nach vergleichbar sein mit den Neigungssinus der momentanen Bahnebenen der Planeten gegen die Ekliptik und wir werden sie, ebenso wie η und die $\varkappa_n$ als Grössen vom ersten Grade bezeichnen; ein jedes Glied, dass die n-te Potenz einer dieser Grössen oder ein äquivalentes Produkt enthält, wird also vom n-ten Grade sein.

4. Das Integral der Gleichung 70) giebt uns die Breite des gestörten Planeten, da $\mathfrak{z} = \sin b$; ich will nun auch den Ausdruck für die Länge l anfstellen. Wenn wir die Gleichung 66) differenziren und dabei nach dem Principe der Osculation i, Ω und Σ als constant ansehen, so kommt:

$$\frac{dl}{dv} = \cos i \frac{\cos^2(l-\Omega)}{\cos^2(v-\Sigma)}.$$

Aus dem Dreieck *MNK* in der Figur pag. 36 folgt aber:

$$\cos(v-\Sigma) = \cos b \cos(l-\Omega),$$

also wird

82) $$\frac{dl}{dv} = \frac{\cos i}{\cos^2 b},$$

in welcher Gleichung wir noch i und b durch $\mathfrak{z}$ und $\frac{d\mathfrak{z}}{dv}$ ersetzen wollen; wir können die Gleichung

83) $$\mathfrak{z} = \sin b = \sin i \sin(v-\Sigma)$$

differenziren, indem wir wieder i und Σ als constant ansehen uud erhalten:

83a) $$\frac{d\mathfrak{z}}{dv} = \sin i \cos(v-\Sigma).$$

Es folgt aus den beiden letzten Gleichungen:

84) $$\sin^2 i = \mathfrak{z}^2 + \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2,$$

also auch

85) $$\cos i = \sqrt{1-\mathfrak{z}^2-\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2}.$$

Die Gleichung 82) geht also in die folgende über:

$$\frac{dl}{dv} = \frac{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2-\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2}}{1-\mathfrak{z}^2},$$

oder integrirt:

86) $$l = v + \int\left\{\frac{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2-\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2}}{1-\mathfrak{z}^2} - 1\right\}dv.$$ [1]

Der Ausdruck unter dem Integralzeichen kann nach Potenzen von $\mathfrak{z}^2$ und $\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2$ entwickelt werden, da $\mathfrak{z}$ vom ersten Grade ist, und es wird:

87) $$l = v + \tfrac{1}{2}\int\left\{\mathfrak{z}^2-\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2\right\}dv \pm \cdots\cdots,$$

wo ich die Glieder vom vierten Grade ab vernachlässigt habe, da sie meist äusserst klein sind.

---

1) Vgl. Harzer, Untersuchungen über einen speciellen Fall des Problems der drei Körper. Mémoires de l'Académie de St. Pétersbourg. VII. Série. Tome XXXIV, No. 12, pag. 22.

Die Relation 87) enthält eine überzählige Integrationsconstante; wir setzen sie gleich Null, bestimmen sie also so, dass $l = v$ wird, wenn $i = 0$, oder, was dasselbe ist, wenn $\mathfrak{z} = \frac{d\mathfrak{z}}{dv} = 0$ ist. Hierdurch ist auch die Integrationsconstante der Gleichungen c_1) und c_2) (pag. 24) bestimmt, welche die Lage der x_2-Axe für einen bestimmten Zeitpunkt giebt.

Nach dem Vorigen werden sich die Längen l und v, und ebenso die Knotenlängen Ω und Σ von einander nur um Grössen zweiten Grades unterscheiden.

5. Die Integration der Gleichung 87) ist leicht auszuführen; indessen muss bedacht werden, dass die Integrale $\int \mathfrak{z}^2 dv$ und $\int \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2 dv$ ausserordentlich grosse Glieder von der Form A enthalten, die sich in der Differenz $\int \left\{\mathfrak{z}^2 - \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2\right\} dv$ herausheben. Ich will darum den Ausdruck für die letztere analytisch ableiten, damit das Auftreten dieser grossen Glieder in den numerischen Rechnungen vermieden werde.

Wenn wir der Kürze halber bezeichnen:

88) $$\nu_1 = \sin j \cos \sigma, \qquad \nu_2 = \sin j \sin \sigma,$$

so sind offenbar ν_1 und ν_2 elementare Grössen von der Form A, welche bei jeder Differentiation einen der Faktoren τ_n erhalten.

Es wird

89) $$\begin{aligned}(\mathfrak{z}) &= \nu_1 \sin v - \nu_2 \cos v \\ \frac{d(\mathfrak{z})}{dv} &= \nu_1 \cos v + \nu_2 \sin v + \frac{d\nu_1}{dv} \sin v - \frac{d\nu_2}{dv} \cos v.\end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung leitet man die folgende ab, mit Vernachlässigung der Glieder rein zweiter Ordnung, die wohl in keinem Falle merklich werden dürften:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{z})^2 - \left(\frac{d(\mathfrak{z})}{dv}\right)^2 = &- (\nu_1^2 - \nu_2^2) \cos 2v - 2\nu_1 \nu_2 \sin 2v \\ &- \left\{\nu_1 \frac{d\nu_1}{dv} - \nu_2 \frac{d\nu_2}{dv}\right\} \sin 2v + \left\{\nu_1 \frac{d\nu_2}{dv} + \nu_2 \frac{d\nu_1}{dv}\right\} \cos 2v \\ &+ \nu_1 \frac{d\nu_2}{dv} - \nu_2 \frac{d\nu_1}{dv},\end{aligned}$$

oder integrirt:

$$\int \left\{(\mathfrak{z})^2 - \left(\frac{d(\mathfrak{z})}{dv}\right)^2\right\} dv = -\frac{\nu_1^2 - \nu_2^2}{2} \sin 2v + \nu_1 \nu_2 \cos 2v + \int \left\{\nu_1 \frac{d\nu_2}{dv} - \nu_2 \frac{d\nu_1}{dv}\right\} dv.$$

Mit Berücksichtigung von 88) geht diese Relation aber über in:

90) $$\int\left\{(\mathfrak{z})^2 - \left(\frac{d(\mathfrak{z})}{dv}\right)^2\right\} dv = -\tfrac{1}{2}\sin^2 j \sin 2v + \int\left\{\nu_1 \frac{d\nu_2}{dv} - \nu_2 \frac{d\nu_1}{dv}\right\} dv.$$

Wir wollen nun die Integrale rechter Hand in dieser Gleichung ausführen. Es ist nach 88) und 75):

91) $$\frac{d\nu_1}{dv} = \tau \sin\iota \sin\vartheta + \sum \tau_n \sin\iota_n \sin\vartheta_n$$
$$\frac{d\nu_2}{dv} = -\tau \sin\iota \cos\vartheta - \sum \tau_n \sin\iota_n \cos\vartheta_n .$$

und demnach:

$$\nu_1 \frac{d\nu_2}{dv} - \nu_2 \frac{d\nu_1}{dv} = -\tau \sin^2\iota - \sum \tau_n \sin^2\iota_n$$
$$-(\tau+\tau_1)\sin\iota \sin\iota_1 \cos(\vartheta_1-\vartheta) - (\tau+\tau_2)\sin\iota\sin\iota_2\cos(\vartheta_2-\vartheta) - (\tau+\tau_3)\sin\iota\sin\iota_3\cos(\vartheta_3-\vartheta) - \cdots$$
$$-(\tau_1+\tau_2)\sin\iota_1\sin\iota_2\cos(\vartheta_2-\vartheta_1) - (\tau_1+\tau_3)\sin\iota_1\sin\iota_3\cos(\vartheta_3-\vartheta_1) - \cdots$$
$$-(\tau_2+\tau_3)\sin\iota_2\sin\iota_3\cos(\vartheta_3-\vartheta_2) - \cdots$$
$$-\cdots,$$

und die Integration dieses Ausdrucks führt zu elementaren Gliedern zweiten Grades.

Wir können endlich nach dem Vorigen die Gleichung 87), wie folgt, schreiben:

92) $$l = v - \tfrac{1}{4}\sin^2 j \sin 2v + \mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2,$$

wo

93) $$\mathrm{H}_1 = -\tfrac{1}{2}\left\{\tau \sin^2\iota + \sum \tau_n \sin^2\iota_n\right\} v$$
$$-\tfrac{1}{2}\frac{\tau+\tau_1}{\tau-\tau_1}\sin\iota\sin\iota_1\sin(\vartheta_1-\vartheta) - \tfrac{1}{2}\frac{\tau+\tau_2}{\tau-\tau_2}\sin\iota\sin\iota_2\sin(\vartheta_2-\vartheta) - \cdots\cdots$$
$$-\tfrac{1}{2}\frac{\tau_1+\tau_2}{\tau_1-\tau_2}\sin\iota_1\sin\iota_2\sin(\vartheta_2-\vartheta_1) - \cdots\cdots$$
$$-\cdots\cdots$$

93a) $$\frac{d\mathrm{H}_2}{dv} = (\mathfrak{z})\mathfrak{Z} - \frac{d(\mathfrak{z})}{dv}\frac{d\mathfrak{Z}}{dv} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{Z}^2 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\right)^2,$$

und wo die Funktion H_2 fast immer vernachlässigt werden kann. Für diejenigen Planeten, für welche dies nicht der Fall ist, weil $\mathfrak{Z}$ beträchtlich wird, werde ich übrigens im zweiten Teile die Relation für l in etwas veränderter Form aufstellen.

Die Funktion H_1 enthält ein seculares Glied, das allerdings während eines kürzeren Zeitraums unmerklich klein bleibt; dies Glied findet sich also in der

Differenz $l-v$ und, wie wir gleich sehen werden, auch in der Differenz $\Omega - \Sigma$. Man kann es natürlich zum Verschwinden bringen, und zwar am einfachsten dadurch, dass man die Lage der x_1-Axe so wählt, dass Ω gleich Σ wird; dann gelten aber die Bedingungen c_1) und c_2) des zweiten Kapitels nicht mehr, und unsere übrigen Differentialgleichungen würden sich wesentlich compliciren.

6. Es sollen nun die Ausdrücke für die Funktionen i, Ω und Σ hergeleitet werden, für den Fall, dass man die Lage der momentanen Bahnebene bestimmen will.

Wir haben oben schon die Gleichung 84)

$$\sin^2 i = \mathfrak{z}^2 + \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2$$

gefunden, aus der i berechnet werden kann. Ich will jedoch noch eine zweckmässigere Relation ableiten. Wenn man nämlich von den beiden Gleichungen

$$\mathfrak{z} = \sin i \sin(v-\Sigma) \qquad \text{und} \qquad \frac{d\mathfrak{z}}{dv} = \sin i \cos(v-\Sigma),$$

die erste mit $\sin v$, die zweite mit $\cos v$ multiplicirt, und addirt, so wird:

$$\sin i \cos \Sigma = \mathfrak{z} \sin v + \frac{d\mathfrak{z}}{dv}\cos v, \tag{94}$$

und wenn man die erste mit $-\cos v$, die zweite mit $\sin v$ multiplicirt und wieder addirt, so wird:

$$\sin i \sin \Sigma = -\mathfrak{z}\cos v + \frac{d\mathfrak{z}}{dv}\sin v. \tag{95}$$

Diese Relationen dienen zur Bestimmung von i und Σ; man kann sie noch weiter transformiren mit Hilfe von 89) und 88) und erhält dann mit Vernachlässigung der Glieder rein erster Ordnung:

$$\text{96)} \quad \begin{aligned} \sin i \cos \Sigma &= \sin j \cos \sigma + \mathfrak{Z} \sin v + \frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\cos v \\ \sin i \sin \Sigma &= \sin j \sin \sigma - \mathfrak{Z}\cos v + \frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\sin v. \end{aligned}$$

In den Fällen, wo $\mathfrak{Z}$ nicht sehr gross ist oder wo es sich nicht um sehr grosse Genauigkeit handelt, setzt man einfach:

$$i = j \qquad \text{und} \qquad \Sigma = \sigma. \tag{97}$$

Zur Berechnung der Knotenlänge Ω endlich will ich die Gleichungen 65) benutzen. Multipliciren wir die erste mit $-\cos(v-\Sigma)$, die zweite mit $\sin(v-\Sigma)$ und addiren wir, so wird:

$$\sin(v-l+\Omega-\Sigma) = \frac{1-\cos i}{\cos b}\sin(v-\Sigma)\cos(v-\Sigma).$$

Da man aber hat:

$$\cos b = \sqrt{1-\mathfrak{z}^2}, \qquad \sin(v-\Sigma) = \frac{\mathfrak{z}}{\sin i}, \qquad \cos(v-\Sigma) = \frac{\frac{d\mathfrak{z}}{dv}}{\sin i},$$

so wird:

$$\sin(v-l+\Omega-\Sigma) = \frac{1}{1+\cos i}\,\frac{\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{dv}}{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}},$$

oder endlich mit Hilfe von 85):

98) $$\sin(v-l+\Omega-\Sigma) = \frac{\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{dv}}{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}\left\{1+\sqrt{1-\mathfrak{z}^2-\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2}\right\}},$$

oder mit Vernachlässigung der Glieder vierten Grades:

99) $$\Omega-\Sigma = \tfrac{1}{2}\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{dv}+(l-v).$$

Aus dieser Gleichung lässt sich durch Differentiation und Vergleichung mit 87) auch die folgende ableiten:

99a) $$\frac{d(\Omega-\Sigma)}{dv} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{z}\left\{\frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2}+\mathfrak{z}\right\},$$

welche man natürlich auch direkt finden kann. Wir wollen indessen die Form 99) beibehalten, und da bis auf Glieder rein erster Ordnung:

$$(\mathfrak{z})\frac{d(\mathfrak{z})}{dv} = \tfrac{1}{2}\sin^2 j\sin 2v,$$

so erhalten wir mit derselben Genauigkeit nach 92):

100a) $$\Omega-\Sigma = \mathrm{H}_1+\mathrm{H}_2+\tfrac{1}{2}(\mathfrak{z})\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}+\tfrac{1}{2}\mathfrak{Z}\frac{d(\mathfrak{z})}{dv}+\tfrac{1}{2}\mathfrak{Z}\frac{d\mathfrak{Z}}{dv},$$

oder nach einer unschwer auszuführenden Transformation:

100b) $$\Omega-\Sigma = \mathrm{H}_1+\tfrac{1}{2}\int\left\{(\mathfrak{z})\left[\frac{d^2\mathfrak{Z}}{dv^2}+\mathfrak{Z}\right]+\mathfrak{Z}\left[\frac{d^2(\mathfrak{z})}{dv^2}+(\mathfrak{z})\right]+\mathfrak{Z}\left[\frac{d^2\mathfrak{Z}}{dv^2}+\mathfrak{Z}\right]\right\}dv,$$

wofür man in fast allen Fällen setzen kann:

100c) $$\Omega-\Sigma = \mathrm{H}_1.$$

Viertes Kapitel.

Entwicklung der Störungsfunktion Ω und ihrer partiellen Ableitungen Q, P und Z.

1. Zur Integration der Differentialgleichungen 34) und 36) brauchen wir die Funktionen Q und P, welche jetzt entwickelt werden sollen. Die Störungsfunktion Ω ist durch die Gleichung 17) gegeben; wir multipliciren sie mit der Halbaxe a, die durch die Relation 2) eingeführt wurde und haben:

101) $$a\Omega = \frac{m'}{1+m}\left\{\frac{a}{\varDelta} - \frac{ar}{r'^2}\cos H\right\}, \text{ wo } \varDelta = \sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos H}.$$

Ich will zunächst den Ausdruck $\cos H$ transformiren, der sowohl implicit in $\varDelta$ als auch explicit vorkommt und zwar soll er nach Potenzen der Neigungen entwickelt werden.

Bekanntlich ist Tisserand[1]) der erste gewesen, welcher eine Entwicklung der Störungsfunktion gegeben hat, die auch bei grossen Bahnneigungen brauchbar bleibt. Ich wende dasselbe Princip an, wie Tisserand und Gyldén, und die Hauptzüge der folgenden Entwicklung wird man auch in Gyldén's „Traité des Orbites absolues" (Tome I. Livre II. Chap. II und Livre III. Chap. II.) vorfinden. Da wir die Glieder dritten Grades hier vernachlässigen, so können wir unsere Entwicklungen äusserst einfach gestalten.

Es ist bekanntlich:

$$\cos H = \frac{xx'+yy'+zz'}{rr'},$$

welche Relation übrigens durch Vergleichung von 16) und 17) verificirt werden kann. Mit Hilfe der Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= r\cos b\cos l & x' &= r'\cos b'\cos l' \\ y &= r\cos b\sin l & y' &= r'\cos b'\sin l' \\ z &= r\sin b, & z' &= r'\sin b', \end{aligned}$$

wo sich die mit einem Accent versehenen Grössen auf den störenden Körper beziehen, findet man:

$$\cos H = \cos b\cos b'\cos(l-l') + \sin b\sin b'.$$

1) Tisserand, Développement de la fonction perturbatrice etc. Annales de l'Observatoire de Paris. Mémoires, Tome XV. — Und Traité de Mécanique Céleste. Tome I. Kapitel XXVIII. — Siehe auch Backlund, Zur Entwicklung der Störungsfunktion. Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg. VII. Série. Tome XXXII. No. 4.

Bedenkt man die Relationen:

$$\mathfrak{z} = \sin b \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{z}' = \sin b',$$

so wird:

102) $$\cos H = \sqrt{1-\mathfrak{z}^2}\;\sqrt{1-\mathfrak{z}'^2}\cos(l-l') + \mathfrak{z}\mathfrak{z}',$$

oder wenn man nach Potenzen von $\mathfrak{z}^2$ und $\mathfrak{z}'^2$ entwickelt und die Grössen vierten Grades fortlässt:

103) $$\cos H = \cos(l-l') - \frac{\mathfrak{z}^2+\mathfrak{z}'^2}{2}\cos(l-l') + \mathfrak{z}\mathfrak{z}'.$$

Die Gleichung 99) giebt nun aber mit derselben Genauigkeit:

$$l = v + (\Omega - \Sigma) - \tfrac{1}{2}\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{dv},$$

und da man für den störenden Körper ganz ähnlich hat:

$$l' = v' + (\Omega' - \Sigma') - \tfrac{1}{2}\mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'},$$

so kommt:

$$l - l' = v - v' + (\Omega - \Sigma) - (\Omega' - \Sigma') - \tfrac{1}{2}\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{dv} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'}.$$

Ich führe der grösseren Bequemlichkeit halber die Bezeichnungen:

103a) $$\Omega - \Sigma = \mathrm{H}, \qquad \Omega' - \Sigma' = \mathrm{H}'$$

ein und setze

104) $$H_1 = v - v' + \mathrm{H} - \mathrm{H}'.$$

Es folgt aus den vorstehenden Gleichungen, wieder mit Vernachlässigung der Glieder vierten Grades:

$$\cos(l-l') = \cos H_1 + \frac{\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{dv} - \mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'}}{2}\sin H_1.$$

Schreiben wir nun Gleichung 103) folgendermassen, wie schon Gyldén gethan hat:

105) $$\cos H = \cos H_1 + h,$$

so ist die Funktion h mit Fortlassung der Glieder vierten Grades, wie folgt, gegeben:

106) $$h = -\frac{\mathfrak{z}^2+\mathfrak{z}'^2}{2}\cos H_1 + \frac{\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{dv} - \mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'}}{2}\sin H_1 + \mathfrak{z}\mathfrak{z}'.$$

Den Wert 105) für $\cos H$ führen wir in die Gleichung 101) ein, indem wir nach Potenzen von h entwickeln; wenn wir bezeichnen:

107) $$(\varDelta) = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos H_1}$$

108) $$a(\Omega) = \frac{m'}{1+m}\left\{\frac{a}{(\varDelta)} - \frac{ar}{r'^2}\cos H_1\right\},$$

so ist offenbar nach Fortlassung von h^2, welches vierten Grades ist:

109) $$a\Omega = a(\Omega) + \frac{ad(\Omega)}{d\cos H_1}h,$$

wo bei der Differentiation natürlich r und r' als constant anzusehen sind. Wir haben also die beiden Ausdrücke $a(\Omega)$ und $\frac{ad(\Omega)}{d\cos H_1}$ zu entwickeln.

2. Zur Entwicklung von

108) $$a(\Omega) = \frac{m'}{1+m}\left\{\frac{a}{(\varDelta)} - \frac{ar}{r'^2}\cos H_1\right\}$$

setzen wir:

110) $$\frac{a}{(\varDelta)} = R_0 + 2R_1\cos H_1 + 2R_2\cos 2H_1 + \cdots\cdots,$$

und haben nach Fourier's Theorem:

$$R_n = \frac{a}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos n\psi\, d\psi}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\psi}}.$$

Wenn es sich um Störungen der kleinen Planeten durch Jupiter handelt, so ist beständig r' grösser als r, und wir schreiben:

$$R_n = \frac{a}{\pi}\frac{1}{r'}\int_0^\pi \frac{\cos n\psi\, d\psi}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{r'}\right)^2 - 2\frac{r}{r'}\cos\psi}}.$$

Wir stellen nun den Radiusvektor r' des störenden Planeten in ganz derselben Weise dar, wie den des gestörten und setzen in Analogie mit der Relation 2)

111) $$r' = \frac{a'(1-\eta'^2)}{1+\varrho'},$$

wo a' die Halbaxe der Bahn des störenden Planeten ist, eine Grösse, die, ebenso wie die Funktionen ϱ' und η' als bekannt angenommen wird. η' ist von der Ordnung der Excentricität des störenden Körpers und wir bezeichnen diese Funktion ebenso wie η als eine Grösse ersten Grades. Im allgemeinen wird

man, wie schon oben bemerkt, an Stelle der Gleichung 111) einfach die Gleichung der Ellipse setzen können.

Es soll ferner, wie gewöhnlich, bezeichnet werden:

112) $$\alpha = \frac{a}{a'},$$

so dass α in den von uns behandelten Fällen kleiner als Eins ist. Wir setzen weiter

113) $$\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\left(\frac{r}{a}\right)^2 = 1-\lambda,$$

und dann ist λ offenbar, nach 2) und 111) von derselben Grössenordnung wie ϱ und ϱ' ist; es wird:

$$\left(\frac{r}{r'}\right)^2 = \alpha^2(1-\lambda),$$

und wir können R_n in der folgenden Form schreiben:

114) $$R_n = \frac{a}{\pi}\frac{1}{r'}\int_0^\pi \frac{\cos n\psi\, d\psi}{\sqrt{1+k^2-2k\cos\psi}},$$

wo wir zur Abkürzung

$$k = \alpha\sqrt{1-\lambda} = \frac{r}{r'}$$

gesetzt haben. Das Integral 114) lässt sich mit Hilfe einiger bekannter Sätze auf eine geeignetere Form bringen; da wir in der nächsten No. eine ähnliche Umformung vorzunehmen haben, so soll dieselbe gleich hier in allgemeinerer Form angesetzt werden.

Nach Jacobi ist nämlich[1]):

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\psi\, d\psi}{(1+k^2-2k\cos\psi)^{\frac{m}{2}}} = \frac{m(m+2)\cdots[m+2(n-1)]}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}k^n\int_0^\pi \frac{\sin^{2n}\psi\, d\psi}{(1+k^2-2k\cos\psi)^{n+\frac{m}{2}}},$$

und auf die rechte Seite dieser Relation kann man die Landen'sche Transformation anwenden, indem man setzt:

$$\cos\psi = k\sin^2\varphi + \cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi},$$

woraus folgt:

1) Siehe Gyldén, Traité analytique des Orbites absolues des 8 Planètes principales. Tome I. pag. 394.

$$\sin\psi = \sin\varphi\,\{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} - k\cos\varphi\}$$

$$\sqrt{1+k^2-2k\cos\psi} = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} - k\cos\varphi = \frac{\sin\psi}{\sin\varphi}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+k^2-2k\cos\psi}} = \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}+k\cos\varphi}{1-k^2}$$

$$\frac{d\psi}{\sqrt{1+k^2-2k\cos\psi}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

und hiermit geht die Jacobi'sche Relation über in:

115) $$\int_0^\pi \frac{\cos n\psi\, d\psi}{(1+k^2-2k\cos\psi)^{\frac{m}{2}}} = \frac{m(m+2)\cdots\cdots[m+2(n-1)]}{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2n-1)}\,\frac{k^n}{(1-k^2)^{m-1}}\int_0^\pi \{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}+k\cos\varphi\}^{m-1}\frac{\sin^{2n}\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Diese Transformation können wir anwenden auf das Integral rechter Hand der Gleichung 114), indem wir $m = 1$ annehmen und erhalten:

$$R_n = \frac{1}{\pi}\,\frac{a'}{r'}\,\alpha^{n+1}(1-\lambda)^{\frac{n}{2}}\int_0^\pi \frac{\sin^{2n}\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2(1-\lambda)\sin^2\varphi}}.$$

Da dies Integral zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ denselben Wert hat, wie zwischen den Grenzen $\frac{\pi}{2}$ und π, so wird, wenn wir den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen etwas anders schreiben:

$$\frac{1}{\pi}\,\alpha^{n+1}\int_0^\pi \frac{\sin^{2n}\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2(1-\lambda)\sin^2\varphi}} = \frac{2}{\pi}\,\alpha^{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}\sqrt{1+\dfrac{\alpha^2\lambda\sin^2\varphi}{1-\alpha^2\sin^2\varphi}}}.$$

Jetzt entwickeln wir endlich das Integral nach Potenzen von λ, und erhalten folgende Reihe:

116) $$\frac{1}{\pi}\,\alpha^{n+1}\int_0^\pi \frac{\sin^{2n}\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2(1-\lambda)\sin^2\varphi}} = \gamma_{n,0} - \gamma_{n,1}\lambda + \gamma_{n,2}\lambda^2 - + \cdots\cdots,$$

wo wir nach Gyldén's Vorgang bezeichnen:

$$\beta_n^{(s)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}\varphi\, d\varphi}{(1-\alpha^2\sin^2\varphi)^{\frac{s}{2}}}$$

117) $$\gamma_{n,0} = \alpha^{n+1}\beta_n^{(1)}, \qquad \gamma_{n,1} = \tfrac{1}{2}\alpha^{n+3}\beta_{n+1}^{(3)}, \qquad \gamma_{n,2} = \tfrac{3}{8}\alpha^{n+5}\beta_{n+2}^{(5)}$$

$$\gamma_{n,\sigma} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\sigma-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2\sigma}\,\alpha^{n+2\sigma+1}\beta_{n+\sigma}^{(2\sigma+1)},$$

und hiermit wird:

118)
$$R_n = \frac{a'}{r'}(1-\lambda)^{\frac{n}{2}}\{\gamma_{n\cdot 0}-\gamma_{n\cdot 1}\lambda+\gamma_{n\cdot 2}\lambda^2-+\cdots\}.$$

Die Coefficienten $\gamma_{n\cdot\sigma}$ hängen nur von dem Verhältnisse α ab, und sind ohne Schwierigkeiten zu berechnen. Für die $\beta_n^{(s)}$ hat bereits Masal[1]) Tafeln hergestellt, aus denen man mit $\log\alpha$ als Argument diese Coefficienten entnehmen kann, und ähnliche Tafeln für die $\gamma_{n\cdot\sigma}$ hat Gyldén kurz vor seinem Tode fertiggestellt[2]).

Nun ist nach 108)

$$a(\Omega) = \frac{m'}{1+m}\left\{\frac{a}{(\Delta)}-\frac{a'}{r'}\alpha^2(1-\lambda)^{\frac{1}{2}}\cos H_1\right\};$$

es kommt also:

$$a(\Omega) = \frac{m'}{1+m}\left\{R_0+\left[2R_1-\frac{a'}{r'}\alpha^2(1-\lambda)^{\frac{1}{2}}\right]\cos H_1+2R_2\cos 2H_1+\cdots\right\}.$$

Wir schreiben:

$$\begin{aligned} a(\Omega) &= \Omega_0+2\Omega_1\cos H_1+2\Omega_2\cos 2H_1+\cdots \\ &= 2\sum{}'\Omega_n\cos nH_1, \end{aligned}$$

wo der Accent am $\sum$-Zeichen bedeutet, dass im ersten Gliede der Reihe (für $n=0$) der Faktor 2 zu unterdrücken ist; man hat also:

$$\Omega_n = \frac{m'}{1+m}R_n$$

für alle Werte von n, mit Ausnahme von $n = 1$, wo zu setzen ist:

$$\Omega_1 = \frac{m'}{1+m}\left\{R_1-\frac{1}{2}\frac{a'}{r'}\alpha^2(1-\lambda)^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

Bezeichnet man

119)
$$\bar\gamma_{1\cdot 0} = \gamma_{1\cdot 0}-\frac{\alpha^2}{2},$$

so ist

$$\Omega_n = \frac{m'}{1+m}\frac{a'}{r'}(1-\lambda)^{\frac{n}{2}}\left\{\bar\gamma_{n\cdot 0}-\gamma_{n\cdot 1}\lambda+\gamma_{n\cdot 2}\lambda^2-+\cdots\right\},$$

wo

$$\bar\gamma_{n\cdot 0} = \gamma_{n\cdot 0}$$

---

1) Hans Masal, Tables de l'Intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2n}\varphi\,d\varphi}{(1-\alpha^2\sin^2\varphi)^{\frac{s}{2}}}$. Astronomiska Iakttagelser och Undersökningar anstälda på Stockholms Observatorium. Band IV. Heft 5.

2) Gyldén, Hülfstafeln. Publication der astronomischen Gesellschaft. No. XXI.

zu nehmen ist, mit Ausnahme des Wertes $n = 1$, für den die Relation 119) gilt.

In der letzteren Gleichung für Ω_n sollen λ und r' durch die Grössen ϱ, ϱ', η und η' ersetzt werden, nach deren Potenzen wir die Ω_n entwickeln.

Man hat

$$\lambda = 1-\left(\frac{1-\eta^2}{1+\varrho}\right)^2 \left(\frac{1+\varrho'}{1-\eta'^2}\right)^2,$$

oder wenn man entwickelt und die Glieder dritten Grades noch berücksichtigt:

120)
$$\begin{aligned}
\lambda &= 2\varrho-2\varrho' \\
&\quad -3\varrho+4\varrho\varrho'-\varrho'^2+2\eta^2-2\eta'^2 \\
&\quad +4\varrho^3-6\varrho^2\varrho'+2\varrho\varrho'^2-4\varrho\eta^2+4\varrho'\eta^2+4\varrho\eta'^2-4\varrho'\eta'^2 \\
\lambda^2 &= 4\varrho^2-8\varrho\varrho'+4\varrho'^2 \\
&\quad -12\varrho^3+28\varrho^2\varrho'-20\varrho\varrho'^2+4\varrho'^3+8\varrho\eta^2-8\varrho\eta'^2-8\varrho'\eta^2-8\varrho'\eta'^2 \\
\lambda^3 &= 8\varrho^3-24\varrho^2\varrho'-24\varrho\varrho'^2-8\varrho'^3.
\end{aligned}$$

Ferner bildet man leicht:

120a)
$$\begin{aligned}
\frac{a'}{r'}(1-\lambda)^{\frac{n}{2}} &= \frac{(1+\varrho')^{n+1}}{(1+\varrho)^n}\,\frac{(1-\eta^2)^n}{(1-\eta'^2)^{n+1}} \\
&= 1-n\varrho+(n+1)\varrho' \\
&\quad +\frac{n(n+1)}{2}\varrho^2-(n+1)\varrho\varrho'+\frac{n(n+1)}{2}\varrho'^2-n\eta^2-(n+1)\eta'^2 \\
&\quad -\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\varrho^3+\frac{n(n+1)^2}{2}\varrho^2\varrho'-\frac{n^2(n+1)}{2}\varrho\varrho'^2+\frac{(n-1)n(n+1)}{6}\varrho'^3 \\
&\quad +n^2\varrho\eta^2-n(n+1)\varrho'\eta^2-n(n+1)\varrho\eta'^2+(n+1)^2\varrho'\eta'^2.
\end{aligned}$$

Diese Werte führen wir ein in den obigen Ausdruck für Ω_n, und setzen:

121)
$$\begin{aligned}
\Omega_n &= \Sigma\Sigma\Sigma\Sigma\,\Omega_{(n.s.s')\nu.\nu'}\,\varrho^s\varrho'^{s'}\eta^{2\nu}\eta'^{2\nu'} \\
a(\Omega) &= 2\Sigma\,\Omega_{(n.s.s')\nu.\nu'}\,\varrho^s\varrho'^{s'}\eta^{2\nu}\eta'^{2\nu'}\cos nH_1,
\end{aligned}$$

wo ich statt des fünffachen Σ-Zeichens ein einfaches gesetzt habe, und wo der Faktor 2 für $n = 0$ zu unterdrücken ist.

Dann wird, wenn wir der Kürze halber in den rechten Seiten der folgenden Relationen[1]) den Faktor $\frac{m'}{1+m}$ fortlassen, und wenn wir die Indices ν und ν',

1) Siehe auch die pag. 24 citirte Abhandlung von Herrn Harzer, wo indessen für $\nu = 1$ die Ω-Coefficienten anderes Vorzeichen haben.

da wo sie beide gleich Null sind, ebenfalls fortlassen, also stets $\Omega_{n.s.s'}$ schreiben für $\Omega_{(n.s.s')_{00}}$:

122) $$\Omega_{n.0.0} = \bar{\gamma}_{n\cdot 0}$$

$$\Omega_{n.1.0} = -n\bar{\gamma}_{n\cdot 0} - 2\gamma_{n\cdot 1}$$
$$\Omega_{n.0.1} = (n+1)\bar{\gamma}_{n\cdot 0} + 2\gamma_{n\cdot 1}$$

$$\Omega_{n.2.0} = \frac{n(n+1)}{2}\bar{\gamma}_{n\cdot 0} + (2n+3)\gamma_{n\cdot 1} + 4\gamma_{n\cdot 2}$$
$$\Omega_{n.1.1} = -n(n+1)\bar{\gamma}_{n\cdot 0} - 2(2n+3)\gamma_{n\cdot 1} - 8\gamma_{n\cdot 2}$$
$$\Omega_{n.0.2} = \frac{n(n+1)}{2}\bar{\gamma}_{n\cdot 0} + (2n+3)\gamma_{n\cdot 1} + 4\gamma_{n\cdot 2}$$

$$\Omega_{(n.0.0)_{1\cdot 0}} = -n\bar{\gamma}_{n\cdot 0} - 2\gamma_{n\cdot 1}$$
$$\Omega_{(n.0.0)_{0\cdot 1}} = (n+1)\bar{\gamma}_{n\cdot 0} + 2\gamma_{n\cdot 1}$$

$$\Omega_{n.3.0} = -\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\bar{\gamma}_{n\cdot 0} - (n+2)^2\gamma_{n\cdot 1} - 4(n+3)\gamma_{n\cdot 2} - 8\gamma_{n\cdot 3}$$
$$\Omega_{n.2.1} = \frac{n(n+1)^2}{2}\bar{\gamma}_{n\cdot 0} + (3n^2+10n+9)\gamma_{n\cdot 1} + 4(3n+8)\gamma_{n\cdot 2} + 24\gamma_{n\cdot 3}$$
$$\Omega_{n.1.2} = -\frac{n^2(n+1)}{2}\bar{\gamma}_{n\cdot 0} - (3n^2+8n+6)\gamma_{n\cdot 1} - 4(3n+7)\gamma_{n\cdot 2} - 24\gamma_{n\cdot 3}$$
$$\Omega_{n.0.3} = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}\bar{\gamma}_{n\cdot 0} + (n+1)^2\gamma_{n\cdot 1} + 4(n+2)\gamma_{n\cdot 2} + 8\gamma_{n\cdot 3}$$

$$\Omega_{(n.1.0)_{1\cdot 0}} = n^2\bar{\gamma}_{n\cdot 0} + 4(n+1)\gamma_{n\cdot 1} + 8\gamma_{n\cdot 2}$$
$$\Omega_{(n.0.1)_{1\cdot 0}} = -n(n+1)\bar{\gamma}_{n\cdot 0} - 2(2n+3)\gamma_{n\cdot 1} - 8\gamma_{n\cdot 2}$$
$$\Omega_{(n.1.0)_{0\cdot 1}} = -n(n+1)\bar{\gamma}_{n\cdot 0} - 2(2n+3)\gamma_{n\cdot 1} - 8\gamma_{n\cdot 2}$$
$$\Omega_{(n.0.1)_{0\cdot 1}} = (n+1)^2\bar{\gamma}_{n\cdot 0} + 4(n+2)\gamma_{n\cdot 1} + 8\gamma_{n\cdot 2}.$$

Man beachte die Beziehungen:

122a) $$\Omega_{n.0.1} = -\Omega_{n\cdot 1\cdot 0} + \Omega_{n\cdot 0\cdot 0}$$

$$\Omega_{n.1.1} = -2\Omega_{n\cdot 2\cdot 0}$$
$$\Omega_{n.0.2} = \Omega_{n\cdot 2\cdot 0}$$

$$\Omega_{(n.0.0)_{1\cdot 0}} = \Omega_{n\cdot 1\cdot 0}$$
$$\Omega_{(n.0.0)_{0\cdot 1}} = \Omega_{n\cdot 0\cdot 1}$$

$$
\begin{aligned}
\Omega_{n.2.1} &= -3\Omega_{n\cdot 3\cdot 0} - \Omega_{n\cdot 2\cdot 0} \\
\Omega_{n.1.2} &= 3\Omega_{n\cdot 3\cdot 0} + 2\Omega_{n\cdot 2\cdot 0} = -\Omega_{n\cdot 1\cdot 1} + \Omega_{n\cdot 2\cdot 0} \\
\Omega_{n.0.3} &= -\Omega_{n\cdot 3\cdot 0} - \Omega_{n\cdot 1\cdot 0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Omega_{(n.1.0)_{1\cdot 0}} &= -\Omega_{n\cdot 1\cdot 1} + \Omega_{n\cdot 1\cdot 0} \\
\Omega_{(n.0.1)_{1\cdot 0}} &= \Omega_{n\cdot 1\cdot 1} \\
\Omega_{(n.1.0)_{0\cdot 1}} &= \Omega_{n\cdot 1\cdot 1} \\
\Omega_{(n.0.1)_{0\cdot 1}} &= -\Omega_{n\cdot 1\cdot 1} + \Omega_{n\cdot 0\cdot 1}.
\end{aligned}
$$

3. Wir wollen nun den Ausdruck $\frac{a d(\Omega)}{d \cos H_1}$ entwickeln. Nach 108) und 107) ist:

123) $$\frac{a d(\Omega)}{d \cos H_1} = \frac{m'}{1+m}\left\{\frac{a r r'}{(\varDelta)^3} - \frac{a r}{r'^2}\right\}.$$

Wir setzen:

$$\frac{a r r'}{(\varDelta)^3} = \overline{R}_0 + 2\overline{R}_1 \cos H_1 + 2\overline{R}_2 \cos 2H_1 + \cdots,$$

und haben nach dem Fourier'schen Theorem

$$\overline{R}_n = \frac{a r r'}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos n\psi d\psi}{(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\psi)^{\frac{3}{2}}},$$

und, wenn wir wieder $\frac{r}{r'}$ mit k bezeichnen, sowie die Bezeichnung 112) anwenden, so wird:

$$\overline{R}_n = \frac{1}{\pi}\frac{a'}{r'}\alpha k\int_0^\pi \frac{\cos n\psi d\psi}{(1 + k^2 - 2k\cos\psi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Wir erinnern uns nun der Transformationsformel 115), in der wir $m = 3$ zu setzen haben, und erhalten

$$\overline{R}_n = \frac{2n+1}{\pi}\frac{a'}{r'}\frac{\alpha k^{n+1}}{(1-k^2)^2}\left\{(1+k^2)\int_0^\pi \frac{\sin^{2n}\varphi d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - 2k^2\int_0^\pi \frac{\sin^{2(n+1)}\varphi d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} + 2k\int_0^\pi \sin^{2n}\varphi\cos\varphi d\varphi\right\}.$$

Das letzte dieser drei Integrale ist gleich Null, und es wird also:

$$\overline{R}_n = \frac{2n+1}{\pi}\frac{a'}{r'}\frac{\alpha^{n+2}(1-\lambda)^{\frac{n+1}{2}}}{(1-\alpha^2+\alpha^2\lambda)^2}\left\{(1+\alpha^2-\alpha^2\lambda)\int_0^\pi \frac{\sin^{2n}\varphi d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2(1-\lambda)\sin^2\varphi}} - 2\alpha^2(1-\lambda)\int_0^\pi \frac{\sin^{2(n+1)}\varphi d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2(1-\lambda)\sin^2\varphi}}\right\}.$$

Wenn wir jetzt aber die Formel 116) bedenken, so können wir schreiben:

124) $$\overline{R}_n = (2n+1)\frac{a'}{r'}\frac{\alpha(1-\lambda)^{\frac{n+1}{2}}}{(1-\alpha^2+\alpha^2\lambda)^2}\{\xi_{n\cdot 0}-\xi_{n\cdot 1}\lambda+\xi_{n\cdot 2}\lambda^2-+\cdots\},$$

wo

125) $$\begin{aligned}\xi_{n\cdot 0} &= (1+\alpha^2)\gamma_{n\cdot 0}-2\alpha\gamma_{n+1\cdot 0}\\ \xi_{n\cdot 1} &= (1+\alpha^2)\gamma_{n\cdot 1}+\alpha^2\gamma_{n\cdot 0}-2\alpha[\gamma_{n+1\cdot 1}+\gamma_{n+1\cdot 0}]\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \xi_{n\cdot\sigma} &= (1+\alpha^2)\gamma_{n\cdot\sigma}+\alpha^2\gamma_{n\cdot\sigma-1}-2\alpha[\gamma_{n+1\cdot\sigma}+\gamma_{n+1\cdot\sigma-1}].\end{aligned}$$

Es bleibt noch der Faktor $\frac{\alpha}{(1-\alpha^2+\alpha^2\lambda)^2}$ zu entwickeln, zu welchem Zwecke wir eine Bezeichnung von Gyldén einführen, nämlich

126) $$\beta^2 = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}.$$

Dann wird

$$\frac{\alpha}{(1-\alpha^2+\alpha^2\lambda)^2} = \frac{\alpha}{(1-\alpha^2)^2}\{1-2\beta^2\lambda+3\beta^4\lambda^2-4\beta^6\lambda^3+-\cdots\},$$

und wenn man endlich setzt:

127) $$\overline{R}_n = \frac{a'}{r'}(1-\lambda)^{\frac{n+1}{2}}\{g_{n\cdot 0}-g_{n\cdot 1}\lambda+g_{n\cdot 2}\lambda^2-+\cdots\},$$

so sind die $g_{n\cdot\sigma}$ durch folgende Relationen gegeben:

128) $$\begin{aligned}g_{n\cdot 0} &= (2n+1)\frac{\alpha}{(1-\alpha^2)^2}\xi_{n\cdot 0}\\ g_{n\cdot 1} &= (2n+1)\frac{\alpha}{(1-\alpha^2)^2}\{\xi_{n\cdot 1}+2\beta^2\xi_{n\cdot 0}\}\\ g_{n\cdot 2} &= (2n+1)\frac{\alpha}{(1-\alpha^2)^2}\{\xi_{n\cdot 2}+2\beta^2\xi_{n\cdot 1}+3\beta^4\xi_{n\cdot 0}\}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ g_{n\cdot\sigma} &= (2n+1)\frac{\alpha}{(1-\alpha^2)^2}\{\xi_{n\cdot\sigma}+2\beta^2\xi_{n\cdot\sigma-1}+3\beta^4\xi_{n\cdot\sigma-2}+\cdots\}.\end{aligned}$$

Auch die $g_{n\cdot\sigma}$ hängen, wie oben die $\gamma_{n\cdot\sigma}$, nur von der Grösse α ab.

Es war nun:

$$\frac{a\,d(\Omega)}{d\cos H_1} = \frac{m'}{1+m}\left\{\frac{arr'}{(\Delta)^3}-\frac{a'}{r'}\alpha^2(1-\lambda)^{\frac{1}{2}}\right\},$$

und wir setzen

$$\frac{a\,d(\Omega)}{d\cos H_1} = 2\,\Sigma'\,\overline{\Omega}_n \cos n\,H_1,$$

wo für $n = 0$ wieder der Faktor 2 zu unterdrücken ist; man hat dann:

$$\overline{\Omega}_n = \frac{m'}{1+m}\,\overline{R}_n$$

für alle Werte von n mit Ausnahme von $n = 0$, wo zu setzen ist:

$$\overline{\Omega}_0 = \frac{m'}{1+m}\left\{\overline{R}_0 - \frac{a'}{r'}\,\alpha^2 (1-\lambda)^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

Schreibt man

129) $$\overline{g}_{0\cdot 0} = g_{0\cdot 0} - \alpha^2,$$

so kommt

130) $$\overline{\Omega}_n = \frac{m'}{1+m}\,\frac{a'}{r'}\,(1-\lambda)^{\frac{n+1}{2}}\left\{\overline{g}_{n\cdot 0} - g_{n\cdot 1}\,\lambda + g_{n\cdot 2}\,\lambda^2 - + \cdots\right\},$$

wo zu nehmen ist

$$\overline{g}_{n\cdot 0} = g_{n\cdot 0}$$

für alle Werte von n mit Ausnahme von $n = 0$, wo die Relation 129) gilt.

In die Gleichung 130) sollen nun statt r' und λ die Funktionen ϱ, ϱ', η und η' eingeführt werden, nach deren Potenzen wir entwickeln. Dies ist leicht auszuführen, indem man sich der Entwicklungen 120) und 120a) erinnert, in deren letzterer man $n+1$ statt n zu setzen hat. Bezeichnet man:

$$\overline{\Omega}_n = \Sigma\Sigma\Sigma\Sigma\,\overline{\Omega}_{(n.s.s')\nu\cdot\nu'}\,\varrho^{s}\,\varrho'^{s'}\,\eta^{2\nu}\,\eta'^{2\nu'},$$

oder

131) $$\frac{a\,d(\Omega)}{d\cos H_1} = 2\Sigma'\,\overline{\Omega}_{(n.s.s')\nu\cdot\nu'}\,\varrho^{s}\,\varrho'^{s'}\,\eta^{2\nu}\,\eta'^{2\nu'}\cos n H_1,$$

so ist, wenn ich wieder den Faktor $\frac{m'}{1+m}$ fortlasse:

132) $$\begin{aligned}\overline{\Omega}_{n\cdot 0\cdot 0} &= \overline{g}_{n\cdot 0}\\ \overline{\Omega}_{n\cdot 1\cdot 0} &= -(n+1)\overline{g}_{n\cdot 0} - 2g_{n\cdot 1}\\ \overline{\Omega}_{n\cdot 0\cdot 1} &= (n+2)\overline{g}_{n\cdot 0} + 2g_{n\cdot 1}.\end{aligned}$$

Diese Formeln ergeben sich übrigens auch sofort aus 122), wenn man dort g statt γ, und in den Faktoren durchgehends $n+1$ statt n setzt. Für unsere Zwecke brauchen wir nur die eben angeführten Coefficienten.

Es ist also nach dem Vorhergehenden mit Fortlassung von Gliedern vierten Grades

$$133)\quad a\Omega = 2\Sigma'\Omega_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}}\varrho^s\varrho'^{s'}\eta^{2\nu}\eta'^{2\nu'}\cos nH_1 + 2\Sigma'\bar{\Omega}_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}}\varrho^s\varrho'^{s'}\eta^{2\nu}\eta'^{2\nu'}h\cos nH_1,$$

wo h durch die Relation 106) gegeben ist.

4. Jetzt werde ich die Entwicklungen der Funktionen Q, P und Z geben. Nach 34a) haben wir

$$Q = \frac{r^2}{a(1-\eta^2)}\frac{\partial\Omega}{dv} = \frac{\partial}{dv}\left[\frac{1-\eta^2}{(1+\varrho)^2}a\Omega\right].$$

Aus der Gleichung 133) folgt aber

$$\begin{aligned}\frac{1-\eta^2}{(1+\varrho)^2}a\Omega &= (1-\eta^2)(1-2\varrho+3\varrho^2-+\cdots)2\Sigma'\Omega_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}}\varrho^s\varrho'^{s'}\eta^{2\nu}\eta'^{2\nu'}\cos nH_1\\ &+(1-\eta^2)(1-2\varrho+3\varrho^2-+\cdots)2\Sigma'\bar{\Omega}_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}}\varrho^s\varrho'^{s'}\eta^{2\nu}\eta'^{2\nu'}h\cos nH_1.\end{aligned}$$

Wenn man also setzt

$$134)\quad \frac{1-\eta^2}{(1+\varrho^2)}a\Omega = 2\Sigma' Q_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}}\varrho^s\varrho'^{s'}\eta^{2\nu}\eta'^{2\nu'}\cos nH_1 + 2\Sigma'\bar{Q}_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}}\varrho^s\varrho'^{s'}\eta^{2\nu}\eta'^{2\nu'}h\cos nH_1,$$

so folgt aus der Vergleichung der beiden letzten Gleichungen:

$$\begin{aligned}135)\qquad Q_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}} &= \Omega_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}} - 2\Omega_{(n.s-1.s')_{\nu.\nu'}} + 3\Omega_{(n.s-2.s')_{\nu.\nu'}} -+\cdots\cdots\\ &\quad -\Omega_{(n.s.s')_{\nu-1.\nu'}} + 2\Omega_{(n.s-1.s')_{\nu-1.\nu'}} - 3\Omega_{(n.s-2.s')_{\nu-1.\nu'}} +-\cdots\cdots\\ \bar{Q}_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}} &= \bar{\Omega}_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}} - 2\bar{\Omega}_{(n.s-1.s')_{\nu.\nu'}} +-\cdots\cdots\\ &\quad -\bar{\Omega}_{(n.s.s')_{\nu-1.\nu'}} + 2\bar{\Omega}_{(n.s-1.s')_{\nu-1.\nu'}} -+\cdots\cdots,\end{aligned}$$

wo diejenigen Ω-Coefficienten fortzulassen sind, welche negative Indices erhalten würden; dadurch werden diese nach den Ω-Coefficienten fortschreitenden Reihen endlich, und man hat speciell:

135a) $Q_{n.0.0} = \Omega_{n.0.0}$

$Q_{n.1.0} = \Omega_{n.1.0} - 2\Omega_{n.0.0}$

$Q_{n.0.1} = \Omega_{n.0.1}$

$Q_{n.2.0} = \Omega_{n.2.0} - 2\Omega_{n.1.0} + 3\Omega_{n.0.0}$

$Q_{n.1.1} = \Omega_{n.1.1} - 2\Omega_{n.0.1}$

$Q_{n.0.2} = \Omega_{n.0.2}$

$Q_{(n.0.0)_{1\cdot 0}} = \Omega_{(n.0.0)_{1\cdot 0}} - \Omega_{n.0.0}$

$Q_{(n.0.0)_{0\cdot 1}} = \Omega_{(n.0.0)_{0\cdot 1}}$

$Q_{n.3.0} = \Omega_{n.3.0} - 2\Omega_{n.2.0} + 3\Omega_{n.1.0} - 4\Omega_{n.0.0}$

$Q_{n.2.1} = \Omega_{n.2.1} - 2\Omega_{n.1.1} + 3\Omega_{n.0.1}$

$Q_{n.1.2} = \Omega_{n.1.2} - 2\Omega_{n.0.2}$

$Q_{n.0.3} = \Omega_{n.0.3}$

$Q_{(n.1.0)_{1\cdot 0}} = \Omega_{(n.1.0)_{1\cdot 0}} - 2\Omega_{(n.0.0)_{1\cdot 0}} - \Omega_{n.1.0} + 2\Omega_{n.0.0}$

$Q_{(n.1.0)_{0\cdot 1}} = \Omega_{(n.1.0)_{0\cdot 1}} - 2\Omega_{(n.0.0)_{0\cdot 1}}$

$Q_{(n.0.1)_{1\cdot 0}} = \Omega_{(n.0.1)_{1\cdot 0}} - \Omega_{n.0.1}$

$Q_{(n.0.1)_{0\cdot 1}} = \Omega_{(n.0.1)_{0\cdot 1}}$

$\bar{Q}_{n.0.0} = \bar{\Omega}_{n.0.0}.$

Um die Entwicklung von Q zu erhalten, brauchen wir jetzt nur 134) partiell nach v zu differenziren; da

$$\frac{\partial \cos m H_1}{dv} = -m \sin m H_1,$$

so wird, bei Vernachlässigung von Gliedern dritten Grades:

136)
$$\begin{aligned} Q = & -2\Sigma n\, Q_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}} \varrho^{s} \varrho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} \sin n H_1 \\ & -2\Sigma n\, \overline{Q}_{n.0.0}\, h \sin n H_1 \\ & +2\Sigma' \overline{Q}_{n.0.0} \frac{\partial h}{dv} \cos n H_1. \end{aligned}$$

5. Zur Bildung des Ausdrucks von P erinnern wir uns der Relation 36a)

$$P = r^2 \frac{\partial \Omega}{dr} = -(1-\eta^2) \frac{\partial(a\Omega)}{d\varrho},$$

welche wir mit Rücksicht auf 134) schreiben können:

$$\begin{aligned} P = & -(1-\eta^2)\, 2\Sigma s\, \Omega_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}} \varrho^{s-1} \varrho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} \cos n H_1 \\ & -(1-\eta^2)\, 2\Sigma s\, \Omega_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}} \varrho^{s-1} \varrho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} h \cos n H_1. \end{aligned}$$

Wenn wir also P unter die folgende Form setzen:

137) $$P = 2\Sigma' P_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}} \varrho^{s} \varrho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} \cos n H_1 + 2\Sigma' \overline{P}_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}} \varrho^{s} \varrho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} h \cos H_1,$$

so wird offenbar:

138)
$$\begin{aligned} P_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}} &= -(s+1)\, \Omega_{(n.s+1.s')_{\nu.\nu'}} + (s+1)\, \Omega_{(n.s+1.s')_{\nu-1.\nu'}} \\ \overline{P}_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}} &= -(s+1)\, \overline{\Omega}_{(n.s+1.s')_{\nu.\nu'}} + (s+1)\, \overline{\Omega}_{(n.s+1.s')_{\nu-1.\nu'}}, \end{aligned}$$

wo wieder die Ω-Coefficienten mit negativen Indices fortzulassen sind. Man hat speciell:

138a)
$$\begin{aligned} P_{n.0.0} &= -\Omega_{n.1.0} \\ P_{n.1.0} &= -2\Omega_{n.2.0} \\ P_{n.0.1} &= -\Omega_{n.1.1} \\ P_{n.2.0} &= -3\Omega_{n.2.0} \\ P_{n.1.1} &= -2\Omega_{n.2.1} \\ P_{n.0.2} &= -\Omega_{n.1.2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{(n.0.0)_{1.0}} &= -\Omega_{(n.1.0)_{1.0}} + \Omega_{n.1.0} \\ P_{(n.0.0)_{0.1}} &= -\Omega_{(n.1.0)_{0.1}} \\ \overline{P}_{n.0.0} &= -\overline{\Omega}_{n.1.0} \end{aligned}$$

Mit Vernachlässigung von Gliedern dritten Grades ist dann

139)
$$P = 2\Sigma' P_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}} \varrho^s \varrho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} \cos nH_1 + 2\Sigma' \bar{P}_{n.0.0}\, h \cos nH_1.$$

6. Zur Bildung der Funktion Z haben wir Gleichung 71)

$$Z = \frac{m'}{1+m} \frac{r^2 r'}{a(1-\eta^2)} \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right) (\mathfrak{z}' - \mathfrak{z}\cos H).$$

Wenn man setzt:

$$(Z) = \frac{m'}{1+m} \frac{r^2 r'}{a(1-\eta^2)} \left[\frac{1}{(\Delta)^3} - \frac{1}{r'^3}\right] (\mathfrak{z}' - \mathfrak{z}\cos H_1),$$

so ist

$$Z = (Z) + \frac{d(Z)}{d\cos H_1} h + \cdots\cdots.$$

Da aber h zweiten Grades und $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}'$ ersten Grades sind, so ist mit Vernachlässigung der Glieder dritten Grades

$$Z = (Z).$$

Wir bezeichnen

140)
$$\bar{Z} = \frac{m'}{1+m} \frac{r^2 r'}{a(1-\eta^2)} \left[\frac{1}{(\Delta)^3} - \frac{1}{r'^3}\right],$$

woraus folgt, mit entsprechender Genauigkeit

141)
$$Z = \bar{Z}(\mathfrak{z}' - \mathfrak{z}\cos H_1).$$

Mit Hilfe von Gleichung 123) wird aber:

$$\bar{Z} = \frac{1-\eta^2}{(1+\varrho)^2} \frac{a\, d(\Omega)}{d\cos H_1},$$

und bei Berücksichtigung von 131):

$$\bar{Z} = (1-\eta^2)(1-2\varrho+3\varrho^2-+\cdots\cdots) 2\Sigma' \bar{\Omega}_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}} \varrho^s \varrho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} \cos nH_1.$$

Wenn man also setzt:

142)
$$\bar{Z} = 2\Sigma' X_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}} \varrho^s \varrho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} \cos nH_1,$$

so folgt aus der Vergleichung der beiden letzten Gleichungen:

143)
$$X_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}} = \bar{\Omega}_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}} - 2\bar{\Omega}_{(n.s-1.s')_{\nu.\nu'}} + 3\bar{\Omega}_{(n.s-2.s')_{\nu.\nu'}} - + \cdots\cdots - \bar{\Omega}_{(n.s.s')_{\nu-1.\nu'}} + 2\bar{\Omega}_{(n.s-1.s')_{\nu-1.\nu'}} - 3\bar{\Omega}_{(n.s-2.s')_{\nu-1.\nu'}} + - \cdots\cdots,$$

oder nach 135)

$$X_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}} = \overline{Q}_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}}.$$

Man erhält speciell:

143a)
$$X_{n.0.0} = \overline{\Omega}_{n.0.0}$$
$$X_{n.1.0} = \overline{\Omega}_{n.1.0} - 2\overline{\Omega}_{n.0.0}$$
$$X_{n.0.1} = \overline{\Omega}_{n.0.1}.$$

Setzt man in gleicher Weise wie oben

144)
$$-\overline{Z}\cos H_1 = 2\Sigma' Y_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}} \varrho^s \varrho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} \cos nH_1,$$

so hat man:

145)
$$Y_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}} = -\frac{X_{(n-1.s.s')_{\nu.\nu'}} + X_{(n+1.s.s')_{\nu.\nu'}}}{2}$$

für alle Werte von n mit Ausnahme von $n = 0$, wo zu nehmen ist:

145a)
$$Y_{(0.s.s')_{\nu.\nu'}} = -X_{(1.s.s)_{\nu.\nu'}}.$$

Aus den Entwicklungen 142) und 144) folgt aber sofort mit Rücksicht auf 141):

146)
$$Z = 2\Sigma' Y_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}} \varrho^s \varrho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} \mathfrak{z} \cos nH_1$$
$$+ 2\Sigma' X_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}} \varrho^s \varrho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} \mathfrak{z}' \cos nH_1.$$

Fünftes Kapitel.

Transformation der für die Funktionen Q, P und Z gefundenen Ausdrücke.

1. Die Entwicklungen 136), 139) und 146) sind noch nicht unmittelbar anwendbar bei der Integration der Differentialgleichungen für die Funktionen S, ϱ und $\mathfrak{z}$, da sie die beiden Veränderlichen v und v' neben einander enthalten. Wir denken uns nämlich ϱ', η' und $\mathfrak{z}'$ als bekannte Funktionen von v', und diese Grösse kommt auch im Winkel

$$H_1 = v - v' + (\Omega - \Sigma) - (\Omega' - \Sigma') = v - v' + \mathrm{H} - \mathrm{H}'$$

vor; auch $\Omega' - \Sigma'$ ist eine bekannte Funktion von v'. Wenn man eine scharfe Lösung des Problems beabsichtigt, so wird $\Omega' - \Sigma'$ durch eine der Gleichung 99) oder 100) ganz analoge Relation gegeben sein; ferner wird man nach 111) und in Analogie mit den Gleichungen 37) und 8) bis 12) zunächst haben:

$$
147) \quad
\begin{aligned}
r' &= \frac{a'(1-\eta'^2)}{1+\varrho'} \\
\varrho' &= (\varrho)' + R' \\
(\varrho)' &= \Sigma \varkappa'_n \cos[(1-\varsigma'_n)v' - \Gamma'_n] \\
\eta' \cos\pi' &= \Sigma \varkappa'_n \cos(\Gamma'_n + \varsigma'_n v') \\
\eta' \sin\pi' &= \Sigma \varkappa'_n \sin(\Gamma'_n + \varsigma'_n v') \\
(\varrho)' &= \eta' \cos \mathrm{v}' \\
\mathrm{v}' &= v' - \Pi'
\end{aligned}
$$

wo die Grössen $\varkappa'_n$, ς'_n, Γ'_n und die Funktion R' als bekannt vorausgesetzt werden. Man wird nun v', und ebenso ϱ' und Π_1 als Funktion von v allein ausdrücken, um in den Differentialgleichungen 34), 36) und 70) nur diese eine Veränderliche zu haben. Gyldén hat im Jahre 1886 in seinen Vorlesungen auf dem Stockholmer Observatorium ein sehr schönes Verfahren gegeben, um diese Transformation von v' auf v auszuführen; dasselbe findet sich übrigens publicirt in seinem Werke „Traité des Orbites absolues etc." Da wir die Glieder dritten Grades hier vernachlässigen wollen, so können wir diese Transformationen auf sehr einfache Weise vornehmen.

Wenn wir die Bewegungsconstante n' des störenden Planeten durch die Relation

$$
148) \quad n' = \frac{\sqrt{M'}}{a'^{\frac{3}{2}}}, \qquad \text{wo} \qquad M' = k^2(1+m')
$$

definiren, so haben wir ähnlich der Gleichung 57a)

$$
149) \quad n't + A' = v' + \Sigma B'_n \sin n\mathrm{v}' + \mathrm{W}',
$$

wo die Funktion W' analog der Funktion W ist und ebenfalls als bekannt angesehen wird; übrigens können wir sie bei unseren Untersuchungen vernachlässigen, wie wir gleich des Näheren erörtern werden. Die Coefficienten B'_n sind ähnlich den B_n; sie sind durch die Relationen 47) gegeben, wenn man dort η' für η schreibt.

Multipliciren wir die Gleichung 57a) mit dem Verhältniss der Bewegungsconstanten

$$
150) \quad \mu = \frac{n'}{n},
$$

so haben wir

$$n't + \mu A = \mu v + \mu \Sigma B_n \sin nv + \mu W.$$

Vergleicht man diese Relation mit 149) und bezeichnet man

151)
$$B = A' - \mu A$$
$$G = \mu \Sigma B_n \sin nv - \Sigma B'_n \sin nv',$$

so ist:

152)
$$v' = \mu v + B + G + \mu W - W'.$$

Diese Gleichung dient dazu, v' und seine Funktionen durch v auszudrücken, nachdem man in G nnd W' ebenfalls v' durch v ersetzt hat.

Hierzu müssen wir zunächst in den Gleichungen 147) die Länge v als unabhänginge Veränderliche einführen; die Relationen:

$$\eta' \frac{\cos}{\sin} \Pi' = \Sigma \varkappa'_n \frac{\cos}{\sin} (\Gamma'_n + \varsigma'_n v')$$

können wir nach 152) folgendermaassen schreiben:

$$\eta' \frac{\cos}{\sin} \Pi' = \Sigma \varkappa'_n \frac{\cos}{\sin} \{ \Gamma'_n + \varsigma'_n B + \mathrm{H} - \mathrm{H}' + \mu \varsigma'_n v + \varsigma'_n G + \mu \varsigma'_n W - \varsigma'_n W' - \mathrm{H} + \mathrm{H}' \}.$$

Die Funktion W kann, wie wir später sehen werden, einen secularen Teil enthalten, und die Funktionen H und H' enthalten ebenfalls einen solchen; ich will bezeichnen:

153)
$$\text{p. sec. } W = \bar{\gamma} v \text{ [1])}$$
$$\mu_1 = \mu (1 + \bar{\gamma})$$
$$\text{p. sec. } \mathrm{H} = cv$$
$$\text{p. sec. } \mathrm{H}' = \text{p. sec. } c'v' = \mu_1 c' v,$$

wo übrigens c und c' zweiten Grades sind. Weiter führe ich die Bezeichnungen ein:

153a)
$$\Gamma_n = \Gamma'_n + \varsigma'_n B$$
$$\varsigma_n = \mu_1 \varsigma'_n - c + \mu_1 c'$$
$$\omega_n = \Gamma_n + \varsigma_n v.$$

Dann kann ich die obigen Gleichungen, wie folgt, schreiben:

153b)
$$\eta' \frac{\cos}{\sin} \Pi' =$$
$$\Sigma \varkappa'_n \frac{\cos}{\sin} (\omega_n + \mathrm{H} - \mathrm{H}') \mp \Sigma \{ \varsigma'_n G + \mu \varsigma'_n \overline{W} - \varsigma'_n W' - \overline{\mathrm{H}} + \overline{\mathrm{H}}' \} \varkappa'_n \frac{\sin}{\cos} (\omega_n + \mathrm{H} - \mathrm{H}') \pm \cdots,$$

1) „p. sec." brauche ich als Abkürzung für „pars secularis".

wo der Strich über den Funktionen $\overline{W}$, $\overline{\mathrm{H}}$ und $\overline{\mathrm{H}'}$ bedeutet, dass in ihnen der seculare Teil zu unterdrücken ist. Das zweite Glied rechter Hand ist teils dritten Grades, teils infolge Hinzutretens des Faktors ς'_n ausserordentlich klein. Will man es behufs äusserster Genauigkeit doch berücksichtigen, so hat man für die Funktionen G u. s. w. ihre Werte einzusetzen, nachdem man sie bestimmt hat; es werden sich dann aus den Produkten teils Glieder der Form A, teils solche anderer Formen ergeben; die ersteren belässt man in der Gleichung 153b), während die übrigen in die Funktion R' übergeführt werden müssen; wie dies zu geschehen hat, wird man an der Hand der Relationen 147) unschwer übersehen.

Nach dem Gesagten schreibe ich also:

$$\eta' \frac{\cos}{\sin} \Pi'_1 = \sum \varkappa'_n \frac{\cos}{\sin}(\omega_n + \mathrm{H} - \mathrm{H}')$$

154)
$$\varrho' = (\varrho') + (R')$$
$$(\varrho') = \sum \varkappa'_n \cos(v' - \omega_n - \mathrm{H} + \mathrm{H}') = \eta' \cos(v' - \Pi'_1) = \eta' \cos \mathrm{v}'_1$$
$$\mathrm{v}'_1 = v' - \Pi'_1.$$

Ich habe in diesen Gleichungen (ϱ') zum Unterschiede von $(\varrho)'$ und (R') zum Unterschiede von R' in 147) geschrieben; auch die $\varkappa'_n$ haben hier, streng genommen, eine etwas andere Bedeutung als dort, indem aus der Entwicklung der Gleichung 153b) noch Teile höherer Grade und Ordnungen zu ihnen hinzutreten; diese Unterschiede sind indessen so gering, dass sie für unsere Aufgabe garnicht in Betracht kommen und ich habe die vorstehenden Bemerkungen überhaupt nur gemacht für den Fall, dass man eine sehr weit gehende Lösung unseres Problems beabsichtigte.

Ferner habe ich in die Funktionen $\eta' \frac{\cos}{\sin} \Pi'_1$ dieselben Argumente ω_n eingeführt, welche nach 10) in $\eta \frac{\cos}{\sin} \Pi$ vorkommen; dass dieselben wirklich identisch sind, wird sich zeigen; jedoch auch, wenn dies nicht der Fall wäre, liesse sich gegen diese Bezeichnungsweise nichts einwenden, da man nur den n verschiedene Werte zu erteilen brauchte.

Wenn ich nun noch setze:

154a) $$\Pi_1 = \Pi'_1 - \mathrm{H} + \mathrm{H}',$$

so wird offenbar

154b) $$\eta' \frac{\cos}{\sin} \Pi_1 = \sum \varkappa'_n \frac{\cos}{\sin} \omega_n.$$

2. Nachdem wir jetzt η' und Π_1 als Funktionen von v ausgedrückt haben, kann die weitere Transformation in folgender Weise vor sich gehen; ich setze:

155)
$$U = \mu W - W' - \mathrm{H} + \mathrm{H}'$$
$$w_1 = (1-\mu)v - B - U$$
$$\mathrm{v}_1 = v - H_1,$$

und erhalte

155a)
$$H_1 = w_1 - G$$
$$v' = -w_1 + v + G + \mathrm{H} - \mathrm{H}'$$
$$\mathrm{v}_1' = -w_1 + G + \mathrm{v}_1.$$

Mit Hilfe dieser Relationen sollen nun die Argumente H_1 und v_1' durch w_1 und v_1 ersetzt werden, indem man nach Potenzen von G entwickelt, welches offenbar vom ersten Grade ist. Diese Entwicklung können wir successive machen. Man hat mit Vernachlässigung der Glieder dritten Grades nach 151) und 47):

156)
$$G = -2\mu\eta \sin \mathrm{v} + 2\eta' \sin \mathrm{v}_1' + \tfrac{3}{4}\mu\eta^2 \sin 2\mathrm{v} - \tfrac{5}{4}\eta'^2 \sin 2\mathrm{v}_1'.$$

Hierin habe ich v_1' für v' geschrieben, da die Differenz beider Grössen für uns verschwindend ist. Wenn man will, kann man die Transformation unschwer ausführen, und die bei den Entwicklungen entstehenden äusserst kleinen Glieder teils in G belassen, teils mit Rücksicht auf die Relation 149) nach W' überführen.

Mit Vernachlässigung der Glieder zweiten Grades ist:

$$G = -2\mu\eta \sin \mathrm{v} - 2\eta' \sin(w_1 - \mathrm{v}_1).$$

Mit Hilfe dieses letzten Ausdrucks findet man aber bis zu den Gliedern zweiten Grades eingeschlossen:

$$\eta' \sin \mathrm{v}_1' = -\eta' \sin(w_1 - \mathrm{v}_1) + G\eta' \cos(w_1 - \mathrm{v}_1)$$
$$= -\eta' \sin(w_1-\mathrm{v}_1) - \mu\eta\eta' \sin(w_1+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) + \mu\eta\eta' \sin(w_1-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) - \eta'^2 \sin(2w_1 - 2\mathrm{v}_1)$$
$$\eta'^2 \sin 2\mathrm{v}_1' = -\eta'^2 \sin(2w_1 - 2\mathrm{v}_1),$$

und hieraus mit derselben Genauigkeit nach 156):

$$G = -2\mu\eta \sin \mathrm{v} - 2\eta' \sin(w_1 - \mathrm{v}_1)$$
$$+ \tfrac{3}{4}\mu\eta^2 \sin 2\mathrm{v} - \mu\eta\eta' \sin(w_1 + \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) + 2\mu\eta\eta' \sin(w_1 - \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) - \tfrac{5}{4}\eta'^2 \sin(2w_1 - 2\mathrm{v}_1)$$

156a)
$$G^2 = 2\mu^2\eta^2 - 2\mu^2\eta^2 \cos 2\mathrm{v}$$
$$- 4\mu\eta\eta' \cos(w_1 + \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) + 4\mu\eta\eta' \cos(w_1 - \mathrm{v} - \mathrm{v}_1)$$
$$+ 2\eta'^2 - 2\eta'^2 \cos(2w_1 - 2\mathrm{v}_1).$$

Man bildet nun endlich ohne Schwierigkeit die folgenden Entwicklungen von $\cos n H_1$ und $\sin n H_1$:

$$\begin{aligned}
{\cos \atop \sin} n H_1 &= {\cos \atop \sin} n w_1 \pm nG {\sin \atop \cos} nw_1 - \frac{n^2 G^2}{2} {\cos \atop \sin} nw_1 \\
&= {\cos \atop \sin} nw_1 + n\mu\eta {\cos \atop \sin} (nw_1 + \mathrm{v}) \qquad - n^2 \mu^2 \eta^2 \quad {\cos \atop \sin} nw_1 \\
&\quad - n\mu\eta {\cos \atop \sin} (nw_1 - \mathrm{v}) \qquad + \left[\frac{n^2 \mu^2}{2} - \tfrac{3}{8} n\mu\right] \eta^2 {\cos \atop \sin} (nw_1 + 2\mathrm{v}) \\
&\quad - n\eta' {\cos \atop \sin} [(n-1) w_1 + \mathrm{v}_1] \qquad + \left[\frac{n^2 \mu^2}{2} + \tfrac{3}{8} n\mu\right] \eta^2 {\cos \atop \sin} (nw_1 - 2\mathrm{v}) \\
&\quad + n\eta' {\cos \atop \sin} [(n+1) w_1 - \mathrm{v}_1] \qquad - n(n-1)\mu\eta\eta' \quad {\cos \atop \sin} [(n-1)w_1 + \mathrm{v} + \mathrm{v}_1] \\
&\quad + n(n+1)\mu\eta\eta' \quad {\cos \atop \sin} [(n+1)w_1 + \mathrm{v} - \mathrm{v}_1] \\
&\quad + n(n-1)\mu\eta\eta' \quad {\cos \atop \sin} [(n-1)w_1 - \mathrm{v} + \mathrm{v}_1] \\
&\quad - n(n+1)\mu\eta\eta' \quad {\cos \atop \sin} [(n+1)w_1 - \mathrm{v} - \mathrm{v}_1] \\
&\quad - n^2 \eta'^2 \quad {\cos \atop \sin} nw_1 \\
&\quad + \left[\frac{n^2}{2} - \tfrac{5}{8} n\right] \eta'^2 \quad {\cos \atop \sin} [(n-2) w_1 + 2\mathrm{v}_1] \\
&\quad + \left[\frac{n^2}{2} + \tfrac{5}{8} n\right] \eta'^2 \quad {\cos \atop \sin} [(n+2) w_1 - 2\mathrm{v}_1].
\end{aligned} \tag{157}$$

3. Die vorstehenden Ausdrücke dienen zur Darstellung der Produkte

$$\varrho^s \varrho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} {\cos \atop \sin} n H_1$$

als explicite Fnnktionen von v.

In allen Fällen, auf die wir gegenwärtig Rücksicht nehmen, können wir die Fnnktion R' sowie die in den Argumenten auftretende Funktion W' vernachlässigen. Die Gründe hierfür sind leicht zn ersehen; indessen will ich sie hier auseinandersetzen, damit kein Zweifel an der Berechtigung dieses Verfahrens entstehe. Die genannten Funktionen enthalten natürlich einige grosse Glieder, vor allem die sogenannten grossen Ungleichheiten in der Bewegung Jnpiters, die durch Saturn veranlasst werden, da seine mittlere Bewegung zn der Jupiters sehr nahe im Verhältniss $\frac{2}{5}$ steht. Dieselben sind mit der Satnrnsmasse multiplicirt und erhalten bei uns noch einen der Faktoren $\Omega_{(n,s,s')\nu,\nu'}$, die rein erster Ordnung sind. Die von diesen Funktionen abhängigen Glieder sind also von vornherein sehr klein; die zu ihnen gehörigen Argumente hängen aber ab von der mittleren Bewegung *Saturns*; sie können also durch die Integration nnr

vergrössert werden, wenn zwischen der mittleren Bewegung des gestörten Planeten und derjenigen Saturns genäherte Commensnrabilität besteht; und in diesem Falle würde man, ehe man auf sie Rücksicht nimmt, die direkten Satnrnstörungen berechnen müssen, die natürlich grösser sind. Aber auch diese letzteren liegen im Allgemeinen unterhalh der Grösse, die ich mir in dieser Arbeit als Genauigkeitsgrenze gesteckt habe. Will man eine grössere Genauigkeit erreichen, oder handelt es sich um einen Planeten, der ganz aussergewöhnliche Saturnstörungen erleidet (oder zn erleiden scheint), so hindert nichts, wie schon anfangs bemerkt, die von uns gegebenen Entwicklungen weiter auszudehnen.

Im Gegensatz hierzn können wir die Funktionen R nnd W nicht als klein betrachten, da sie nicht nur in vielen Fällen thatsächlich sehr gross sind und sogar grösser sein können als die Excentrität der ungestörten Bahn, sondern da sie anch immer wieder zu solchen Gliedern höherer Ordnung Anlass geben, die durch den Integrationsprocess weiter vergrössert werden.

Eingehende Betrachtungen haben mich dazn geführt, allgemein die dritten Potenzen dieser Grössen zn vernachlässigen, und grösstenteils, aber nicht immer, auch die zweiten.

Nach dem Vorhergehenden haben wir die Relationen

158)
$$
\begin{aligned}
(\varrho) &= \eta \cos \mathrm{v} \\
(\varrho') &= \eta' \cos \mathrm{v}_1' = \eta' \cos(w_1 - \mathrm{v}_1) + G\eta' \sin(w_1 - \mathrm{v}_1) \\
&= \eta' \cos(w_1 - \mathrm{v}_1) + \mu\eta\eta' \cos(w_1 + \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) - \mu\eta\eta' \cos(w_1 - \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) - \eta'^2 + \eta'^2 \cos(2w_1 - 2\mathrm{v}_1) \\
(\varrho)^2 &= \tfrac{1}{2}\eta^2 + \tfrac{1}{2}\eta^2 \cos 2\mathrm{v} \\
(\varrho)(\varrho') &= \tfrac{1}{2}\eta\eta' \cos(w_1 + \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) + \tfrac{1}{2}\eta\eta' \cos(w_1 - \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) \\
(\varrho')^2 &= \tfrac{1}{2}\eta'^2 + \tfrac{1}{2}\eta'^2 \cos(2w_1 - 2\mathrm{v}_1),
\end{aligned}
$$

und hieraus folgen mit Rücksicht auf 157) die Entwicklungen:

159)
$$
\begin{aligned}
(\varrho) {\cos \atop \sin} nH_1 = \; & \tfrac{1}{2}\eta {\cos \atop \sin}(nw_1 + \mathrm{v}) && + \tfrac{1}{2}n\mu\eta^2 {\cos \atop \sin}(nw_1 + 2\mathrm{v}) \\
& + \tfrac{1}{2}\eta {\cos \atop \sin}(nw_1 - \mathrm{v}) && - \tfrac{1}{2}n\mu\eta^2 {\cos \atop \sin}(nw_1 - 2\mathrm{v}) \\
& && - \tfrac{1}{2}n\eta\eta' {\cos \atop \sin}[(n-1)w_1 + \mathrm{v} + \mathrm{v}_1)] \\
& && + \tfrac{1}{2}n\eta\eta' {\cos \atop \sin}[(n+1)w_1 + \mathrm{v} - \mathrm{v}_1] \\
& && - \tfrac{1}{2}n\eta\eta' {\cos \atop \sin}[(n-1)w_1 - \mathrm{v} + \mathrm{v}_1] \\
& && + \tfrac{1}{2}n\eta\eta' {\cos \atop \sin}[(n+1)w_1 - \mathrm{v} - \mathrm{v}_1]
\end{aligned}
$$

159)
$$
\begin{aligned}
(\varrho')\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} nH_1 = \; & \tfrac{1}{2}\eta' \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}[(n-1)w_1+\mathrm{v}_1] + \tfrac{1}{2}(n-1)\mu\eta\eta' \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}[(n-1)w_1+\mathrm{v}+\mathrm{v}_1] \\
& + \tfrac{1}{2}\eta' \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}[(n+1)w_1-\mathrm{v}_1] + \tfrac{1}{2}(n+1)\mu\eta\eta' \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}[(n+1)w_1+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1] \\
& - \tfrac{1}{2}(n-1)\mu\eta\eta' \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}[(n-1)w_1-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1] \\
& - \tfrac{1}{2}(n+1)\mu\eta\eta' \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}[(n+1)w_1-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1] \\
& - \eta'^2 \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} nw_1 \\
& - \tfrac{1}{4}(n-1)\eta'^2 \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}[(n-2)w_1+2\mathrm{v}_1] \\
& + \tfrac{1}{4}(n+1)\eta'^2 \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}[(n+2)w_1-2\mathrm{v}_1]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\varrho)^2\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} nH_1 = \; & \tfrac{1}{2}\eta^2 \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} nw_1 \\
& + \tfrac{1}{4}\eta^2 \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(nw_1+2\mathrm{v}) \\
& + \tfrac{1}{4}\eta^2 \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(nw_1-2\mathrm{v})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\varrho)(\varrho')\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} nH_1 = \; & \tfrac{1}{4}\eta\eta' \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}[(n-1)w_1+\mathrm{v}+\mathrm{v}_1] \\
& + \tfrac{1}{4}\eta\eta' \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}[(n+1)w_1+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1] \\
& + \tfrac{1}{4}\eta\eta' \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}[(n-1)w_1-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1] \\
& + \tfrac{1}{4}\eta\eta' \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}[(n+1)w_1-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\varrho')^2\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} nH_1 = \; & \tfrac{1}{2}\eta'^2 \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} nw_1 \\
& + \tfrac{1}{4}\eta'^2 \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}[(n-2)w_1+2\mathrm{v}_1] \\
& + \tfrac{1}{4}\eta'^2 \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}[(n+2)w_1-2\mathrm{v}_1].
\end{aligned}
$$

Nachdem wir nun die Ausdrücke $(\varrho)^s(\varrho')^{s'}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} nH_1$ bis zu den Gliedern zweiten Grades gebildet haben, bietet die Bildung der vollständigen Produkte

$$\varrho^s \varrho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} \frac{\cos}{\sin} nH_1$$

keine Schwierigkeiten mehr; man vernachlässigt R' und setzt:

$$\varrho^s = (\varrho)^s + s(\varrho)^{s-1} R + \frac{s(s-1)}{2} (\varrho)^{s-2} R^2 + \cdots;$$

und erhält z. B. bei der Entwicklung der Funktion Q:

160)
$$2\Sigma' n Q_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}} \varrho^s \varrho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} \sin nH_1 =$$
$$= 2\Sigma' n \left\{ Q_{(n.s.s')_{\nu.\nu'}} + (s+1) Q_{(n.s+1.s')_{\nu.\nu'}} R + \frac{(s+1)(s+2)}{2} Q_{(n.s+2.s')_{\nu.\nu'}} R^2 + \cdots \right\} (\varrho)^s (\varrho)'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} \sin nH_1.$$

4. Um endlich die definitive Form herzustellen, die ich den Funktionen Q, P und Z geben will, transformiren wir schliesslich noch das Argument:

$$w_2 = (1-\mu)v - B - U.$$

Es ist nach 155)

$$U = \mu W - W' - \mathrm{H} + \mathrm{H}'.$$

Die Funktion U enthält keine Constante, da die constanten Glieder in B aufgenommen sind, aber sie wird im Allgemeinen ein seculares Glied enthalten; dasselbe kommt auf folgende Weise zu Stande:

Die Differentialgleichung 59) für W enthält rechter Hand verschiedene constante Glieder, sowohl erster wie höherer Ordnungen. Der wichtigste Teil erster Ordnung entsteht aus den Gliedern $S - 2R$, und wenn wir mit a_0 den constanten Teil von S, mit b_0 den constanten Teil von R bezeichnen, so ist der constante Teil von $\frac{dW}{dv}$, soweit er erster Ordnung ist, im Wesentlichsten

$$c_0 = a_0 - 2b_0.$$

Nun ist a_0 die Integrationsconstante, welche bei Integration der Gleichung 34) entsteht (und welche wir auch schon in Gleichung 6) so bezeichnet haben); und zwar ist diese Integrationsconstante eine überzählige, über welche wir verfügen können. Jedenfalls müssen wir sie so wählen, dass sie höchstens eine Grösse rein erster Ordnung wird, denn sonst würde man bei den Entwicklungen nach Potenzen von S auf Unannehmlichkeiten stossen. Wie sich später zeigen wird, ist bei einer derartigen Wahl von a_0 auch b_0 eine Grösse rein erster Ordnung. Es erscheint nun am Einfachsten, wenn man a_0 so bestimmt, dass der constante Teil von $\frac{dW}{dv}$ verschwindet, und wir werden auch in der Regel so verfahren[1]).

1) Siehe Kap. VI. § 2. Nr. 4.

Indessen giebt es Fälle, in denen es nicht möglich ist, den constanten Teil von $\frac{dW}{dv}$ zum Verschwinden zu bringen; handelt es sich nämlich um einen Planeten, dessen mittlere Bewegung besonders nahe commensurabel ist mit derjenigen Jupiters, und enthält infolgedessen die Funktion R eines oder mehrere auffallend grosse Glieder, so ist der constante Teil von $3R^2$, welche Grösse in der rechten Seite der Gleichung 59) auftritt, grösser als die störende Masse, obwohl er zweiter Ordnung ist; um den constanten Teil von $\frac{dW}{dv}$ zum Verschwinden zu bringen, müsste dann a_0 erheblich gross gewählt werden, und man würde überhaupt bei einem solchen Verfahren zu divergenten Resultaten geführt werden. In den besonders schwierigen Fällen des Systems der kleinen Planeten ist also die Annullirung des constanten Teils rechter Hand der Gleichung 59) nicht ausführbar; und wir wollen deshalb die Summe der constanten Glieder rechter Hand dieser Gleichung, welche rein erster Ordnung oder kleiner sind, mit c_0, den Teil aber, welcher gross ist im Verhältniss zur störenden Masse, und hauptsächlich aus dem Gliede $3R^2$ entsteht, mit γ bezeichnen; dann kann man schreiben:

161) $$\frac{dW}{dv} = c_0 + \gamma + \text{periodische Glieder.}$$

Man hat sich nur zu erinnern, dass c_0 stets zum Verschwinden gebracht werden kann, und dass γ nur bei denjenigen Planeten von Null verschieden ist, deren mittlere Bewegung äusserst nahe commensurabel ist mit der Jupiters und die unter die Klasse der kritischen Planeten (Kap. VII. § 1) fallen. Als Maximalwert, den γ überhaupt erreicht, kann man eine Grösse annehmen, welche mit dem Quadrat der elliptischen Excentricität verglichen werden kann, und zwar deshalb, weil der Maximalwert von R eben mit der elliptischen Excentricität vergleichbar ist. Uebrigens sind wohl von den bis jetzt entdeckten Planeten nur Hilda (153) und Ismene (190) als kritisch anzusehen und auch von diesen ist es zweifelhaft.

Wenn wir aber den Ausdruck 161) integriren, so entsteht in W nicht nur das seculare Glied $(c_0 + \gamma)v$, sondern auch die Integration der periodischen Glieder erzeugt einen secularen Teil, welcher mindestens zweiten Grades ist. Es ist dies die Folge unseres in den folgenden Kapiteln zu behandelnden Integrationsverfahrens, das ich nach dem Vorgange Gyldén's anwende, und mit Hilfe dessen wir in allen Fällen zu brauchbaren Entwicklungen gelangen.

Man erhält W in der Form:

161a) $$W = (c_0 + \gamma + \gamma_0)v + \text{periodische Glieder},$$

und nach pag. 61 haben wir:

$$\bar{\gamma} = c_0 + \gamma + \gamma_0.$$

Es wird sich zeigen, dass γ stets positiv ist, während γ_0 auch negativ sein kann, aber mindestens zweiten Grades ist.

Von der Funktion W', welche wir vernachlässigen, kann man annehmen, dass sie keinen secularen Teil enthält, da die Störungen, denen Jupiter ausgesetzt ist, so klein sind, dass man diesen Teil zum Verschwinden bringen kann.

Die Funktionen H und H′ enthalten beide einen secularen Teil, der zweiten Grades und ausserordentlich klein ist, und den man aus den Gleichungen 100) und 93) entnimmt. Nach 153) hatten wir bezeichnet:

$$\text{p. sec. H} = cv$$
$$\text{p. sec. H}' = \mu_2 c' v$$
$$\mu_2 = \mu(1+\bar{\gamma}).$$

Es ist also:

$$\text{p. sec. } w_1 = (1-\mu)v - \mu(c_0+\gamma+\gamma_0)v + (c-\mu_2 c')v = (1-\mu_1)v + (c-\mu_2 c')v,$$

aber

$$\text{p. const. } \frac{dw_1}{dv} = 1-\mu-\mu(c_0+\gamma)+c-\mu_2 c'.$$

Wenn wir nun U, wie folgt, zerlegen:

162) $$U = \mu(c_0+\gamma)v + \mu K + \mu V,$$

wo die Funktionen K und V gleich definirt werden sollen, und wenn wir bezeichnen:

163) $$\mu_1 = \mu(1+c_0+\gamma),$$

so wird:

$$w_1 = (1-\mu_1)v - B - \mu K - \mu V.$$

Die Funktion V soll so bestimmt werden, dass sie alle Glieder der Formen A und C enthält, welche in w_1 vorkommen, während alle anderen periodischen Glieder zu K gezogen werden; ferner soll K kein seculares Glied enthalten. Es ist dann:

$$\text{p. sec. } V = \gamma_0 v - (c-\mu_2 c')v,$$

und

$$\text{p. const. } \frac{dV}{dv} = -c+\mu_2 c'.$$

Nun endlich setzen wir:

164) $$w = (1-\mu_1)v - B - \mu V,$$

woraus folgt:

$$w_1 = w - \mu K,$$

und führen in die obigen Entwicklungen für $\rho^{s}\rho'^{s'}\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} n H_1$ statt des Winkels w_1 den Winkel w ein, indem wir nach Potenzen von K entwickeln.

5. Es ist nun nicht schwer, mit Hilfe der Entwicklungen 159), sowie der Formel 160), und indem man, wie eben bemerkt, nach Potenzen von K entwickelt, den Ansdruck 136) für die Funktion Q in die folgende definitive Form überzuführen:

165)
$$
\begin{aligned}
Q = {} & \Sigma A_{n\cdot 0\cdot 0}\sin nw && + \Sigma A^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0} R\sin nw && - \Sigma n\mu\, A_{n\cdot 0\cdot 0} K\cos nw \\
& + \Sigma A^{2\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0} R^2\sin nw && - \Sigma n\mu\, A^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0} RK\cos nw && - \tfrac{1}{2}\Sigma n^2\mu^2 A_{n\cdot 0\cdot 0} K^2\sin nw \\
& + \Sigma A^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0}\eta\sin(nw+\mathrm{v}) && + \Sigma A^{+1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 0} R\eta\sin(nw+\mathrm{v}) && - \Sigma n\mu\, A^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0} K\eta\cos(nw+\mathrm{v}) \\
& + \Sigma A^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0}\eta\sin(nw-\mathrm{v}) && + \Sigma A^{-1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 0} R\eta\sin(nw-\mathrm{v}) && - \Sigma n\mu\, A^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0} K\eta\cos(nw-\mathrm{v}) \\
& + \Sigma A^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1}\eta'\sin(nw+\mathrm{v}_1) && + \Sigma A^{+1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 1} R\eta'\sin(nw+\mathrm{v}_1) && - \Sigma n\mu\, A^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1} K\eta'\cos(nw+\mathrm{v}_1) \\
& + \Sigma A^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1}\eta'\sin(nw-\mathrm{v}_1) && + \Sigma A^{-1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 1} R\eta'\sin(nw-\mathrm{v}_1) && - \Sigma n\mu A^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1} K\eta'\cos(nw-\mathrm{v}_1) \\
& + \Sigma A_{n\cdot 2\cdot 0}\eta^2\sin nw && + \Sigma A^{1\cdot 0}_{n\cdot 2\cdot 0} R\eta^2\sin nw && - \Sigma n\mu A_{n\cdot 2\cdot 0} K\eta^2\cos nw \\
& + \Sigma A^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0}\eta^2\sin(nw+2\mathrm{v}) && + \Sigma A^{+2\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 2\cdot 0} R\eta^2\sin(nw+2\mathrm{v}) && - \Sigma n\mu A^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0} K\eta^2\cos(nw+2\mathrm{v}) \\
& + \Sigma A^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 0}\eta^2\sin(nw-2\mathrm{v}) && + \Sigma A^{-2\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0} R\eta^2\sin(nw-2\mathrm{v}) && - \Sigma n\mu A^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0} K\eta^2\cos(nw-2\mathrm{v}) \\
& + \Sigma A^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 1}\eta\eta'\sin(nw+\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) && + \Sigma A^{+2\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 1} R\eta\eta'\sin(nw+\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) && - \Sigma n\mu A^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 1} K\eta\eta'\cos(nw+\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) \\
& + \Sigma A^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 1}\eta\eta'\sin(nw+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) && + \Sigma A^{+1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 1} R\eta\eta'\sin(nw+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) && - \Sigma n\mu A^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 1} K\eta\eta'\cos(nw+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
& + \Sigma A^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 1}\eta\eta'\sin(nw-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) && + \Sigma A^{-1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 1} R\eta\eta'\sin(nw-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) && - \Sigma n\mu A^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 1} K\eta\eta'\cos(nw-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) \\
& + \Sigma A^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 1}\eta\eta'\sin(nw-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) && + \Sigma A^{-2\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 1} R\eta\eta'\sin(nw-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) && - \Sigma n\mu A^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 1} K\eta\eta'\cos(nw-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
& + \Sigma A_{n\cdot 0\cdot 2}\eta'^2\sin nw && + \Sigma A^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 2} R\eta'^2\sin nw && - \Sigma n\mu A_{n\cdot 0\cdot 0} K\eta'^2\cos nw \\
& + \Sigma A^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 2}\eta'^2\sin(nw+2\mathrm{v}_1) && + \Sigma A^{+2\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 2} R\eta'^2\sin(nw+2\mathrm{v}_1) && - \Sigma n\mu A^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 2} K\eta'^2\cos(nw+2\mathrm{v}_1) \\
& + \Sigma A^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 2}\eta'^2\sin(nw-2\mathrm{v}_1) && + \Sigma A^{-2\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 2} R\eta'^2\sin(nw-2\mathrm{v}_1) && - \Sigma n\mu A^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 2} K\eta'^2\cos(nw-2\mathrm{v}_1) \\
& + Q_i.
\end{aligned}
$$

Ich habe hier mit Q_i denjenigen Teil von Q bezeichnet, der von den Neigungen abhängt und den ich in No. 7 dieses Kapitels entwickeln will. Vernachlässigt habe ich R', W', die dritten Potenzen von R und K, und endlich die zweiten Potenzen dieser Funktionen, wenn sie noch mit η oder η' multiplicirt sind, sowie die Glieder dritten Grades.

Die Wahl der Indices für dio A-Coefficienten hoffe ich in möglichst über-

sichtlicher Weise getroffen zu haben: von den unteren Indices giebt der erste den Faktor von w, der zweite die Potenz von η, der dritte die Potenz von η'; von den oberen Indices giebt der mit einem Vorzeichen versehene die ganze Zahl, mit der v oder v_1, oder auch beide multiplicirt sind; von den beiden anderen oberen Indices giebt der erste die Potenz von R, der zweite die von R'; der letztere ist natürlich hier stets Null.

Für die A-Coefficienten findet man schliesslich die folgenden Ausdrücke [1]), wo ich der grösseren Klarheit wegen für die Coefficienten, deren Index n gleich Null ist, die Werte ausdrücklich hingeschrieben habe, da sie einerseits halb zu nehmen sind, andererseits sich teilweise zusammenziehen lassen. In einem Falle habe ich dies auch für $n = 1$ gethan; es dürfte somit in den angeführten Formeln keine Unklarheit sein.

166) $A_{n.0.0} = -2n\, Q_{n.0.0}, \qquad A_{0.0.0} = 0$

$$A^{(+1)}_{n.1.0} = -n\{Q_{n.1.0} + 2n\mu\, Q_{n.0.0}\}, \qquad A^{(+1)}_{0.1.0} = 0$$

$$A^{(-1)}_{n.1.0} = -n\{Q_{n.1.0} - 2n\mu\, Q_{n.0.0}\}, \qquad A^{(-1)}_{0.1.0} = 0$$

$$A^{(+1)}_{n.0.1} = -(n+1)\{Q_{n+1.0.1} - 2(n+1)\, Q_{n+1.0.0}\}, \qquad A^{(+1)}_{0.0.1} = -Q_{1.0.1} + 2Q_{1.0.0}$$

$$A^{(-1)}_{n.0.1} = -(n-1)\{Q_{n-1.0.1} + 2(n-1)\, Q_{n-1.0.0}\}, \qquad A^{(-1)}_{0.0.1} = 0$$

$$A_{n.2.0} = -n\{Q_{n.2.0} - 2n^2\mu^2\, Q_{n.0.0} + 2Q_{(n.0.0)_{2.0}}\}, \qquad A_{0.2.0} = 0$$

$$A^{(+2)}_{n.2.0} = -n\{\tfrac{1}{2}\, Q_{n.2.0} + n\mu\, Q_{n.1.0} + (n^2\mu^2 - \tfrac{3}{4}\, n\mu)\, Q_{n.0.0}\}, \qquad A^{(+2)}_{0.2.0} = 0$$

$$A^{(-2)}_{n.2.0} = -n\{\tfrac{1}{2}\, Q_{n.2.0} - n\mu\, Q_{n.1.0} + (n^2\mu^2 + \tfrac{3}{4}\, n\mu)\, Q_{n.0.0}\}, \qquad A^{(-2)}_{0.2.0} = 0$$

$$A^{(+2)}_{n.1.1} = -(n+1)\{\tfrac{1}{2} Q_{n+1.1.1} - (n+1) Q_{n+1.1.0} + n\mu Q_{n+1.0.1} - 2n(n+1)\mu Q_{n+1.0.0}\}, \quad A^{(+2)}_{0.1.1} = -\tfrac{1}{2} Q_{1.1.1} + Q_{1.1.0}$$

$$A^{(+1)}_{n.1.1} = -(n-1)\{\tfrac{1}{2} Q_{n-1.1.1} + (n-1) Q_{n-1.1.0} + n\mu Q_{n-1.0.1} + 2n(n-1)\mu Q_{n-1.0.0}\}, \quad A^{(+1)}_{0.1.1} = \tfrac{1}{2} Q_{1.1.1} - Q_{1.1.0}$$

$$A^{(-1)}_{n.1.1} = -(n+1)\{\tfrac{1}{2} Q_{n+1.1.1} - (n+1) Q_{n+1.1.0} - n\mu Q_{n+1.0.1} + 2n(n+1)\mu Q_{n+1.0.0}\}, \quad A^{(-1)}_{0.1.1} = 0$$

$$A^{(-2)}_{n.1.1} = -(n-1)\{\tfrac{1}{2} Q_{n-1.1.1} + (n-1) Q_{n-1.1.0} - n\mu Q_{n-1.0.1} - 2n(n-1)\mu Q_{n-1.0.0}\}, \quad A^{(-2)}_{0.1.1} = 0$$

1) In seinen bereits pag. 50 erwähnten „Hülfstafeln" giebt Gyldén die numerischen Werte der A- und B-Coefficienten. Der Umstand, dass diese Coefficienten bei uns in anderer Form auftreten, als bei Gyldén, ist gewiss etwas hinderlich bei Benutzung dieser Tafeln. Indessen scheinen mir die Vorteile der hier angewandten Bezeichnungsweise so bedeutende, dass ich nicht davon abgehen wollte, namentlich da die Gyldén'sche Bezeichnung nicht immer eindeutig ist. — Ausserdem muss ich bemerken, dass unsere A- und B-Coefficienten von der Apsidenbewegung vollkommen unabhängig, ihre Werte also strenge sind. Vgl. die Bemerkung auf pag. X in den Hülfstafeln.

$$A_{n\cdot 0\cdot 2} = -n\{Q_{n.0.2} - 2Q_{n.0.1} - 2n^2 Q_{n.0.0} + 2Q_{(n.0.0)_{0.1}}\}, \qquad A_{0\cdot 0\cdot 2} = 0$$

$$A^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 0} = -(n+2)\{\tfrac{1}{2}Q_{n+2.0.2} - (n+1)Q_{n+2.0.1} + (n^2 + \tfrac{11}{4}n + \tfrac{3}{2})Q_{n+2.0.0}\}, \qquad A^{(+2)}_{0\cdot 0\cdot 2} = -Q_{2\cdot 0\cdot 0} + 2Q_{2\cdot 0\cdot 1} - 3Q_{2\cdot 0\cdot 0}$$

$$A^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 2} = -(n-2)\{\tfrac{1}{2}Q_{n-2.0.2} + (n-1)Q_{n-2.0.1} + (n^2 - \tfrac{11}{4}n + \tfrac{3}{2})Q_{n-2.0.0}\}, \qquad A^{(-2)}_{0\cdot 0\cdot 2} = 0$$

$$A^{(-2)}_{1\cdot 0\cdot 2} = \tfrac{1}{2}Q_{1\cdot 0\cdot 2} - \tfrac{1}{4}Q_{1\cdot 0\cdot 0}$$

$$A^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0} = -2nQ_{n.1.0}, \qquad A^{1\cdot 0}_{0\cdot 0\cdot 0} = 0$$

$$A^{+1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 0} = -n\{2Q_{n.2.0} + 2n\mu Q_{n.1.0}\}, \qquad A^{+1\cdot 1\cdot 0}_{0\cdot 1\cdot 0} = 0$$

$$A^{-1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 0} = -n\{2Q_{n.2.0} - 2n\mu Q_{n.1.0}\}, \qquad A^{-1\cdot 1\cdot 0}_{0\cdot 1\cdot 0} = 0$$

$$A^{+1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 1} = -(n+1)\{Q_{n+1.1.1} - 2(n+1)Q_{n+1.1.0}\}, \qquad A^{+1\cdot 1\cdot 0}_{0\cdot 0\cdot 1} = -Q_{1\cdot 1\cdot 1} + 2Q_{1\cdot 1\cdot 0}$$

$$A^{-1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 1} = -(n-1)\{Q_{n-1.1.1} + 2(n-1)Q_{n-1.1.0}\}, \qquad A^{-1\cdot 1\cdot 0}_{0\cdot 0\cdot 1} = 0$$

$$A^{1\cdot 0}_{n\cdot 2\cdot 0} = -n\{3Q_{n.3.0} - 2n^2\mu^2 Q_{n.1.0} + 2Q_{(n.1.0)_{1\cdot 0}}\}, \qquad A^{1\cdot 0}_{0\cdot 2\cdot 0} = 0$$

$$A^{+2\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 2\cdot 0} = -n\{\tfrac{3}{2}Q_{n.3.0} + 2n\mu Q_{n.2.0} + (n^2\mu^2 - \tfrac{3}{2}n\mu)Q_{n.1.0}\}, \qquad A^{+2\cdot 1\cdot 0}_{0\cdot 2\cdot 0} = 0$$

$$A^{-2\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 2\cdot 0} = -n\{\tfrac{3}{2}Q_{n.3.0} - 2n\mu Q_{n.2.0} + (n^2\mu^2 + \tfrac{3}{2}n\mu)Q_{n.1.0}\}, \qquad A^{-2\cdot 1\cdot 0}_{0\cdot 2\cdot 0} = 0$$

$$A^{+2\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 1} = -(n+1)\{Q_{n+1.2.1} - 2(n+1)Q_{n+1.2.0} + n\mu Q_{n+1.1.1} - 2n(n+1)\mu Q_{n+1.1.0}\}, \qquad A^{+2\cdot 1\cdot 0}_{0\cdot 1\cdot 1} = -Q_{1\cdot 2\cdot 1} + 2Q_{1\cdot 2\cdot 0}$$

$$A^{+1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 1} = -(n-1)\{Q_{n-1.2.1} + 2(n-1)Q_{n-1.2.0} + n\mu Q_{n-1.1.1} + 2n(n-1)\mu Q_{n-1.1.0}\}, \qquad A^{+1\cdot 1\cdot 0}_{0\cdot 1\cdot 1} = Q_{1\cdot 2\cdot 1} - 2Q_{1\cdot 2\cdot 0}$$

$$A^{-1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 1} = -(n+1)\{Q_{n+1.2.1} - 2(n+1)Q_{n+1.2.0} - n\mu Q_{n+1.1.1} + 2n(n+1)\mu Q_{n+1.1.0}\}, \qquad A^{-1\cdot 1\cdot 0}_{0\cdot 1\cdot 1} = 0$$

$$A^{-2\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 1} = -(n-1)\{Q_{n-1.2.1} + 2(n-1)Q_{n-1.2.0} - n\mu Q_{n-1.1.1} - 2n(n-1)\mu Q_{n-1.1.0}\}, \qquad A^{-2\cdot 1\cdot 0}_{0\cdot 1\cdot 1} = 0$$

$$A^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 2} = -n\{Q_{n.1.2} - 2Q_{n.1.1} - 2n^2 Q_{n.1.0} + 2Q_{(n.1.0)_{0.1}}\}, \qquad A^{1\cdot 0}_{0\cdot 0\cdot 2} = 0$$

$$A^{+2\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 2} = -(n+2)\{\tfrac{1}{2}Q_{n+2.1.2} - (n+1)Q_{n+2.1.1} + (n^2 + \tfrac{11}{4}n + \tfrac{3}{2})Q_{n+2.1.0}\}, \qquad A^{+2\cdot 1\cdot 0}_{0\cdot 0\cdot 2} = -Q_{2\cdot 1\cdot 2} + 2Q_{2\cdot 1\cdot 1} - 3Q_{2\cdot 1\cdot 0}$$

$$A^{-2\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 2} = -(n-2)\{\tfrac{1}{2}Q_{n-2.1.2} + (n-1)Q_{n-2.1.1} + (n^2 - \tfrac{11}{4}n + \tfrac{3}{2})Q_{n-2.1.0}\}, \qquad A^{-2\cdot 1\cdot 0}_{0\cdot 0\cdot 2} = 0$$

$$A^{-2\cdot 1\cdot 0}_{1\cdot 0\cdot 2} = \tfrac{1}{2}Q_{1\cdot 1\cdot 2} - \tfrac{1}{4}Q_{1\cdot 1\cdot 0}$$

$$A^{2\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0} = -2n\,Q_{n.2.0}, \qquad A^{2\cdot 0}_{0\cdot 0\cdot 0} = 0.$$

6. Wir wollen nun den Ausdruck Q_i entwickeln, welcher von den Neigungen abhängt. Nach 136) ist offenbar, wenn wir w_1 für H_1 schreiben, da wir ja die Glieder dritten Grades vernachlässigen wollen:

$$\text{167)} \qquad Q_i = -2\Sigma n\,\bar{Q}_{n.0.0}\,h\,\sin nw_1 + 2\Sigma'\,\bar{Q}_{n.0.0}\frac{\partial h}{dv}\cos nw_1,$$

und in diesem Ausdruck sollen h und $\frac{\partial h}{dv}$ zunächst durch $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}'$ ersetzt werden.

Es ist nach 106), wenn wir für H_1 das Argument w_1 setzen, also Glieder dritten Grades fortlassen:

168) $$h = -\frac{\mathfrak{z}^2+\mathfrak{z}'^2}{2}\cos w_1 + \frac{\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{dv}-\mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'}}{2}\sin w_1 + \mathfrak{z}\mathfrak{z}'.$$

Durch Differentiation dieses Ausdrucks erhält man $\frac{\partial h}{dv}$, indem man bei dieser Differentiation alle Grössen, welche sich auf die Lage der Bahnebene beziehen, als constant ansieht. Dann ist nämlich:

$$\frac{\partial \cos w_1}{dv} = -\sin w_1, \qquad \frac{\partial \sin w_1}{dv} = \cos w_1$$

$$\frac{\partial \mathfrak{z}}{dv} = \frac{d\mathfrak{z}}{dv}, \qquad \frac{\partial \frac{d\mathfrak{z}}{dv}}{dv} = -\mathfrak{z},$$

und man erhält:

169) $$\frac{\partial h}{dv} = \frac{\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2+\mathfrak{z}'^2}{2}\sin w_1 - \frac{\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{dv}+\mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'}}{2}\cos w_1 + \mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}}{dv}.$$

Die Ausdrücke 168) und 169) wollen wir zunächst noch weiter umformen. Man hat nämlich:

$$\mathfrak{z} = \sin j \sin \mathfrak{v} + \mathfrak{Z},$$

woraus folgt, ähnlich der Relation 89)

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dv} = \sin j \cos \mathfrak{v} + \frac{d\nu_1}{dv}\sin v - \frac{d\nu_2}{dv}\cos v + \frac{d\mathfrak{Z}}{dv}.$$

Die ausserordentliche Kleinheit der Funktionen $\frac{d\nu_1}{dv}$ und $\frac{d\nu_2}{dv}$ gestattet uns, dieselben hier zu vernachlässigen und wir bilden die folgenden Ausdrücke:

$$\mathfrak{z}^2 = \tfrac{1}{2}\sin^2 j - \tfrac{1}{2}\sin^2 j \cos 2\mathfrak{v} + 2\mathfrak{Z}\sin j \sin \mathfrak{v} + \mathfrak{Z}^2$$

170) $$\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\sin^2 j + \tfrac{1}{2}\sin^2 j \cos 2\mathfrak{v} + 2\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\sin j \cos \mathfrak{v} + \left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\right)^2$$

$$\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{dv} = \tfrac{1}{4}\sin^2 j \sin 2\mathfrak{v} + \mathfrak{Z}\sin j \cos \mathfrak{v} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\sin j \sin \mathfrak{v} + \mathfrak{Z}\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}.$$

Aehnliche Ausdrücke lassen sich für den störenden Körper bilden; man hat nämlich in Analogie mit den Gleichungen 72) bis 77):

$$\mathfrak{z}' = (\mathfrak{z})' + \mathfrak{Z}'$$
$$(\mathfrak{z})' = \Sigma \sin\iota_n' \sin[(1+\tau_n')v' - \Theta_n']$$
171) $$\sin j' \frac{\cos}{\sin} \sigma' = \Sigma \sin\iota_n' \frac{\cos}{\sin} (\Theta_n' - \tau_n' v')$$
$$(\mathfrak{z})' = \sin j' \sin \mathfrak{v}'$$
$$\mathfrak{v}' = v' - \sigma',$$

und hieraus bilden wir:

$$\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'} = \sin j' \cos \mathfrak{v}' + \frac{d\nu_1'}{dv'} \sin v' - \frac{d\nu_2'}{dv'} \cos v' + \frac{d\mathfrak{Z}'}{dv'},$$

wo in Analogie mit 88) gesetzt ist:

171a) $\nu_1' = \sin j' \cos \sigma'$, $\nu_2' = \sin j' \sin \sigma'$.

Die vorstehenden Ausdrücke transformiren wir ebenso wie 147) und erhalten

$$\mathfrak{z}' = (\mathfrak{z}') + (\mathfrak{Z}')$$
$$\vartheta_n = \Theta_n - \tau_n v$$
$$\Theta_n = \Theta_n' - \tau_n' B$$
$$\tau_n = \mu_1 \tau_n' + c - \mu_2 c'$$
$$(\mathfrak{z}') = \Sigma \sin\iota_n' \sin(v' - \vartheta_n - \mathrm{H} + \mathrm{H}')$$
172) $$\sin j' \frac{\cos}{\sin} \sigma_1' = \Sigma \sin\iota_n' \frac{\cos}{\sin} (\vartheta_n + \mathrm{H} - \mathrm{H}')$$
$$(\mathfrak{z}') = \sin j' \sin \mathfrak{v}_1'$$
$$\mathfrak{v}_1' = v' - \sigma_1'$$
$$\sigma_1 = \sigma_1' - \mathrm{H} + \mathrm{H}'$$
$$\sin j' \frac{\cos}{\sin} \sigma_1 = \Sigma \sin\iota_n' \frac{\cos}{\sin} \vartheta_n$$
$$\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'} = \sin j' \cos \mathfrak{v}_1' + \frac{d\nu_1'}{dv'} \sin v' - \frac{d\nu_2'}{dv'} \cos v' + \left(\frac{d\mathfrak{Z}'}{dv'}\right),$$

wo ich $(\mathfrak{Z}')$ und $\left(\frac{d\mathfrak{Z}'}{dv'}\right)$ geschrieben habe, da in diesen beiden Funktionen die kleinen Glieder aufgenommen sind, die durch Einführung von $\mathfrak{v}_1'$ an Stelle von $\mathfrak{v}'$ entstehen. Die Constanten ι_n, τ_n' und Θ_n' setzen wir als bekannt voraus.

Ferner sei:

173) $$\mathfrak{v}_1 = v - \sigma_1,$$

woraus nach 152) und 155):

174) $$\mathfrak{v}_1' = -w_1 + \mathfrak{v}_1 + G.$$

Wir vernachlässigen $\frac{dv_1'}{dv'}$, $\frac{dv_2'}{dv'}$ und $\mathfrak{Z}'$ und führen mit Hilfe der Relation 174) für das Argument $\mathfrak{v}_1'$ die Argumente w_1 und $\mathfrak{v}_1$ ein; die Funktion G lassen wir bei Seite, da dies der Vernachlässigung der Glieder dritten Grades gleichkommt. Wir erhalten so:

175a)
$$\mathfrak{z}'^2 = \tfrac{1}{2}\sin^2 j' - \tfrac{1}{2}\sin^2 j' \cos(2w_1 - 2\mathfrak{v}_1)$$
$$\mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'} = -\tfrac{1}{2}\sin^2 j' \sin(2w_1 - 2\mathfrak{v}_1).$$

Auf dieselbe Weise bilden wir endlich:

175b)
$$\mathfrak{z}\mathfrak{z}' = \tfrac{1}{2}\sin j \sin j' \cos(w_1 + \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_1) - \tfrac{1}{2}\sin j \sin j' \cos(w_1 - \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_1) - \mathfrak{Z}\sin j' \sin(w_1 - \mathfrak{v}_1)$$
$$\mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}}{dv} = -\tfrac{1}{2}\sin j \sin j' \sin(w_2 + \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_1) - \tfrac{1}{2}\sin j \sin j' \sin(w_2 - \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_1) - \frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\sin j' \sin(w_1 - \mathfrak{v}_1).$$

Die Ausdrücke 170) und 175) führen wir jetzt in die Relationen 168) und 169) ein, und erhalten dann:

176a)
$$\begin{aligned} h = &-\tfrac{1}{4}\sin^2 j \cos w_1 + \tfrac{1}{4}\sin^2 j \cos(w_1 - 2\mathfrak{v}) \\ &+ \tfrac{1}{2}\sin j \sin j' \cos(w_1 + \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_1) - \tfrac{1}{2}\sin j \sin j' \cos(w_1 - \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_1) \\ &- \tfrac{1}{4}\sin^2 j' \cos w_1 + \tfrac{1}{4}\sin^2 j' \cos(w_1 - 2\mathfrak{v}_1) \\ &- \tfrac{1}{4}\mathfrak{Z}\sin j \sin(w_2 + \mathfrak{v}) + \tfrac{3}{4}\mathfrak{Z}\sin j \sin(w_1 - \mathfrak{v}) \\ &- \tfrac{1}{4}\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\sin j \cos(w_1 + \mathfrak{v}) + \tfrac{1}{4}\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\sin j \cos(w_1 - \mathfrak{v}) \\ &- \mathfrak{Z}\sin j' \sin(w_1 - \mathfrak{v}_2) \\ &- \tfrac{1}{2}\mathfrak{Z}^2 \cos w_1 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{Z}\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\sin w_1 \end{aligned}$$

176b)
$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{dv} = &+\tfrac{1}{4}\sin^2 j \sin w_1 + \tfrac{1}{4}\sin^2 j \sin(w_1 - 2\mathfrak{v}) \\ &- \tfrac{1}{2}\sin j \sin j' \sin(w_1 + \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_2) - \tfrac{1}{2}\sin j \sin j' \sin(w_1 - \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_1) \\ &+ \tfrac{1}{4}\sin^2 j' \sin w_1 + \tfrac{1}{4}\sin^2 j' \sin(w_1 - 2\mathfrak{v}_1) \\ &- \tfrac{1}{4}\mathfrak{Z}\sin j \cos(w_2 + \mathfrak{v}) - \tfrac{1}{4}\mathfrak{Z}\sin j \cos(w_1 - \mathfrak{v}) \\ &+ \tfrac{1}{4}\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\sin j \sin(w_1 + \mathfrak{v}) + \tfrac{3}{4}\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\sin j \sin(w_1 - \mathfrak{v}) \\ &- \frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\sin j' \sin(w_1 - \mathfrak{v}_1) \\ &+ \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\right)^2 \sin w_1 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{Z}\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\cos w_1. \end{aligned}$$

7. Führt man diese Werte in den Ausdruck 167) ein und ersetzt man das Argument w_1 durch w, indem man nach Potenzen von K entwickelt, so kommt der folgende Ausdruck zu Stande:

$$
\begin{aligned}
177)\; Q_t = {} & \Sigma\bar{A}_{n\cdot 2\cdot 0}\sin^2 j\sin nw && + \Sigma\bar{A}^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 1}\sin j\sin j'\sin(nw+\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1) && + \Sigma\bar{A}_{n\cdot 0\cdot 2}\sin^2 j'\sin nw \\
& + \Sigma\bar{A}^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0}\sin^2 j\sin(nw+2\mathfrak{v}) && + \Sigma\bar{A}^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 1}\sin j\sin j'\sin(nw+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) && + \Sigma\bar{A}^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 2}\sin^2 j'\sin(nw+2\mathfrak{v}_1) \\
& + \Sigma\bar{A}^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0}\sin^2 j\sin(nw-2\mathfrak{v}) && + \Sigma\bar{A}^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 1}\sin j\sin j'\sin(nw-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1) && + \Sigma\bar{A}^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 2}\sin^2 j'\sin(nw-2\mathfrak{v}_1) \\
& && + \Sigma\bar{A}^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 1}\sin j\sin j'\sin(nw-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& - \Sigma n\mu\bar{A}_{n\cdot 2\cdot 0}K\sin^2 j\cos nw && - \Sigma n\mu\bar{A}^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 1}K\sin j\sin j'\cos(nw+\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1) - \Sigma n\mu\bar{A}_{n\cdot 0\cdot 2}K\sin^2 j'\cos nw \\
& - \Sigma n\mu\bar{A}^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0}K\sin^2 j\cos(nw+2\mathfrak{v}) && - \Sigma n\mu\bar{A}^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 1}K\sin j\sin j'\cos(nw+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) - \Sigma n\mu\bar{A}^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 2}K\sin^2 j'\cos(nw+2\mathfrak{v}_1) \\
& - \Sigma n\mu\bar{A}^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0}K\sin^2 j\cos(nw-2\mathfrak{v}) && - \Sigma n\mu\bar{A}^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 1}K\sin j\sin j'\cos(nw-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1) - \Sigma n\mu\bar{A}^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 2}K\sin^2 j'\cos(nw-2\mathfrak{v}_1) \\
& && - \Sigma n\mu\bar{A}^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 1}K\sin j\sin j'\cos(nw-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& + \Sigma\bar{A}^{+1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 0}\mathfrak{Z}\sin j\cos(nw+\mathfrak{v}) && + \Sigma\bar{A}^{+1\cdot 0\cdot 1}_{n\cdot 1\cdot 0}\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\sin j\sin(nw+\mathfrak{v}) \\
& + \Sigma\bar{A}^{-1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 0}\mathfrak{Z}\sin j\cos(nw-\mathfrak{v}) && + \Sigma\bar{A}^{-1\cdot 0\cdot 1}_{n\cdot 1\cdot 0}\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\sin j\sin(nw-\mathfrak{v}) \\
& + \Sigma\bar{A}^{+1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 1}\mathfrak{Z}\sin j'\cos(nw+\mathfrak{v}_1) && + \Sigma\bar{A}^{+1\cdot 0\cdot 1}_{n\cdot 0\cdot 1}\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\sin j'\sin(nw+\mathfrak{v}_1) \\
& + \Sigma\bar{A}^{-1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 1}\mathfrak{Z}\sin j'\cos(nw-\mathfrak{v}_1) && + \Sigma\bar{A}^{-1\cdot 0\cdot 1}_{n\cdot 0\cdot 1}\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\sin j'\sin(nw-\mathfrak{v}_1) \\
& + \Sigma\bar{A}^{2\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0}\mathfrak{Z}^2\sin nw \\
& + \Sigma\bar{A}^{1\cdot 1}_{n\cdot 0\cdot 0}\mathfrak{Z}\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\cos nw \\
& + \Sigma\bar{A}^{0\cdot 2}_{n\cdot 0\cdot 0}\left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\right)^2\sin nw
\end{aligned}
$$

Bei den $\bar{A}$-Coefficienten giebt von den unteren Indices der erste den Faktor von w, der zweite die Potenz von $\sin j$, der dritte die Potenz von $\sin j'$; der mit einem Vorzeichen versehene obere Index giebt die ganze Zahl, mit der $\mathfrak{v}$ oder $\mathfrak{v}_1$ oder auch beide multiplicirt sind; von den beiden anderen oberen Indices giebt der erstere die Potenz von $\mathfrak{Z}$, der zweite die von $\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}$.

Man erhält durch die angedeutete Operation die folgenden Ausdrücke für die $\bar{A}$-Coefficienten:

178) $$\overline{A}_{n\cdot2\cdot0} = \frac{n}{4}\left\{\overline{Q}_{n-1.0.0}+\overline{Q}_{n+1.0.0}\right\} \qquad \overline{A}_{0\cdot2\cdot0} = 0$$

$$\overline{A}^{(+2)}_{n\cdot2\cdot0} = -\frac{n+2}{4}\,\overline{Q}_{n+1.0.0} \qquad \overline{A}^{(+2)}_{0\cdot2\cdot0} = -\tfrac{1}{2}\overline{Q}_{1.0.0}$$

$$\overline{A}^{(-2)}_{n\cdot2\cdot0} = -\frac{n-2}{4}\,\overline{Q}_{n-1.0.0} \qquad \overline{A}^{(-2)}_{0\cdot2\cdot0} = 0$$

$$\overline{A}^{(+2)}_{n\cdot1\cdot1} = \frac{n+2}{2}\,\overline{Q}_{n+1.0.0} \qquad \overline{A}^{+2}_{0\cdot1\cdot1} = \overline{Q}_{1.0.0}$$

$$\overline{A}^{(+1)}_{n\cdot1\cdot1} = -\frac{n}{2}\,\overline{Q}_{n-1.0.0} \qquad \overline{A}^{(+1)}_{0\cdot1\cdot1} = 0$$

$$\overline{A}^{(-1)}_{n\cdot1\cdot1} = -\frac{n}{2}\,\overline{Q}_{n+1.0.0} \qquad \overline{A}^{(-1)}_{0\cdot1\cdot1} = 0$$

$$\overline{A}^{(-2)}_{n\cdot1\cdot1} = \frac{n-2}{2}\,\overline{Q}_{n-1.0.0} \qquad \overline{A}^{(-2)}_{0\cdot1\cdot1} = 0$$

$$\overline{A}_{n\cdot0\cdot2} = \frac{n}{4}\left\{\overline{Q}_{n-1.0.0}+\overline{Q}_{n+1.0.0}\right\} \qquad \overline{A}_{0\cdot0\cdot2} = 0$$

$$\overline{A}^{(+2)}_{n\cdot0\cdot2} = -\frac{n+2}{4}\,\overline{Q}_{n+1.0.0} \qquad \overline{A}^{(+2)}_{0\cdot0\cdot2} = -\tfrac{1}{2}\overline{Q}_{1.0.0}$$

$$\overline{A}^{(-2)}_{n\cdot0\cdot2} = -\frac{n-2}{4}\,\overline{Q}_{n-1.0.0} \qquad \overline{A}^{(-2)}_{0\cdot0\cdot2} = 0$$

$$\overline{A}^{+1\cdot1\cdot0}_{n\cdot1\cdot0} = -\frac{n}{4}\,\overline{Q}_{n-1.0.0}-\frac{3n+4}{4}\,\overline{Q}_{n+1.0.0} \qquad \overline{A}^{+1\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot0} = -\overline{Q}_{1.0.0}$$

$$\overline{A}^{-1\cdot1\cdot0}_{n\cdot1\cdot0} = \frac{3n-4}{4}\,\overline{Q}_{n-1.0.0}+\frac{n}{4}\,\overline{Q}_{n+1.0.0} \qquad \overline{A}^{-1\cdot1\cdot0}_{0\cdot1\cdot0} = 0$$

$$\overline{A}^{+1\cdot1\cdot0}_{n\cdot0\cdot1} = (n+1)\,\overline{Q}_{n+1.0.0} \qquad \overline{A}^{+1\cdot1\cdot0}_{0\cdot0\cdot1} = \overline{Q}_{1.0.0}$$

$$\overline{A}^{-1\cdot0\cdot0}_{n\cdot0\cdot1} = -(n-1)\,\overline{Q}_{n-1.0.0} \qquad \overline{A}^{-1\cdot1\cdot0}_{0\cdot0\cdot1} = 0$$

$$\overline{A}^{+1\cdot0\cdot1}_{n\cdot1\cdot0} = \frac{n}{4}\,\overline{Q}_{n-1.0.0}-\frac{n+4}{4}\,\overline{Q}_{n+1.0.0} \qquad \overline{A}^{+1\cdot0\cdot1}_{0\cdot1\cdot0} = -\overline{Q}_{1.0.0}$$

$$\overline{A}^{-1\cdot0\cdot1}_{n\cdot1\cdot0} = -\frac{n-4}{4}\,\overline{Q}_{n-1.0.0}+\frac{n}{4}\,\overline{Q}_{n+1.0.0} \qquad \overline{A}^{-1\cdot0\cdot1}_{0\cdot1\cdot0} = 0$$

$$\overline{A}^{+1\cdot0\cdot1}_{n\cdot0\cdot1} = \overline{Q}_{n+1.0.0} \qquad \overline{A}^{+1\cdot0\cdot1}_{0\cdot0\cdot1} = \overline{Q}_{1.0.0}$$

$$\overline{A}^{-1\cdot0\cdot1}_{n\cdot0\cdot1} = -\overline{Q}_{n-1.0.0} \qquad \overline{A}^{-1\cdot0\cdot1}_{0\cdot0\cdot1} = 0$$

$$178)\qquad \bar{A}^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0} = \frac{n-1}{2}\bar{Q}_{n-1.0.0} + \frac{n+1}{2}\bar{Q}_{n+1.0.0} \qquad \bar{A}^{1\cdot 0}_{0\cdot 0\cdot 0} = 0$$

$$\bar{A}^{1\cdot 1}_{n\cdot 0\cdot 0} = \frac{n-2}{2}\bar{Q}_{n-1.0.0} - \frac{n+2}{2}\bar{Q}_{n+1.0.0} \qquad \bar{A}^{1\cdot 1}_{0\cdot 0\cdot 0} = -\bar{Q}_{1.0.0}$$

$$\bar{A}^{0\cdot 2}_{n\cdot 0\cdot 0} = \tfrac{1}{2}\bar{Q}_{n-1.0.0} - \tfrac{1}{2}\bar{Q}_{n+1.0.0} \qquad \bar{A}^{0\cdot 2}_{0\cdot 0\cdot 0} = 0.$$

8. Ich will nun die Funktion P in derselben Weise transformiren, wie Q; wir berücksichtigen die Entwicklungen 157), 159) und 176a) und führen sie in 139) ein; wenn wir dann gleichzeitig wieder nach Potenzen von K entwickeln, so wird:

$$179)\ P = \Sigma B_{n\cdot 0\cdot 0}\cos nw \quad + \Sigma B^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0} R\cos nw \quad + \Sigma n\mu B_{n\cdot 0\cdot 0} K\sin nw$$
$$+ \Sigma B^{2\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0} R^2\cos nw \quad + \Sigma n\mu B^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0} RK\sin nw \quad - \tfrac{1}{2}\Sigma n^2\mu^2 B_{n\cdot 0\cdot 0} K^2\cos nw$$

$$+ \Sigma B^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0}\eta\cos(nw+\mathrm{v}) \quad + \Sigma B^{+1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 0} R\eta\cos(nw+\mathrm{v}) \quad + \Sigma n\mu B^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0} K\eta\sin(nw+\mathrm{v})$$
$$+ \Sigma B^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0}\eta\cos(nw-\mathrm{v}) \quad + \Sigma B^{-1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 0} R\eta\cos(nw-\mathrm{v}) \quad + \Sigma n\mu B^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0} K\eta\sin(nw-\mathrm{v})$$
$$+ \Sigma B^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1}\eta'\cos(nw+\mathrm{v}_1) \quad + \Sigma B^{+1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 1} R\eta'\cos(nw+\mathrm{v}_1) \quad + \Sigma n\mu B^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1} K\eta'\sin(nw+\mathrm{v}_1)$$
$$+ \Sigma B^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1}\eta'\cos(nw-\mathrm{v}_1) \quad + \Sigma B^{-1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 1} R\eta'\cos(nw-\mathrm{v}_1) \quad + \Sigma n\mu B^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1} K\eta'\sin(nw-\mathrm{v}_1)$$

$$+ \Sigma B_{n\cdot 2\cdot 0}\eta^2\cos nw \quad + \Sigma B^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 1}\eta\eta'\cos(nw+\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) \quad + \Sigma B_{n\cdot 0\cdot 2}\eta'^2\cos nw$$
$$+ \Sigma B^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0}\eta^2\cos(nw+2\mathrm{v}) \quad + \Sigma B^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 1}\eta\eta'\cos(nw+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \quad + \Sigma B^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 2}\eta'^2\cos(nw+2\mathrm{v}_1)$$
$$+ \Sigma B^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 0}\eta^2\sin(nw-2\mathrm{v}) \quad + \Sigma B^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 1}\eta\eta'\cos(nw-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) \quad + \Sigma B^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 2}\eta'^2\cos(nw-2\mathrm{v}_1)$$
$$+ \Sigma B^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 1}\eta\eta'\cos(nw-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)$$

$$+ \Sigma\bar{B}_{n\cdot 2\cdot 0}\sin^2 j\cos nw \quad + \Sigma\bar{B}^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 1}\sin j\sin j'\cos(nw+\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1) \quad + \Sigma\bar{B}_{n\cdot 0\cdot 2}\sin^2 j'\cos nw$$
$$+ \Sigma\bar{B}^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0}\sin^2 j\cos(nw+2\mathfrak{v}) \quad + \Sigma\bar{B}^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 1}\sin j\sin j'\cos(nw+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) \quad + \Sigma\bar{B}^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 2}\sin^2 j'\cos(nw+2\mathfrak{v}_1)$$
$$+ \Sigma\bar{B}^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0}\sin^2 j\cos(nw-2\mathfrak{v}) \quad + \Sigma\bar{B}^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 1}\sin j\sin j'\cos(nw-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1) \quad + \Sigma\bar{B}^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 0}\sin^2 j'\cos(nw-2\mathfrak{v}_1)$$
$$+ \Sigma\bar{B}^{(-0)}_{n\cdot 1\cdot 1}\sin j\sin j'\cos(nw-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1)$$

$$+ \Sigma\bar{B}^{+1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 0}\mathfrak{Z}\sin j\sin(nw+\mathfrak{v}) \quad + \Sigma\bar{B}^{+1\cdot 0\cdot 1}_{n\cdot 1\cdot 0}\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\sin j\cos(nw+\mathfrak{v})$$
$$+ \Sigma\bar{B}^{-1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 0}\mathfrak{Z}\sin j\sin(nw-\mathfrak{v}) \quad + \Sigma\bar{B}^{-1\cdot 0\cdot 1}_{n\cdot 1\cdot 0}\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\sin j\cos(nw-\mathfrak{v})$$
$$+ \Sigma\bar{B}^{+1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 1}\mathfrak{Z}\sin j'\sin(nw+\mathfrak{v}_1)$$
$$+ \Sigma\bar{B}^{-1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 1}\mathfrak{Z}\sin j'\sin(nw-\mathfrak{v}_1)$$

$$+ \Sigma\bar{B}^{2\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0}\mathfrak{Z}^2\cos nw \quad + \Sigma\bar{B}^{1\cdot 1}_{n\cdot 0\cdot 0}\mathfrak{Z}\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\sin nw$$

Wir haben hierbei die Glieder vernachlässigt, welche R und K enthalten und zugleich zweiten Grades sind, obwohl wir die entsprechenden Glieder in Q berücksichtigt haben. Indessen sind sie hier bedeutungslos, während einige von ihnen in der Funktion Q unter Umständen merklich gross werden können. Uebrigens müssten wir auch unsere frühere Entwicklung von Ω etwas weiter ausführen, um die zu den genannten Gliedern gehörenden B-Coefficienten zu berechnen, während die entsprechenden A-Coefficienten nach 178) ohne Weiteres berechnet werden können.

Die Indicirung der B-Coefficienten ist die gleiche wie die der A-Coefficienten, und die Coefficienten $\bar{B}^{+1.0.1}_{n.0.1}$, $\bar{B}^{-1.0.1}_{n.0.1}$ und $\bar{B}^{0.0}_{n.0.0}$ fallen fort. Schliesslich erhält man für die B-Coefficienten die folgenden Ausdrücke:

180) $B_{n.0.0} = 2P_{n.0.0}$ $\qquad B_{0.0.0} = P_{0.0.0}$

$B^{(+1)}_{n.1.0} = P_{n.1.0} + 2n\mu\, P_{n.0.0},$ $\qquad B^{(+1)}_{0.1.0} = P_{0.1.0}$

$B^{(-1)}_{n.1.0} = P_{n.1.0} - 2n\mu\, P_{n.0.0},$ $\qquad B^{(-1)}_{0.1.0} = 0$

$B^{(+1)}_{n.0.1} = P_{n+1.0.1} - 2(n+1)\, P_{n+1.0.0},$ $\qquad B^{(+1)}_{0.0.1} = P_{1.0.1} - 2P_{1.0.0}$

$B^{(-1)}_{n.0.1} = P_{n-1.0.1} + 2(n-1)\, P_{n-1.0.0},$ $\qquad B^{(-1)}_{0.0.1} = 0$

$B_{n.2.0} = P_{n.2.0} - 2n^2\mu^2 P_{n.0.0} + 2P_{(n.0.0)_{1.0}},$ $\qquad B_{0.2.0} = \frac{1}{2}P_{0.2.0} + P_{(0.0.0)_{1.0}}$

$B^{(+2)}_{n.2.0} = \frac{1}{2}P_{n.2.0} + n\mu\, P_{n.1.0} + (n^2\mu^2 - \frac{3}{4}n\mu)\, P_{n.0.0},$ $\qquad B^{(+2)}_{0.2.0} = \frac{1}{2}P_{0.2.0}$

$B^{(-2)}_{n.2.0} = \frac{1}{2}P_{n.2.0} - n\mu\, P_{n.1.0} + (n^2\mu^2 + \frac{3}{4}n\mu)\, P_{n.0.0},$ $\qquad B^{(-2)}_{0.2.0} = 0$

$B^{(+2)}_{n.1.1} = \frac{1}{2}P_{n+1.1.1} - (n+1)\, P_{n+1.1.0} + n\mu\, P_{n+1.0.1} - 2n(n+1)\mu\, P_{n+1.0.0},$ $\quad B^{(+2)}_{0.1.1} = \frac{1}{4}P_{1.1.1} - P_{1.1.0}$

$B^{(+2)}_{n.1.1} = \frac{1}{2}P_{n-1.1.1} + (n-1)\, P_{n-1.1.0} + n\mu\, P_{n-1.0.1} + 2n(n-1)\mu\, P_{n-1.0.0},$ $\quad B^{(+2)}_{0.1.1} = \frac{1}{2}P_{1.1.1} - P_{1.1.0}$

$B^{(-2)}_{n.1.1} = \frac{1}{2}P_{n+1.1.1} - (n+1)\, P_{n+1.1.0} - n\mu\, P_{n+1.0.1} + 2n(n+1)\mu\, P_{n+1.0.0},$ $\quad B^{(-2)}_{0.1.1} = 0$

$B^{(-2)}_{n.1.1} = \frac{1}{2}P_{n-1.1.1} + (n-1)\, P_{n-1.1.0} - n\mu\, P_{n-1.0.1} - 2n(n-1)\mu\, P_{n-1.0.0},$ $\quad B^{(-2)}_{0.1.1} = 0$

$B_{n.0.2} = P_{n.0.2} - 2P_{n.0.1} - 2n^2 P_{n.0.0} + 2P_{(n.0.0)_{0.11}}$ $\qquad B_{0.0.2} = \frac{1}{2}P_{0.0.2} - P_{0.0.1} + P_{(0.0.0)_{0.1}}$

$B^{(+2)}_{n.0.2} = \frac{1}{2}P_{n+2.0.2} - (n+1)\, P_{n+2.0.1} + (n^2 + \frac{11}{4}n + \frac{3}{2})\, P_{n+2.0.0},$ $\qquad B^{(+2)}_{0.0.2} = \frac{1}{2}P_{2.0.2} - P_{2.0.1} + \frac{3}{2}P_{2.0.0}$

$B^{(-2)}_{n.0.2} = \frac{1}{2}P_{n-2.0.2} + (n-1)\, P_{n-2.0.1} + (n^2 - \frac{11}{4}n + \frac{3}{2})\, P_{n-2.0.0},$ $\qquad B^{(-2)}_{0.0.2} = 0,\ B^{(-2)}_{1.0.2} = \frac{1}{2}P_{1.0.2} - \frac{1}{4}P_{0.0.0}$

$B^{1.0}_{n.0.0} = 2P_{n.1.0}$	$B^{1.0}_{0.0.0} = P_{0.1.0}$
$B^{+1.1.0}_{n.1.0} = 2P_{n.2.0} + 2n\mu\, P_{n.1.0}$	$B^{+1.1.0}_{0.1.0} = 2P_{0.2.0}$
$B^{-1.1.0}_{n.1.0} = 2P_{n.2.0} - 2n\mu\, P_{n.1.0}$	$B^{-1.1.0}_{0.1.0} = 0$
$B^{+1.1.0}_{n.0.1} = P_{n+1.1.1} - 2(n+1)\, P_{n+1.1.0}$	$B^{+1.1.0}_{0.0.1} = P_{1.1.1} - 2P_{1.1.0}$
$B^{-1.1.0}_{n.0.1} = P_{n-1.1.1} + 2(n-1)\, P_{n-1.1.0}$	$B^{-1.1.0}_{0.0.1} = 0$
$B^{2.0}_{n.0.0} = 2P_{n.2.0}$	$B^{2.0}_{0.0.0} = P_{0.2.0}$
$\overline{B}_{n.2.0} = -\tfrac{1}{4}\{\overline{P}_{n-1.0.0} + \overline{P}_{n+1.0.0}\}$	$\overline{B}_{0.2.0} = -\tfrac{1}{4}\overline{P}_{1.0.0}$
$\overline{B}^{(+2)}_{n.2.0} = \tfrac{1}{4}\overline{P}_{n+1.0.0}$	$\overline{B}^{(+2)}_{0.2.0} = \tfrac{1}{4}\overline{P}_{1.0.0}$
$\overline{B}^{(-2)}_{n.2.0} = \tfrac{1}{4}\overline{P}_{n-1.0.0}$	$\overline{B}^{(-2)}_{0.2.0} = 0$
$\overline{B}^{(+2)}_{n.1.1} = -\tfrac{1}{2}\overline{P}_{n+1.0.0}$	$\overline{B}^{(+2)}_{0.1.1} = -\tfrac{1}{2}\overline{P}_{1.0.0}$
$\overline{B}^{(+1)}_{n.1.1} = \tfrac{1}{2}\overline{P}_{n-1.0.0}$	$\overline{B}^{(+1)}_{0.1.1} = \tfrac{1}{2}\overline{P}_{1.0.0}$
$\overline{B}^{(-1)}_{n.1.1} = \tfrac{1}{2}\overline{P}_{n+1.0.0}$	$\overline{B}^{(-2)}_{0.1.1} = 0$
$\overline{B}^{(-2)}_{0.1.1} = -\tfrac{1}{2}\overline{P}_{n-1.0.0}$	$\overline{B}^{(-2)}_{0.1.1} = 0$
$\overline{B}_{n.0.2} = -\tfrac{1}{4}\{\overline{P}_{n-1.0.0} + \overline{P}_{n+1.0.0}\}$	$\overline{B}_{0.0.2} = -\tfrac{1}{4}\overline{P}_{1.0.0}$
$\overline{B}^{(+2)}_{n.0.2} = \tfrac{1}{4}\overline{P}_{n+1.0.0}$	$\overline{B}^{(+2)}_{0.0.2} = \tfrac{1}{4}\overline{P}_{1.0.0}$
$\overline{B}^{(-2)}_{n.0.2} = \tfrac{1}{4}\overline{P}_{n-1.0.0}$	$\overline{B}^{(-2)}_{0.0.2} = 0$
$\overline{B}^{+1.1.0}_{1.0} = -\tfrac{1}{4}\overline{P}_{n-1.0.0} - \tfrac{3}{4}\overline{P}_{n+1.0.0}$	$\overline{B}^{+1.1.0}_{0.1.0} = -\overline{P}_{1.0.0}$
$\overline{B}^{-1.1.0}_{n.1.0} = \tfrac{3}{4}\overline{P}_{n-1.0.0} + \tfrac{1}{4}\overline{P}_{n+1.0.0}$	$\overline{B}^{-1.1.0}_{0.1.0} = 0$
$\overline{B}^{+1.1.0}_{n.0.1} = \overline{P}_{n+1.0.0}$	$\overline{B}^{+1.1.0}_{0.0.1} = \overline{P}_{1.0.0}$
$\overline{B}^{-1.1.0}_{n.0.1} = -\overline{P}_{n-1.0.0}$	$\overline{B}^{-1.1.0}_{0.0.1} = 0$
$\overline{B}^{+1.0.1}_{n.1.0} = -\tfrac{1}{4}\overline{P}_{n-1.0.0} + \tfrac{1}{4}\overline{P}_{n+1.0.0}$	$\overline{B}^{+1.0.1}_{0.1.0} = 0$
$\overline{B}^{-1.0.1}_{n.1.0} = \tfrac{1}{4}\overline{P}_{n-1.0.0} - \tfrac{1}{4}\overline{P}_{n+1.0.0}$	$\overline{B}^{-1.0.1}_{0.1.0} = 0$
$\overline{B}^{2.0}_{n.0.0} = -\tfrac{1}{2}\{\overline{P}_{n-1.0.0} + \overline{P}_{n+1.0.0}\}$	$\overline{B}^{1.0}_{0.0.0} = -\tfrac{1}{2}\overline{P}_{1.0.0}$
$\overline{B}^{1.1}_{n.0.0} = \tfrac{1}{2}\overline{P}_{n-1.0.0} - \tfrac{1}{2}\overline{P}_{n+1.0.0}$	$\overline{B}^{1.1}_{0.0.0} = 0.$

9. Endlich soll nun der Ausdruck für die Funktion Z vollständig entwickelt werden. Man hat nach 146) mit Vernachlässigung der Glieder dritten Grades:

$$Z = 2\Sigma\, Y_{n.s.s'}\, \varrho^{s}\, \varrho'^{s'}\, \mathfrak{z} \cos n H_1 + 2\Sigma\, X_{n.s.s'}\, \varrho^{s}\, \varrho'^{s'}\, \mathfrak{z}' \cos n H_1.$$

Für die Funktion $\mathfrak{z}'$ ist mit Rücksicht auf die Gleichungen 172) und 174):

$$(\mathfrak{z}') = -\sin j' \sin(w_1 - \mathfrak{v}_1 - G),$$

und wenn wir nach Potenzen von G entwickeln und uns der Relation 156a) erinnern:

181) $$(\mathfrak{z}') = -\sin j' \sin(w_1 - \mathfrak{v}_1) - \mu\eta \sin j' \sin(w_1 + \mathrm{v} - \mathfrak{v}_1) + \mu\eta \sin j' \sin(w_1 - \mathrm{v} - \mathfrak{v}_1)$$
$$+ \eta' \sin j' \sin(\mathrm{v}_1 - \mathfrak{v}_1) - \eta' \sin j' \sin(2w_1 - \mathrm{v}_1 - \mathfrak{v}_1).$$

Mit Benutzung dieser Relation und der folgenden:

$$\mathfrak{z} = \sin j \sin \mathfrak{v} + \mathfrak{Z},$$

sowie der Entwicklungen 157) und 159) erhält man den folgenden Ausdruck für Z, wenn man wieder die Funktion $\mathfrak{Z}'$ bei Seite lässt:

182) $$Z = \Sigma C^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0} \sin j \sin(nw + \mathfrak{v}) + \Sigma C^{+1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 0} R \sin j \sin(nw + \mathfrak{v}) - \Sigma n\mu\, C^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0} K \sin j \cos(nw + \mathfrak{v})$$
$$+ \Sigma C^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0} \sin j \sin(nw - \mathfrak{v}) + \Sigma C^{-1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 0} R \sin j \sin(nw - \mathfrak{v}) - \Sigma n\mu\, C^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0} K \sin j \cos(nw - \mathfrak{v})$$
$$+ \Sigma C^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1} \sin j' \sin(nw + \mathfrak{v}_1) + \Sigma C^{+1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 1} R \sin j' \sin(nw + \mathfrak{v}_1) - \Sigma n\mu\, C^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1} K \sin j' \cos(nw + \mathfrak{v}_1)$$
$$+ \Sigma C^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1} \sin j' \sin(nw - \mathfrak{v}_1) + \Sigma C^{-1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 1} R \sin j' \sin(nw - \mathfrak{v}_1) - \Sigma n\mu\, C^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1} K \sin j' \cos(nw - \mathfrak{v}_1)$$

$$+ \Sigma C^{0\cdot 1}_{n\cdot 0\cdot 0} \mathfrak{Z} \cos nw$$
$$+ \Sigma C^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 0\cdot 1\cdot 0} \eta \sin j \sin(nw + \mathfrak{v} + \mathrm{v}) \qquad + \Sigma C^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 0\cdot 0\cdot 1} \eta' \sin j \sin(nw + \mathfrak{v} + \mathrm{v}_1)$$
$$+ \Sigma C^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0\cdot 1\cdot 0} \eta \sin j \sin(nw + \mathfrak{v} - \mathrm{v}) \qquad + \Sigma C^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0\cdot 0\cdot 1} \eta' \sin j \sin(nw + \mathfrak{v} - \mathrm{v}_1)$$
$$+ \Sigma C^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0\cdot 1\cdot 0} \eta \sin j \sin(nw - \mathfrak{v} + \mathrm{v}) \qquad + \Sigma C^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0\cdot 0\cdot 1} \eta' \sin j \sin(nw - \mathfrak{v} + \mathrm{v}_1)$$
$$+ \Sigma C^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 0\cdot 1\cdot 0} \eta \sin j \sin(nw - \mathfrak{v} - \mathrm{v}) \qquad + \Sigma C^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 0\cdot 0\cdot 1} \eta' \sin j \sin(nw - \mathfrak{v} - \mathrm{v}_1)$$

$$+ \Sigma C^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 1\cdot 1\cdot 0} \eta \sin j' \sin(nw + \mathfrak{v}_1 + \mathrm{v}) \qquad + \Sigma C^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 1\cdot 0\cdot 1} \eta' \sin j' \sin(nw + \mathfrak{v}_1 + \mathrm{v}_1)$$
$$+ \Sigma C^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1\cdot 1\cdot 0} \eta \sin j' \sin(nw + \mathfrak{v}_1 - \mathrm{v}) \qquad + \Sigma C^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1\cdot 0\cdot 1} \eta' \sin j' \sin(nw + \mathfrak{v}_1 - \mathrm{v}_1)$$
$$+ \Sigma C^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1\cdot 1\cdot 0} \eta \sin j' \sin(nw - \mathfrak{v}_1 + \mathrm{v}) \qquad + \Sigma C^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1\cdot 0\cdot 1} \eta' \sin j' \sin(nw - \mathfrak{v}_1 + \mathrm{v}_1)$$
$$+ \Sigma C^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 1\cdot 1\cdot 0} \eta \sin j' \sin(nw - \mathfrak{v}_1 - \mathrm{v}) \qquad + \Sigma C^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 1\cdot 0\cdot 1} \eta' \sin j' \sin(nw - \mathfrak{v}_1 - \mathrm{v}_1).$$

Bei den C-Coefficienten bezieht sich derjenige von den beiden oberen Indices, welcher mit einem Vorzeichen versehen ist, auf die Faktoren der Grössen $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{v}_1$, v oder v_1; von den beiden anderen oberen Indices giebt der erstere die Potenz von R, der zweite die von $\mathfrak{Z}$. Von den unteren Indices giebt der erste den Faktor von w, der zweite die Potenz von $\sin j$, der dritte die von $\sin j'$, der vierte die von η und der fünfte die von η'; die beiden letzteren sind fortgelassen, wenn sie beide zugleich Null sind.

Für diese C-Coefficienten ergeben sich die folgenden Werte:

182a)

$C^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0} = Y_{n.0.0}$	$C^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 0} = Y_{0.0.0}$
$C^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0} = -Y_{n.0.0}$	$C^{(-1)}_{0\cdot 1\cdot 0} = 0$
$C^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1} = X_{n+1.0.0}$	$C^{(+1)}_{0\cdot 0\cdot 1} = X_{1.0.0}$
$C^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1} = X_{n-1.0.0}$	$C^{(-1)}_{0\cdot 0\cdot 1} = 0$

$C^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 0\cdot 1\cdot 0} = \frac{1}{2} Y_{n.1.0} + n\mu\, Y_{n.0.0}$	$C^{(+2)}_{0\cdot 1\cdot 0\cdot 1\cdot 0} = \frac{1}{2} Y_{0.1.0}$
$C^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0\cdot 1\cdot 0} = \frac{1}{2} Y_{n.1.0} - n\mu\, Y_{n.0.0}$	$C^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 0\cdot 1\cdot 0} = \frac{1}{2} Y_{0.1.0}$
$C^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0\cdot 1\cdot 0} = -\left\{\frac{1}{2} Y_{n.1.0} + n\mu\, Y_{n.0.0}\right\}$	$C^{(-2)}_{0\cdot 1\cdot 0\cdot 1\cdot 0} = 0$
$C^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 0\cdot 1\cdot 0} = -\left\{\frac{1}{2} Y_{n.1.0} - n\mu\, Y_{n.0.0}\right\}$	$C^{(-2)}_{0\cdot 1\cdot 0\cdot 1\cdot 0} = 0$

$C^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 0\cdot 0\cdot 1} = \frac{1}{2} Y_{n+1.0.1} - (n+1)\, Y_{n+1.0.0}$	$C^{(+2)}_{0\cdot 1\cdot 0\cdot 0\cdot 1} = \frac{1}{2} Y_{1.0.1} - Y_{1.0.0}$
$C^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0\cdot 0\cdot 1} = \frac{1}{2} Y_{n-1.0.1} + (n-1)\, Y_{n-1.0.0}$	$C^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 0\cdot 0\cdot 1} = \frac{1}{2} Y_{1.0.1} - Y_{1.0.0}$
$C^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0\cdot 0\cdot 1} = -\left\{\frac{1}{2} Y_{n+1.0.1} - (n+1)\, Y_{n+1.0.0}\right\}$	$C^{(-1)}_{0\cdot 1\cdot 0\cdot 0\cdot 1} = 0$
$C^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 0\cdot 0\cdot 1} = -\left\{\frac{1}{2} Y_{n-1.0.1} + (n-1)\, Y_{n-1.0.0}\right\}$	$C^{(-2)}_{0\cdot 1\cdot 0\cdot 0\cdot 1} = 0$

$C^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 1\cdot 1\cdot 0} = \frac{1}{2} X_{n+1.1.0} + n\mu\, X_{n+1.0.0}$	$C^{(+2)}_{0\cdot 0\cdot 1\cdot 1\cdot 0} = \frac{1}{2} X_{1.1.0}$
$C^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1\cdot 1\cdot 0} = \frac{1}{2} X_{n+1.1.0} - n\mu\, X_{n+1.0.0}$	$C^{(+1)}_{0\cdot 0\cdot 1\cdot 1\cdot 0} = \frac{1}{2} X_{1.1.0}$
$C^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1\cdot 1\cdot 0} = -\left\{\frac{1}{2} X_{n-1.1.0} + n\mu\, X_{n-1.0.0}\right\}$	$C^{(-1)}_{0\cdot 0\cdot 1\cdot 1\cdot 0} = 0$
$C^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 1\cdot 1\cdot 0} = -\left\{\frac{1}{2} X_{n-1.1.0} - n\mu\, X_{n-1.0.0}\right\}$	$C^{(-2)}_{0\cdot 0\cdot 1\cdot 1\cdot 0} = 0$

$C^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 1\cdot 0\cdot 1} = \frac{1}{2} X_{n+2.0.1} - (n+1)\, X_{n+2.0.0}$	$C^{(+2)}_{0\cdot 0\cdot 1\cdot 0\cdot 1} = \frac{1}{2} X_{2.0.1} - X_{2.0.0}$
$C^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1\cdot 0\cdot 1} = \frac{1}{2} X_{n.0.1} + (n-1)\, X_{n.0.0}$	$C^{(+1)}_{0\cdot 0\cdot 1\cdot 0\cdot 1} = \frac{1}{2} X_{0.0.1} - X_{0.0.0}$
$C^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1\cdot 0\cdot 1} = -\left\{\frac{1}{2} X_{n.0.1} - (n+1)\, X_{n.0.0}\right\}$	$C^{(-1)}_{0\cdot 0\cdot 1\cdot 0\cdot 1} = 0$
$C^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 1\cdot 0\cdot 1} = -\left\{\frac{1}{2} X_{n-2.0.1} + (n-1)\, X_{n-2.0.0}\right\}$	$C^{(-2)}_{0\cdot 0\cdot 1\cdot 0\cdot 1} = 0,\quad C^{(-2)}_{1\cdot 0\cdot 1\cdot 0\cdot 1} = -\frac{1}{2} X_{1.0.1}$

$C^{+1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 0} = Y_{n.1.0}$	$C^{+1\cdot 1\cdot 0}_{0\cdot 1\cdot 0} = Y_{0.1.0}$
$C^{-1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 0} = -Y_{n.1.0}$	$C^{-1\cdot 1\cdot 0}_{0\cdot 1\cdot 0} = 0$
$C^{+1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 1} = X_{n+1.1.0}$	$C^{+1\cdot 1\cdot 0}_{0\cdot 0\cdot 1} = X_{1.1.0}$
$C^{-1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 1} = -X_{n-1.1.0}$	$C^{-1\cdot 1\cdot 0}_{0\cdot 0\cdot 1} = 0$

$C^{0\cdot 1}_{n\cdot 0\cdot 0} = 2Y_{n.0.0}$	$C^{0\cdot 1}_{0\cdot 0\cdot 0} = Y_{0.0.0}.$

10. Die Anzahl der Glieder, welche in den vorstehenden Entwicklungen der Funktionen Q, P und Z vorkommen, ist sehr gross; ich habe aber auch diese Ausdrücke mit aller wünschenswerten Vollständigkeit gegeben. Man wird in jedem einzelnen Falle nur eine verhältnismässig sehr geringe Zahl von diesen

Gliedern zu berücksichtigen haben; da aber in verschiedenen Fällen auch verschiedene Glieder die wichtigsten sind, so habe ich die Ausdrücke hier vollständig geben müssen; denn ein Glied, das bei der Berechnung eines gewissen Planeten sehr klein ist, kann bei Berechnung eines anderen Planeten sehr wesentlich sein. Welche Glieder unter den angeführten die wichtigsten sind, hängt in erster Linie von dem Werte der mittleren Bewegung des Planeten ab und in zweiter Linie von dem Betrage seiner Excentricität und Neigung.

Sechstes Kapitel.

Integration der Differentialgleichungen für die Gyldén'schen Hilfscoordinaten. — Die gewöhnlichen Planeten.

§ 1.

1. Um die Ausdrücke für die Gyldén'schen Coordinaten S, ϱ, W und $\mathfrak{z}$ zu finden, welche zur Berechnung des Ortes des gestörten Planeten mittels der Gleichungen 62), 68) und 92) dienen, müssen wir die Gleichungen 34), 36), 59) und 70) integriren, welche ich zur grösseren Uebersichtlichkeit hier zusammenstelle[1]):

183) $$\frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv} = -(1+S)^2 Q - \frac{1}{2}\frac{1}{1-\eta^2}\frac{d\eta^2}{dv}$$

184) $$\frac{d^2\varrho}{dv^2} + \varrho = -\left\{\frac{2}{1-\eta^2}\frac{d\eta^2}{dv} + (1+S)^2 Q\right\}\frac{d\varrho}{dv}$$
$$-\left\{\frac{1}{1-\eta^2}\frac{d^2\eta^2}{dv^2} + \frac{2}{(1-\eta^2)^2}\left(\frac{d\eta^2}{dv}\right)^2 + \frac{(1+S)^2}{1-\eta^2}\frac{d\eta^2}{dv}Q\right\}(1+\varrho) + 2S + S^2 - (1+S)^2 P$$

185) $$\frac{dW}{dv} = S - 2R - 2RS + 3R^2 \pm \cdots\cdots$$
$$+\{6R - 2S - 12R^2 + 6RS \pm \cdots\cdots\}\eta\cos \mathrm{v}$$
$$-3\eta^2 R + \{\tfrac{3}{2}S - 6R \pm \cdots\cdots\}\eta^2\cos 2\mathrm{v}$$
$$\pm\cdots\cdots$$
$$-\frac{d\Xi}{dv}$$

---

1) In seinen pag. 50 erwähnten Hülfstafeln bemerkt Gyldén pag. XVI, dass in der von mir angewandten Differentialgleichung für ϱ das Glied fehle, welches die dort mit $\overline{g}$ bezeichnete Con-

186) $$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2}+\mathfrak{z} = -(1+S)^2 Q \frac{d\mathfrak{z}}{dv}+(1+S)^2 Z.$$

Kommt das Verhältniss der mittleren Bewegungen des gestörten und des störenden Planeten keinem niedrigzahligen Bruche sehr nahe, handelt es sich also, wie wir uns ausdrücken wollen, um einen „gewöhnlichen" und nicht um einen „charakteristischen" Planeten, so ist die Herstellung der Ausdrücke für die genannten Coordinaten eine verhältnissmässig einfache Operation, und ich werde die hierzu nötigen Formeln in aller Ausführlichkeit herleiten, so dass der Rechner sich ohne Weiteres derselben bedienen kann. Ich beschränke mich aber nicht auf diesen einfachen Fall, sondern ich will das vorgesteckte Problem für jeden beliebigen Wert der mittleren Bewegungen betrachten; jedoch würde es zu weit führen und der Uebersichtlichkeit sehr schaden, wenn ich im Rahmen dieser Abhandlung jeden einzelnen Fall genäherter oder strenger Commensurabilität erschöpfend darstellen wollte, und deswegen werde ich mich darauf beschränken, für die schwierigen Fälle des Systems der kleinen Planeten die Entwicklungen soweit auszuführen, dass der weitere Gang der Rechnung keine ernstlichen Schwierigkeiten mehr bietet.

Offenbar wird die Form, unter der sich die Integrale der vorstehenden Gleichungen darstellen, im Wesentlichen abhängen von der Form, die wir den Funktionen Q, P und Z geben. Diese letzteren aber haben wir in den vorigen Kapiteln in trigonometrische Reihen entwickelt und die Gyldén'schen Coordinaten werden wir in der gleichen Form darstellen.

Wir haben als Grundlage unserer Untersuchungen angenommen, dass die im ersten Kapitel (pag. 12) genannten Bedingungen erfüllt sind, wenigstens für einen beschränkten Zeitraum; dieser Zeitraum wird auch im Falle, dass man die Stabilität des Systems nicht voraussetzen wolle und dass es sich um kleine Planeten handelt, sicherlich eine Reihe von Jahrtausenden umfassen. Wir haben hierfür bis jetzt keinen stichhaltigen Beweis, und wir werden zur Annahme dieser Thatsache einstweilen nur durch die Resultate der Beobachtungen und durch diejenigen der Berechnungen nach der Methode der speciellen Störungen geführt; denn diese liefern uns für die osculirenden elliptischen Elemente solche Werte, welche den genannten Bedingungen entsprechen. Ob die letzteren auch während eines unbegrenzten Zeitraums erfüllt bleiben oder nicht, ist eine Frage, welche mit derjenigen nach der Stabilität des Systems zusammenfällt und welche ich hier nicht berühren will. Wir stellen uns demnach auch nicht die Aufgabe, eine absolute Lösung im Gyldén'schen Sinne zu erhalten, welche die absolute Convergenz aller angewandten Reihenentwicklungen und Annäherungsverfahren erheischen würde; auch die Curve, welche der Planet beschreibt, braucht nicht

---

stante enthält. Da Gyldén die folgenden Untersuchungen leider nicht zu Gesicht bekommen hat, so konnte er sich nicht davon überzeugen, dass dies unzutreffend ist, indem ich dies Glied nur in einer anderen Weise berücksichtigt habe.



eine periplegmatische Curve [1]) nach Gyldén's Definition zu sein. Indem wir unsere Aufgabe in dieser Weise beschränken, können wir die Formeln, nach denen die numerischen Rechnungen auszuführen sind, ausserordentlich einfach gestalten, ohne dass die Genauigkeit, mit der sich die Coordinaten des gestörten Körpers darstellen, eine Einbusse erlitte.

2. Unsere Lösung darf also, wie ich schon im ersten Kapitel bemerkt habe, seculare Glieder enthalten. Tisserand [2]) hat in dieser Beziehung einige Bemerkungen gemacht über die elementaren Glieder, welche ich bei der Berechnung der Bahn des Planeten Hestia gefunden habe; er zeigt, dass die Ausdrücke sich vereinfachen, wenn man diese Glieder in secularer Form darstellt: man wird selbst in Fällen, wo diese Störungen sehr gross sind, die von den dritten Potenzen der Zeit abhängigen Glieder (also die Störungen dritter Ordnung) vernachlässigen können.

Nun wird man aber, wie ich schon pag. 5 bemerkte, im Allgemeinen die Bewegung des störenden Körpers als elliptisch ansehen, wenn es sich um genäherte Darstellung der Coordinaten handelt; und auch, wenn man eine schärfere Darstellung während eines beschränkten Zeitraums anstrebt, wird man wenigstens die secularen Störungen, denen der störende Körper unterworfen ist, vernachlässigen können. Wenn man dies aber thut, so nehmen die genannten Glieder, in periodischer Form dargestellt, eine so einfache Gestalt an, dass dieser letzteren Form gewiss der Vorzug vor der secularen gebührt.

Nur wenn es sich um sehr weitgehende Untersuchungen handelt, und wenn man deshalb die vollen Ausdrücke 147) und 171), resp. 153b) und 172) in die Bewegung des störenden Körpers einführt, was ich in meiner Arbeit über den Planeten Hestia unnötigerweise gethan habe —, nur dann lässt sich an der Zweckmässigkeit der periodischen Form gegenüber der secularen zweifeln. Und doch möchte ich auch dann die periodische Form vorziehen, aus dem Grunde, weil sich dann manche Operation einfacher gestaltet und weil aus der periodischen Form die seculare mit ein paar Federstrichen sich herstellen lässt, während der umgekehrte Process mühsamer ist. Tisserand wendet sich a. a. O. dagegen, dass man einen solchen Ausdruck in periodischer Form integrire; indessen ist es analytisch ganz gleichbedeutend, ob man ihn in der einen oder der anderen Form integrirt; ist die Integration in periodischer Form nicht gerechtfertigt, so ist sie es auch in secularer nicht. Unter allen Umständen ist aber der Unterschied beider Darstellungsweisen ein rein formaler. Ich verweise wegen dieser Frage noch auf die Untersuchungen im achten Kapitel.

1) Siehe die pag. 14 citirte Abhandlung Gyldén's, pag. 3 ff.

2) Tisserand, Traité de Mécanique Céleste. Tome IV. pag. 415. Ich habe anfangs geglaubt, dass bei den Zahlenangaben Tisserand's hier ein Irrtum vorgekommen sei: Tisserand spricht (Zeile 14) von dem Glied in t und (Zeile 15) von dem Glied in t^2; er meint aber offenbar mit dem ersteren das Glied in t^2 und mit dem letzteren das in t^3 in der Entwicklung von $\sin A$. Der Umstand, dass Tisserand die resp. Potenzen von t um je eine Einheit niedriger angiebt, hat jedenfalls seinen Grund darin, dass er sie sich als Störungen der mittleren Bewegung denkt.

3. Während des Zeitraums von 50 oder 100 Jahren, während dessen unsere Rechnungen giltig bleiben sollen, sind die eingeführten Bahnelemente a oder n, $\varLambda$, $\varkappa$, $\varGamma$, ι, $\varTheta$, wirkliche Constanten. Setzt man auf Grund unserer Formeln die Rechnung über die Grenzen des gewählten Zeitraums hinaus fort, so werden offenbar die fortgelassenen secularen (oder langperiodischen) Glieder beginnen merkbar zu werden, und die Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung werden allmählich wachsen. Es scheint demnach, dass unsere Resultate für eine Fortsetzung der Rechnung in ein weiteres Jahrhundert nicht mehr anwendbar seien, und dass man die Berechnung der Störungsglieder von Neuem durchzuführen habe. Dies ist indessen nicht der Fall, man wird vielmehr nur den erwähnten Bahnelementen um ein Weniges veränderte Werte beizulegen und die bereits erhaltenen Resultate weiter zu verwerten haben. Wenn wir also in dieser Weise die Bahnelemente von Jahrhundert zu Jahrhundert variiren, so werden unsere Resultate für eine längere Reihe von Jahrhunderten die Coordinaten des Planeten mit der gewünschten Genauigkeit darstellen; unter Umständen werden allerdings die Werte einzelner Störungsglieder modificirt werden müssen. Auf eine solche seculare Variation der Constanten zurückzukommen, welche einstweilen nur empirisch mit Hilfe der Beobachtungen geschehen kann, werde ich im zweiten Teile Gelegenheit nehmen. Die Giltigkeit unseres Verfahrens würde erst dann aufhören, wenn die pag. 12 genannten Bedingungen nicht mehr erfüllt sind, wenn also eine vollständige Umgestaltung der Bahn des zu berechnenden Planeten stattgefunden hätte.

Wenn man sich gestatten will, eine solche Bewegung „beschränkt stabil" zu nennen, die während eines beschränkten Zeitraums nicht allzusehr von einer gewissen mittleren Kreis- oder elliptischen Bahn abweicht, für die also die Bedingungen pag. 12 erfüllt sind, so sind die Planeten unseres Systems mindestens beschränkt stabil; und diese beschränkte Stabilität findet nur dann nicht statt, wenn die Bahn sich dem parabolischen oder hyperbolischen Charakter nähert oder wenn (bei zu grosser Annäherung des gestörten Körpers an einen der störenden) ein Wechsel des Centralkörpers eintritt; in diesen Fällen werden unsere Formeln deswegen unbrauchbar, weil unsere Entwicklung der Störungsfunktion dann unbedingt divergirt. Dagegen wird sich im Folgenden zeigen, dass eine beliebige Annäherung der mittleren Bewegungen an irgend ein commensurables Verhältniss weder das Aufhören dieser beschränkten Stabilität noch die Unbrauchbarkeit unserer Formeln bedingt.

4. Unter den Voraussetzungen, welche wir gemacht haben, dürften die Reihen, in die wir die Funktionen Ω, Q, P und Z entwickelt haben, brauchbar sein, und man wird auch zu der Vermutung geführt, dass unsere Differentialgleichungen Lösungen in trigonometrischer Form zulassen. Indessen müssen diese beiden Thatsachen noch bewiesen werden; die letztere lässt sich naturgemäss nicht ohne die Voraussetzung der ersteren zeigen, ist sie aber bewiesen, so folgt daraus im Allgemeinen auch die Brauchbarkeit der Entwicklungen der Störungsfunktion.

Dass nun unsere Differentialgleichungen Lösungen rein trigonometrischer Form auch in den Fällen zulassen, in denen die mittleren Bewegungen des störenden und des gestörten Körpers äusserst nahe oder (wenigstens scheinbar) streng commensurabel zu einander sind, erscheint dennoch zunächst zweifelhaft. Ich habe in den Astronomischen Nachrichten[1]) in sehr kurzgefasster Form gezeigt, dass diese Frage in bejahendem Sinne zu beantworten ist, und dass man zu einer solchen Lösung geführt wird, wenn man das von Gyldén gefundene Verfahren der partiellen Integration, das im Folgenden auseinandergesetzt wird, mit gewissen Modifikationen durchführt. Gyldén selbst nahm an, dass diese Methode nicht in allen Fällen zu befriedigenden Resultaten führe und benutzte, ebenso wie die Herren Harzer und Backlund[2]), andere Methoden; dieselben scheinen mir indess wenig übersichtlich und die Entwicklungen werden dort schliesslich zum Zwecke der praktischen Rechnung im Wesentlichen auf dieselbe Form gebracht, die ich ihnen hier von vornherein gebe.

5. Um die Gleichungen 183) bis 186) zu integriren, ersetzen wir in ihnen die Funktionen Q, P und Z durch die im vorigen Kapitel gefundenen Entwicklungen und erhalten dann Gleichungen, die ihrer Form nach den Gleichungen 4) und 5) des ersten Kapitels analog sind; bei ihrer Integration werden wir das dort Gesagte in Rücksicht ziehen; indessen sind die Gleichungen 183) bis 186) complicirter als die Gleichungen des ersten Kapitels und die letzteren stellen nur ihren allgemeinen Typus dar.

Wie im ersten Kapitel ferner bemerkt wurde, werden wir in ganz allgemeiner Weise unsere Annäherungen nach den Potenzen der Excentricitäten und Neigungen anordnen, aber nicht nach den Potenzen der osculirenden elliptischen Werte dieser Grössen, was einer Anordnung nach den Potenzen der störenden Massen gleichkäme, sondern vielmehr nach den Potenzen der Constanten $\varkappa_n$, $\varkappa'_n$, $\sin\iota_n$, $\sin\iota'_n$. Ich werde die Grössen $\varkappa$ und $\varkappa'$ **Excentricitätsmoduln** und die Grössen $\sin\iota$ und $\sin\iota'$ **Neigungsmoduln** nennen; Gyldén nennt sie diastematische und anastematische Moduln, welche Bezeichnungen hier nicht angängig sind, da ich ihnen nicht die Bedentung absoluter Elemente im Gyldén'schen Sinne gebe und da ich mich dem üblichen Sprachgebrauche möglichst anschliessen möchte. Ich habe ebenfalls bereits gesagt, dass ich Glied ***n*-ten Grades** ein jedes Glied nenne, dass als Faktor die ***n*-te Potenz** eines dieser Moduln oder ein äquivalentes Produkt enthält. Wir werden also zuerst die Glieder nullten, dann diejenigen ersten Grades u. s. f. berechnen.

Ich will im Folgenden mit S_0 den Teil der Funktion S bezeichnen, welcher nullten Grades ist, mit S_1 den Teil, welcher ersten Grades ist, u. s. f.; und in derselben Weise zerlege ich auch die übrigen Funktionen, so dass:

---

1) No. 3346. Vgl. auch den Schluss des Siebenten Kapitels dieser Abhandlung.

2) In ihren pag. 6 und 22 citirten interessanten Abhandlungen.

$$S = S_0 + S_1 + S_2 + \cdots\cdots$$
$$R = R_0 + R_1 + R_2 + \cdots\cdots$$
$$W = W_0 + W_1 + W_2 + \cdots\cdots$$

187)
$$\frac{dS}{dv} = \left(\frac{dS}{dv}\right)_0 + \left(\frac{dS}{dv}\right)_1 + \left(\frac{dS}{dv}\right)_2 + \cdots\cdots$$
$$= \frac{dS_0}{dv} + \frac{dS_1}{dv} + \frac{dS_2}{dv} + \cdots\cdots$$

u. s. w.,

wobei zu beachten ist, dass z. B. die Grössen $\left(\frac{dS}{dv}\right)_n$ und $\frac{dS_n}{dv}$ im Allgemeinen nicht identisch sind.

§ 2.

Die Glieder nullten Grades.

1. Wir wollen jetzt die Gleichung 183) betrachten, indem wir Q durch seinen Wert 165) resp. 177) ersetzen. Die Funktion $\mathfrak{z}$ und infolgedessen auch $\mathfrak{Z}$ ist ersten Grades, da sie nach 83) mit $\sin \iota_0$ multiplicirt ist; dagegen enthalten die Funktionen R und K auch Glieder nullten Grades, wie sich bald zeigen wird. Wenn wir also nur die Glieder nullten Grades beibehalten, so ist:

188)
$$\frac{1}{(1+S)^2}\frac{dS}{dv} = -\Sigma A_{n\cdot 0\cdot 0}\sin nw - \Sigma A^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0} R_0 \sin nw + \Sigma n\mu A_{n\cdot 0\cdot 0} K_0 \cos nw$$
$$- \Sigma A^{2\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0} R_0^2 \sin nw + \Sigma n\mu A^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0} R_0 K_0 \cos nw + \tfrac{1}{2}\Sigma n^2\mu^2 A_{n\cdot 0\cdot 0} K_0^2 \sin nw,$$

wo nur die Störungen vierter Ordnung vernachlässigt sind.

In den Fällen, in denen die Funktionen R_0 und K_0 als sehr kleine Grössen angesehen werden können, kann man die Annäherungen nach ihren Potenzen anordnen, ebenso wie es in den älteren Methoden geschieht und in der ersten Annäherung setzen:

189)
$$\frac{1}{2(1+S_0)^2} = \text{constans} + \Sigma A_{n\cdot 0\cdot 0}\int \sin nw\, dv.$$

Indessen können die ebengenannten Funktionen gross sein im Verhältniss zur störenden Masse und es wird sich gleich zeigen, dass dieser Fall eintritt, wenn das Verhältniss der mittleren Bewegungen des gestörten und des störenden Körpers sich einem Bruche von der Form $\frac{n}{n+1}$ nähert. Man wird in diesen Fällen zum Teil die Glieder höherer Ordnung bereits in der ersten Annäherung berücksichtigen müssen; sie sind zwar einstweilen unbekannt, ich werde aber im nächsten Kapitel zeigen, wie man alsdann verfahren kann.

Hier will ich mich zunächst auf die Fälle beschränken, in denen die genannten Grössen sehr klein sind, in denen also die Gleichung 189) für die erste Annäherung besteht.

Das Argument w ist durch die Relation 164)

$$w = (1-\mu_1)v - B - \mu V$$

gegeben, und wir können das Integral in der Gleichung 189) nach einem von Gyldén gefundenen Verfahren partieller Integration ausführen, indem wir schreiben:

190)
$$\int \sin nw\, dv = -\frac{1}{n(1-\mu_1)}\cos nw + \frac{\mu}{1-\mu_1}\int \frac{dV}{dv}\sin nw\, dv$$
$$\int \cos nw\, dv = \frac{1}{n(1-\mu_1)}\sin nw + \frac{\mu}{1-\mu_1}\int \frac{dV}{dv}\cos nw\, dv,$$

von welchen Gleichungen ich die zweite deswegen anführe, weil wir sie später brauchen werden. Die Funktion V enthält keine Glieder nullten Grades; sie ist vielmehr ersten Grades in den Fällen, in denen R_0 beträchtlich ist, und sie ist zweiten Grades in allen Fällen, in denen R_0 als Grösse rein erster Ordnung angesehen werden kann. Ich muss der Bequemlichkeit halber diese Thatsache vorwegnehmen aus dem Folgenden, wo sie (pag. 93) bewiesen werden wird. Wenn wir die linke Seite der obigen Gleichung nach Potenzen von S_0 entwickeln, so wird also:

$$S_0 = \text{constans} + \frac{A_{0\cdot 0\cdot 0}}{n(1-\mu_1)}\cos nw - \tfrac{1}{3}\{3S_0^3 - 4S_0^5 + - \cdots\}.$$

Die Constante in dieser Gleichung ist überzählig und wir wollten sie nach dem vorigen Kapitel so wählen, dass sie eine Grösse rein erster Ordnung ist. Die Divisoren $n(1-\mu_1)$, welche hier auftreten, können nur dann sehr klein sein, wenn die Constante μ_1 sehr nahe gleich Eins ist. Diese Constante ist aber sehr nahe gleich dem Verhältnisse der mittleren Bewegungen des gestörten und des störenden Körpers und sie wird ihren grössten Wert erreichen für diejenigen kleinen Planeten, welche Jupiter am nächsten kommen. Für den Planeten Thule, welcher von den bis jetzt entdeckten diese Bedingung am nächsten erfüllt, ist μ_1 etwa gleich $\frac{3}{4}$; es ist aber klar, dass die Convergenz unserer Reihen aufhört, wenn μ_1 sich allzusehr der Einheit nähert, denn unsere Entwicklung der Störungsfunktion beruht ja auf der Bedingung, dass der Quotient $\frac{r}{r'}$ merklich kleiner als Eins ist, welche dann nicht mehr erfüllt wäre. In diesem Falle lässt sich auch nicht mehr — abgesehen von vereinzelten Specialfällen — von einer planetarischen Bewegung sprechen, da der Einfluss Jupiters zu sehr überwiegen würde.

Es folgt aus dem eben Gesagten, dass die Funktion S_0 für alle kleinen Planeten als eine Grösse rein erster Ordnung anzusehen ist, und wir können ihr Quadrat, mindestens in der ersten Annäherung, vernachlässigen. Man hat also für den Fall, dass R_0 und K_0 klein sind:

$$S_0 = \text{constans} + \Sigma \frac{A_{n\cdot 0\cdot 0}}{n(1-\mu_1)} \cos nw\,,$$

S_0 enthält auch keine Glieder der Formen A bis D, sondern nur gewöhnliche Glieder. Setzt man:

191) $$S_0 = \Sigma S_{n\cdot 0\cdot 0} \cos nw\,,$$

so ist:

192) $$S_{n\cdot 0\cdot 0} = \frac{A_{n\cdot 0\cdot 0}}{n(1-\mu_1)}\,,$$

und das constante Glied $S_{0\cdot 0\cdot 0}$ ist zunächst unbestimmt; es ist der Teil der pag. 67 mit a_0 bezeichneten Constante, der nullten Grades ist, und kann erst später bestimmt werden zugleich mit den constanten Teilen von R_0 und $\left(\frac{dW}{dv}\right)_0$.

2. Wir wollen nun die Gleichung 184) betrachten; wenn wir nur die Glieder nullten Grades schreiben, so ist

193) $$\frac{d^2R}{dv^2} + R = -(1+S_0)^2 Q_0 \left(\frac{dR}{dv}\right)_0 + 2S_0' + S_0^2 - (1+S_0)^2 P_0\,,$$

und im Falle, dass R_0 und K_0 klein genug sind, hat man in der ersten Annäherung

194) $$\frac{d^2R}{dv^2} + R = 2S_0 - P_0 = 2\Sigma S_{n\cdot 0\cdot 0} \cos nw - \Sigma B_{n\cdot 0\cdot 0} \cos nw\,,$$

und wenn wir setzen:

195) $$\frac{d^2R}{dv^2} + R = \Sigma b_{n\cdot 0\cdot 0} \cos nw\,,$$

so wird:

196) $$b_{n\cdot 0\cdot 0} = 2S_{n\cdot 0\cdot 0} - B_{n\cdot 0\cdot 0}.$$

Die Gleichung 195) ist von der Form der Gleichung:

197) $$\frac{d^2x}{dv^2} + x = Y\,,$$

deren Integral das folgende ist:

198) $$x = g_1 \sin v - g_2 \cos v\,,$$

wenn man nämlich setzt:

199) $$\frac{dg_1}{dv} = Y\cos v\,, \qquad \frac{dg_2}{dv} = Y\sin v\,,$$

so dass man also nur die Integrationen 199) auszuführen hat.

Wir ersetzen also die Gleichungen 195) durch die folgenden:

200) $$R_0 = g_1 \sin v - g_2 \cos v$$

200a)
$$\frac{dg_1}{dv} = \tfrac{1}{2}\Sigma b_{n\cdot0\cdot0}\cos(nw+v) + \tfrac{1}{2}\Sigma b_{n\cdot0\cdot0}\cos(nw-v)$$
$$\frac{dg_2}{dv} = \tfrac{1}{2}\Sigma b_{n\cdot0\cdot0}\sin(nw+v) - \tfrac{1}{2}\Sigma b_{n\cdot0\cdot0}\sin(nw-v).$$

Den Integralen der beiden letzten Gleichungen fügen wir keine Integrationsconstanten hinzu, da wir dieselben in die Funktion (ϱ) aufgenommen haben.

Da nun

201)
$$\int\cos(nw\pm v)dv = \frac{1}{n(1-\mu_1)\pm1}\sin(nw\pm v) + \frac{n\mu}{n(1-\mu_1)\pm1}\int\frac{dV}{dv}\cos(nw\pm v)dv$$
$$\int\sin(nw\pm v)dv = -\frac{1}{n(1-\mu_1)\pm1}\cos(nw\pm v) + \frac{n\mu}{n(1-\mu_1)\pm1}\int\frac{dV}{dv}\sin(nw\pm v)dv,$$

und da die Funktion V keine Glieder nullten Grades enthält, so findet man:

202)
$$g_1 = \tfrac{1}{2}\Sigma\frac{b_{n\cdot0\cdot0}}{n(1-\mu_1)+1}\sin(nw+v) + \tfrac{1}{2}\Sigma\frac{b_{n\cdot0\cdot0}}{n(1-\mu_1)-1}\sin(nw-v)$$
$$g_2 = -\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{b_{n\cdot0\cdot0}}{n(1-\mu_1)+1}\cos(nw+v) + \tfrac{1}{2}\Sigma\frac{b_{n\cdot0\cdot0}}{n(1-\mu_1)-1}\cos(nw-v),$$

und wenn man diese Werte in 200) einführt und

203) $$R_0 = \Sigma R_{n\cdot0\cdot0}\cos nw$$

setzt, so kommt:

204)
$$R_{n\cdot0\cdot0} = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{1}{n(1-\mu_1)+1} - \frac{1}{n(1-\mu_1)-1}\right\}b_{n\cdot0\cdot0}$$
$$= \frac{b_{n\cdot0\cdot0}}{1-n^2(1-\mu_1)^2}$$

Für den constanten Teil von R_2 hat man offenbar:

204a) $$R_{0\cdot0\cdot0} = 2S_{0\cdot0\cdot0} - B_{0\cdot0\cdot0}.$$

Die Divisoren, welche in den Relationen 204) auftreten, sind die folgenden:

$$n(1-\mu_1)+1, \qquad n(1-\mu_1)-1, \qquad 1-n^2(1-\mu_1)^2.$$

Der erste von ihnen kann niemals klein sein, wohl aber die beiden anderen, und zwar dann, wenn die Grösse $n(1-\mu_1)$ sich der Einheit nähert. Dies ist aber der Fall:

Ia. Wenn μ_1 sich dem Bruche $\frac{1}{2}$ nähert, und wenn $n = 2$
Ib. " μ_1 " " " $\frac{2}{3}$ " , " " $n = 3$
Ic. " μ_1 " " " $\frac{3}{4}$ " , " " $n = 4$.

Dies sind die Fälle, in denen die Funktion R_0, und folglich auch K_0, gross ist im Vergleich zur störenden Masse; der erste Fall ist der der Planeten vom Hecubatypus, deren mittlere Bewegung nahe gleich 600″ ist, der zweite ist der der Planeten vom Hildatypus, deren mittlere Bewegung nahe gleich 450″ ist, und der dritte Fall findet beim Planeten Thule statt, dessen mittlere Bewegung nahe gleich 400″ ist, und der übrigens auch deswegen erhebliche Schwierigkeiten bietet, weil er Jupiter sehr nahe kommt, infolge wovon die Glieder in der Entwicklung der Störungsfunktien nach den Potenzen von $\frac{a}{a'}$ resp. $\frac{r}{r'}$ nur langsam fallen. Man wird bemerken, dass in jedem dieser Fälle nur ein einziges Glied in R_0 besonders gross wird und dass dieses von der Form D ist. Ich will diese Planeten die **charakteristischen Planeten der ersten Klasse** nennen; man wird bei ihrer Berechnung bereits in der ersten Annäherung die zweiten Potenzen der Jupitersmasse berücksichtigen müssen, und die Gleichungen 189) und 194) werden hier nicht mehr streng genug sein. Ich werde diese Fälle im nächsten Kapitel behandeln, und mich hier auf diejenigen beschränken, in denen R_0 klein ist.

3. Die Gleichung 185) endlich giebt uns für die Glieder nullten Grades, wenn wir bedenken, dass nach 60) resp. 61) die Funktion Ξ ersten Grades ist:

205) $$\frac{dW}{dv} = S_0 - 2R_0 - 2S_0 R_0 + 3R_0^2 \pm \cdots,$$

also für die erste Annäherung:

206) $$\frac{dW}{dv} = S_0 - 2R_0 = \{S_{n\cdot0\cdot0} - 2R_{n\cdot0\cdot0}\}\cos nw.$$

Wir führen die Integration nach der zweiten Relation 190) aus, und erinnern uns wieder, dass die Funktion V mindestens vom ersten Grade ist. Wenn wir dann setzen:

207) $$W_0 = W_{0\cdot0\cdot0}\,v + \Sigma W_{n\cdot0\cdot0}\sin nw,$$

so wird:

208) $$W_{n\cdot0\cdot0} = \frac{S_{n\cdot0\cdot0} - 2R_{n\cdot0\cdot0}}{n(1-\mu_1)}$$
$$W_{0\cdot0\cdot0} = S_{0\cdot0\cdot0} - 2R_{0\cdot0\cdot0} = 2B_{0\cdot0\cdot0} - 3S_{0\cdot0\cdot0}.$$

Der Divisor $n(1-\mu_1)$ kann niemals klein werden. W_0 enthält also ausser gewöhnlichen Gliedern nur bei den charakteristischen Planeten der ersten Klasse eines von der Form D, das durch R_0 hier eingeführt wird.

Endlich hat man nach der Relation 155)

$$U = \mu W - W' - \mathrm{H} + \mathrm{H}'.$$

Die Funktionen H und H′ sind zweiten Grades und die Funktion W' ist mit der Saturnsmasse multiplicirt (vergl. pag. 64); wir vernachlässigen hier diese Grössen und haben:

209) $$U_0 = \mu W_0.$$

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich, dass die Funktionen S_0, R_0, W_0 und U_0 nur die Argumente nw enthalten, und da die Grösse $n(1-\mu_1)$, welche der Faktor von v in diesen Argumenten ist, niemals klein sein kann, so schliesst man, dass unter den Gliedern nullten Grades sich keine befinden, welche von langer Periode, d. h. von einer der Formen A oder C sind, auch nicht, wenn es sich um einen charakteristischen Planeten handelt. In allen Fällen wird darum die Funktion V, welche (ausser secularen Gliedern zweiten Grades) nur Glieder dieser beiden Formen enthält, mindestens vom ersten Grade sein. Es ist also[1]):

$$V_0 = 0, \qquad K_0 = \text{p. per.}\, W_0.$$

Nachdem man die Coefficienten $S_{n,0,0}$, $R_{n,0,0}$ und $W_{n,0,0}$ nach den Formeln 192), 204) und 208) in der ersten Annäherung berechnet hat, macht man die zweite Annäherung, indem man die so erhaltenen Werte in die Glieder zweiter Ordnung der Gleichungen 188), 193) und 205) einsetzt; die Relationen 191), 203) und 207) sehen wir als streng an; es handelt sich nur darum die Coefficienten $S_{n,0,0}$, $R_{n,0,0}$ und $W_{n,0,0}$ durch die angegebenen successiven Annäherungen genauer zu bestimmen. Diese Annäherungen führen äusserst schnell zum Ziel, und in fast allen Fällen kann man sich mit der ersten Annäherung begnügen, d. h. die Glieder rein zweiter Ordnung vernachlässigen.

4. Die numerische Berechnung der Funktionen S_0, R_0 und W_0 könnte nach dem Vorigen ohne Schwierigkeiten vor sich gehen, wenn von vornherein die Werte der beiden Constanten α und μ_1 bekannt wären, deren erste bei der Entwicklung der Störungsfunktion auftritt, wo sie zur Berechnung der Coefficienten $A_{n,0,0}$, $B_{n,0,0}$ u. s. w. dient, und deren zweite in den Divisoren vorkommt. Dieselben kennt man aber zunächst nicht und man wird also zu Anfang der Rechnung gewisse Werte für sie anzunehmen haben, mit denen man die Rechnung ausführt. Später bestimmt man ihre genaueren Werte durch Vergleichung der Rechnung mit den Beobachtungen und müsste dann die Rechnung mit den letzteren wiederholen, oder doch den berechneten Coefficienten entsprechende Correctionen hinzufügen. Zwischen den beiden genannten Grössen hat man aber die folgenden Relationen, wenn man die Masse des gestörten Körpers vernachlässigt:

1) „p. per." gebrauche ich als Abkürzung für „pars periodica".

$$\alpha = \frac{a}{a'}$$

210) $$n' = \frac{\sqrt{M'}}{a'^{\frac{3}{2}}}, \qquad n = \frac{\sqrt{M}}{a^{\frac{3}{2}}}, \qquad M' = k^2(1+m'), \qquad M = k^2$$

$$\mu = \frac{n'}{n}, \qquad \mu^2 = \alpha^3(1+m'), \quad \mu_1 = \mu(1+c_0+\gamma).$$

Wir setzen noch

210a) $$n_1 = \frac{n}{1+c_0+\gamma} \qquad \text{also } \mu_1 = \frac{n'}{n_1},$$

und

211) $$a_1 = \frac{a}{1+\text{p. const. } \varrho} = \frac{a}{1+b_0},$$

wo man a_1 als den Mittelwert des Radiusvektor bezeichnen kann.

Bei den Planeten, deren mittlere Bewegung nicht äusserst nahe commensurabel mit derjenigen Jupiters ist (d. h. bei allen Planeten mit Ausnahme der kritischen) ist $\gamma = 0$; und für c_0 war pag. 92 mit alleiniger Berücksichtigung der Glieder nullter Ordnung der folgende Wert gefunden worden:

$$c_0 = W_{0.0.0} = 2B_{0.0.0} - 3S_{0.0.0}.$$

Man sieht nun in der Regel a (resp. n) als Integrationsconstante an und dann ist a_0 eine überzählige Constante, über die wir verfügen können. Man kann sie auf verschiedene Weisen bestimmen:

I. Man kann

$$a_0 = 0$$

setzen; dann wird

$$S_{0.0.0} = 0, \qquad R_{0.0.0} = -B_{0.0.0}, \qquad W_{0.0.0} = 2B_{0.0.0}.$$

II. Man kann setzen

$$b_0 = 0.$$

Dann wird

$$S_{0.0.0} = \tfrac{1}{2}B_{0.0.0}, \qquad R_{0.0.0} = 0, \qquad W_{0.0.0} = \tfrac{1}{2}B_{0.0.0}$$
$$a_1 = a.$$

III. Man kann setzen

$$c_0 = 0.$$

Dann wird

$$S_{0.0.0} = \tfrac{2}{3}B_{0.0.0}, \qquad R_{0.0.0} = \tfrac{1}{3}B_{0.0.0}, \qquad W_{0.0.0} = 0$$
$$n_1 = \frac{n}{1+\gamma} \qquad \mu_1 = \mu(1+\gamma).$$

IV. Man kann endlich a_0 als Integrationsconstante (an Stelle von a) ansehen und kann dann über a resp. n (innerhalb gewisser enger Grenzen) verfügen. Hierbei wird man also a_0 als unbestimmte Grösse in den Formeln beiznbehalten haben nnd es später aus den Beobachtungen bestimmen. Hat man es bestimmt, so sind aneh die Grössen b_0 und c_0 bekannt. Findet man nun aus den Beobachtungen a_0 als eine Grösse rein erster Ordnung, so kann man den anfänglich gewählten Wert von a beibehalten, und braneht die Entwicklung der Störungsfunktion nicht zn wiederholen resp. die Coefficienten $A_{a\cdot i\cdot o}$, $B_{a\cdot i\cdot o}$ etc. nicht zn verbessern, was häufig von bedentendem Vorteil ist. Zeigt sich indessen, dass a_0 grösser ausfällt, so muss es dnrch nene Wahl von a und n verkleinert werden, wozu ausser den vorstehenden die Relationen 210c) resp. 211) dienen, wobei man a_1 oder n_1 unverändert lassen kann.

Wir wollen für unsere Untersuchungen den dritten Fall wählen, also $c_0 = 0$ setzen; dann sind nämlich für alle nicht kritischen Planeten die folgenden Gleichungen erfüllt

212)
$$n_1 = n, \qquad n_1 = \frac{\sqrt{M}}{a_{\frac{3}{2}}}$$
$$\mu_1 = \mu, \qquad \mu_1^2 = \alpha^2(1+m').$$

Diese Wahl ist für uns deswegen von Vorteil, weil wir Tafeln berechnen wollen, welche die Coefficienten der Störnngsglieder geben. Diese Tafeln enthalten streng genommen die beiden Argumente α und μ_1 (resp. a und n_1); durch die letztangeführten Relationen werden sie aber in einfacher Weise auf eines reducirt. Für die kritischen Planeten lässt sich diese Reduktion nicht ausführen, für sie würde man stets mit zwei Argumenten zn operiren haben. Doch fassen wir bei der Aufstellung der Tafeln die kritischen Planeten aus leicht fasslichen Gründen zunächst nicht ins Auge. Für sie ist mit Annahme des dritten der oben genannten Fälle

212a)
$$n_1 = \frac{n}{1+\gamma}, \qquad \mu_1 = \mu(1+\gamma)$$
$$\mu_1^2 = \alpha^2(1+\gamma)^2(1+m').$$

§ 3.

Die Glieder ersten Grades.

1. Bei der Berechnnng der Glieder ersten Grades, wollen wir, wie im Vorigen, zunächst die charakteristischen Planeten der ersten Klasse bei Seite lassen, so dass alle Funktionen nullten Grades (S_0, R_0 u. s. w.) als rein erster Ordnung anznsehen sind. Ich will aber noch eine weitere Einschränkung machen, indem wir voraussetzen wollen, dass auch die Funktionen ersten Grades S_1, R_1, W_1, U_1 und $\mathfrak{Z}_1$ nicht erheblich grösser sind als die störende Masse; ich schliesse

damit noch eine zweite Klasse von charakteristischen Planeten aus, die ich gleich näher bezeichnen will.

Nach diesen Voraussetzungen können wir in der ersten Annäherung die Glieder zweiter Ordnung bei Seite lassen und die Gleichung 183) wie folgt schreiben, wenn wir nur die Glieder ersten Grades nehmen:

$$213)\qquad \frac{dS}{dv} = -Q_1 = -\Sigma A^{(+1)}_{n.1.0}\eta\sin(nw+\mathrm{v}) - \Sigma A^{(+1)}_{n.0.1}\eta'\sin(nw+\mathrm{v}_1)$$
$$-\Sigma A^{(-1)}_{n.1.0}\eta\sin(nw-\mathrm{v}) - \Sigma A^{(-1)}_{n.0.1}\eta'\sin(nw-\mathrm{v}_1).$$

Wir haben also die Quadraturen

$$\int\eta\sin(nw\pm\mathrm{v})\,dv \qquad \text{und} \qquad \int\eta'\sin(nw\pm\mathrm{v}_1)\,dv$$

auszuführen. Gyldén hat gezeigt, wie man dieselben partiell ausführen kann, indem man zuvörderst η, Π_0, η', Π'_0 als constant ansieht; ich will ein nur wenig verändertes Verfahren anwenden, indem ich die folgenden Formeln benutze:

$$\int\eta\sin(nw\pm\mathrm{v})\,dv = \eta\cos\Pi\int\sin(nw\pm v)\,dv \mp \eta\sin\Pi\int\cos(nw\pm v)\,dv$$
$$-\int\frac{d\eta\cos\Pi}{dv}\int\sin(nw\pm v)\,dv^2 \pm \int\frac{d\eta\sin\Pi}{dv}\int\cos(nw\pm v)\,dv^2,$$

oder

$$\int\eta\sin(nw\pm\mathrm{v})\,dv = \eta\cos\Pi\int\sin(nw\pm v)\,dv \mp \eta\sin\Pi\int\cos(nw\pm v)\,dv$$
$$-\frac{d\eta\cos\Pi}{dv}\iint\sin(nw\pm v)\,dv^2 \pm \frac{d\eta\sin\Pi}{dv}\iint\cos(nw\pm v)\,dv^2$$
$$214)\qquad +\frac{d^2\eta\cos\Pi}{dv^2}\iiint\sin(nw\pm v)\,dv^3 \mp \frac{d^2\eta\sin\Pi}{dv^2}\iiint\cos(nw\pm v)\,dv^3$$
$$\pm\cdots\cdots$$

$$\int\eta'\sin(nw\pm\mathrm{v}_1)\,dv = \eta'\cos\Pi_1\int\sin(nw\pm v)\,dv \mp \eta'\sin\Pi_1\int\cos(nw\pm v)\,dv$$
$$-\frac{d\eta'\cos\Pi_1}{dv}\iint\sin(nw\pm v)\,dv^2 \pm \frac{d\eta'\sin\Pi_1}{dv}\iint\cos(nw\pm v)\,dv^2$$
$$\pm\cdots\cdots,$$

zu welchen Relationen ich die entsprechenden:

$$\int\eta\cos(nw\pm\mathrm{v})\,dv = \eta\cos\Pi\int\cos(nw\pm v)\,dv \pm \eta\sin\Pi\int\sin(nw\pm v)\,dv$$
$$-\frac{d\eta\cos\Pi}{dv}\iint\cos(nw\pm v)\,dv \mp \frac{d\eta\sin\Pi}{dv}\iint\sin(nw\pm v)\,dv^2$$
$$\pm\cdots\cdots$$

$$\int\eta'\cos(nw\pm\mathrm{v}_1)\,dv = \eta'\cos\Pi_1\int\cos(nw\pm v)\,dv \pm \eta'\sin\Pi_1\int\sin(nw\pm v)\,dv$$
$$\mp\cdots\cdots$$

hinzufüge, da wir sie später brauchen werden.

Die Funktionen $\eta {\cos \atop \sin} \Pi$ und $\eta' {\cos \atop \sin} \Pi_1$ werden nun bei jeder Differentiation mit einer der kleinen Grössen ϱ_n multiplicirt; das angewandte Integrationsverfahren führt also äusserst schnell zum Ziele, wenn nicht die betreffenden Glieder durch die Ausführung der Integrationen $\int {\cos \atop \sin} (nw \pm v)\, dv$ erheblich vergrössert werden; dies ist aber nur der Fall für die charakteristischen Planeten der ersten Klasse, und auch bei diesen ist die Abnahme der Glieder noch stark genug; in den Fällen, die wir jetzt behandeln, braucht man wohl stets nur die erste Zeile in den vorstehenden Relationen zu berücksichtigen.

Wir erinnern uns der Relationen 201) und schreiben also in der ersten Annäherung, da V mindestens ersten Grades ist:

214a)
$$\int \eta \sin (nw \pm \mathrm{v})\, dv = -\frac{1}{n(1-\mu_1) \pm 1}\, \eta \cos (nw \pm \mathrm{v})$$
$$\int \eta' \sin (nw \pm \mathrm{v}_1)\, dv = -\frac{1}{n(1-\mu_1) \pm 1}\, \eta' \cos (nw \pm \mathrm{v}_1).$$

Wenn wir setzen

215)
$$S_1 = \Sigma S^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0}\, \eta \cos (nw + \mathrm{v}) \qquad + \Sigma S^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1}\, \eta' \cos (nw + \mathrm{v}_1)$$
$$+ \Sigma S^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0}\, \eta \cos (nw - \mathrm{v}) \qquad + \Sigma S^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1}\, \eta' \cos (nw - \mathrm{v}_1),$$

so wird also:

215a)
$$S^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0} = \frac{A^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0}}{n(1-\mu_1)+1}, \qquad S^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1} = \frac{A^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1}}{n(1-\mu_1)+1}$$
$$S^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0} = \frac{A^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0}}{n(1-\mu_1)-1}, \qquad S^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1} = \frac{A^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1}}{n(1-\mu_1)-1}.$$

Man ersieht, dass die Funktion S_1 dieselben Divisoren enthält wie R_0, also auch in denselben Fällen beträchtlich wird, d. h. bei den charakteristischen Planeten der ersten Klasse und zwar wird sie bei diesen Planeten Glieder der Form C enthalten.

2. Wir gehen jetzt zur Gleichung 184) für ϱ über und schreiben mit Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung:

216)
$$\frac{d^2\varrho}{dv^2} + \varrho = -Q_0 \frac{d(\varrho)}{dv} + 2S_1 - P_1;$$

da aber mit Vernachlässigung von Gliedern rein erster Ordnung:

$$\frac{d(\varrho)}{dv} = -\eta \sin \mathrm{v},$$

so wird, wenn wir für Q_0, S_1 und P_1 ihre oben gefundenen Werte einsetzen:

217) $$\frac{d^2\varrho}{dv^2}+\varrho = \Sigma b^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0}\,\eta\cos(nw+\mathrm{v}) \qquad +\Sigma b^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1}\,\eta'\cos(nw+\mathrm{v}_1)$$
$$+\Sigma b^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0}\,\eta\cos(nw-\mathrm{v}) \qquad +\Sigma b^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1}\,\eta'\cos(nw-\mathrm{v}_1),$$

wo

217a) $$b^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0} = 2S^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0}-B^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0}-\tfrac{1}{2}A_{n\cdot0\cdot0}, \qquad b^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1} = 2S^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1}-B^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1}$$
$$b^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0} = 2S^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0}-B^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0}+\tfrac{1}{2}A_{n\cdot0\cdot0}, \qquad b^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1} = 2S^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1}-B^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1}.$$

Jetzt haben wir die Funktion ϱ in ihre beiden Teile (ϱ) und R zu zerlegen, da nach unserer Definition (ϱ) alle Glieder der Form B:

$$\cos[(1-\sigma_n)v-\Gamma_n]$$

enthalten soll. Wenn wir uns erinnern, dass

$$nw\pm\mathrm{v} = n(1-\mu_1)v-nB-n\mu V\pm(v-\Pi)$$
$$nw\pm\mathrm{v}_1 = n(1-\mu_1)v-nB-n\mu V\pm(v-\Pi_1),$$

so sehen wir, dass diese Argumente von der erwähnten Form sind, wenn $n=0$, ganz unabhängig von dem Werte von μ_1; diese Glieder werden also für alle Planeten die gleichen sein. Da nach dem vorigen Kapitel $b^{(-1)}_{0\cdot1\cdot0}=0$ und $b^{(-1)}_{0\cdot0\cdot1}=0$, so haben wir die beiden folgenden Gleichungen:

218) $$\frac{d^2R}{dv^2}+R = \sum_1^\infty b^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0}\,\eta\cos(nw+\mathrm{v}) \qquad +\sum_1^\infty b^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1}\,\eta'\cos(nw+\mathrm{v}_1)$$
$$+\sum_1^\infty b^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0}\,\eta\cos(nw-\mathrm{v}) \qquad +\sum_1^\infty b^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1}\,\eta'\cos(nw-\mathrm{v}_1)$$

219) $$\frac{d^2(\varrho)}{dv^2}+(\varrho) = b^{(+1)}_{0\cdot1\cdot0}\,\eta\cos\mathrm{v}+b^{(+1)}_{0\cdot0\cdot1}\,\eta'\cos\mathrm{v}_1.$$

Wir wollen zuerst die Gleichung 218) integriren, indem wir uns der Beziehungen 197) bis 199) erinnern. Demnach setzen wir:

220) $$R_1 = g_1\sin v-g_2\cos v$$

220a) $$\frac{dg_1}{dv} = \tfrac{1}{2}\sum b^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0}\{\eta\cos(nw+\mathrm{v}+v)+\eta\cos(nw+\mathrm{v}-v)\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\sum b^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0}\{\eta\cos(nw-\mathrm{v}+v)+\eta\cos(nw-\mathrm{v}-v)\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\sum b^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1}\{\eta'\cos(nw+\mathrm{v}_1+v)+\eta'\cos(nw+\mathrm{v}_1-v)\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\sum b^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1}\{\eta'\cos(nw-\mathrm{v}_1+v)+\eta'\cos(nw-\mathrm{v}_1-v)\}$$
$$\frac{dg_2}{dv} = \tfrac{1}{2}\sum b^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0}\{\eta\sin(nw+\mathrm{v}+v)-\eta\sin(nw+\mathrm{v}-v)\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\sum b^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0}\{\eta\sin(nw-\mathrm{v}+v)-\eta\sin(nw-\mathrm{v}-v)\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\sum b^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1}\{\eta'\sin(nw+\mathrm{v}_1+v)-\eta'\sin(nw+\mathrm{v}_1-v)\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\sum b^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1}\{\eta'\sin(nw-\mathrm{v}_1+v)-\eta'\sin(nw-\mathrm{v}_1-v)\}.$$

Um die letzteren Gleichungen zu integriren, verfahre ich auf dieselbe Weise wie oben zur Herstellung der Relationen 214), 190) und 201). Man erhält dann die folgenden Formeln:

221)
$$\begin{aligned}
\int \eta \sin[nw \pm (\mathrm{v}+v)]\,dv &= \eta\cos\Pi \int \sin(nw \pm 2v)\,dv \mp \eta \sin\Pi \int \cos(nw \pm 2v)\,dv \\
&\quad - \frac{d\eta\cos\Pi}{dv}\iint \sin(nw \pm 2v)\,dv^2 \pm \frac{d\eta\sin\Pi}{dv}\iint \cos(nw \pm 2v)\,dv^2 \\
&\quad \pm \cdots\cdots \\
\int \eta \sin[nw \pm (\mathrm{v}-v)]\,dv &= \eta\cos\Pi \int \sin nw\,dv \mp \eta\sin\Pi\int \cos nw\,dv \\
&\quad - \frac{d\eta\cos\Pi}{dv}\iint \sin nw\,dv \pm \frac{d\eta\sin\Pi}{dv}\iint \cos nw\,dv^2 \\
&\quad \pm \cdots\cdots \\
\int \eta\cos[nw \pm (\mathrm{v}+v)]\,dv &= \eta\cos\Pi\int \cos(nw \pm 2v)\,dv \pm \eta\sin\Pi \int \sin(nw \pm 2v)\,dv \\
&\quad - \frac{d\eta\cos\Pi}{dv}\iint \cos(nw \pm 2v)\,dv^2 \mp \frac{d\eta\sin\Pi}{dv}\iint \sin(nw \pm 2v)\,dv^2 \\
&\quad \pm \cdots\cdots \\
\int \eta\cos[nw \pm (\mathrm{v}-v)]\,dv &= \eta\cos\Pi\int \cos nw\,dv \pm \eta\sin\Pi\int \sin nw\,dv \\
&\quad - \frac{d\eta\cos\Pi}{dv}\iint \cos nw\,dv^2 \mp \frac{d\eta\sin\Pi}{dv}\iint \sin nw\,dv^2 \\
&\quad \pm \cdots\cdots.
\end{aligned}$$

Für die Integrale $\int \eta' \sin[nw \pm (\mathrm{v}_1 + v)]\,dv$ u. s. w. findet man ganz analoge Ausdrücke, man hat nur η durch η' und Π durch Π_1 zu ersetzen.

Weiter ist:

222)
$$\begin{aligned}
\int {\sin \atop \cos} nw\,dv &= \mp \frac{1}{n(1-\mu_1)} {\cos \atop \sin} nw + \frac{\mu}{1-\mu_1}\int \frac{dV}{dv} {\sin \atop \cos} nw\,dv \\
\int \sin(nw \pm 2v)\,dv &= -\frac{1}{n(1-\mu_1)\pm 2}\cos(nw \pm 2v) + \frac{n\mu}{n(1-\mu_1)\pm 2}\int \frac{dV}{dv}\sin(nw \pm 2v)\,dv \\
\int \cos(nw \pm 2v)\,dv &= \frac{1}{n(1-\mu_1)\pm 2}\sin(nw \pm 2v) + \frac{n\mu}{n(1-\mu_1)\pm 2}\int \frac{dV}{dv}\cos(nw \pm 2v)\,dv.
\end{aligned}$$

Die Divisoren, welche in diesen Ausdrücken auftreten, sind:

$$n(1-\mu_1), \qquad n(1-\mu_1)+2, \qquad n(1-\mu_1)-2.$$

Da n nicht den Wert Null annimmt, so ist der letztere der einzige, welcher sehr klein sein kann; er wird es in den folgenden Fällen sein:

Ia. Wenn μ_1 sich dem Bruche $\frac{1}{2}$ nähert, und wenn $n = 4$
Ib. " μ_1 " " " $\frac{2}{3}$ " , " " $n = 6$
Ic. " μ_1 " " " $\frac{3}{4}$ " , " " $n = 8.$

Das sind aber wieder die Fälle der charakteristischen Planeten der ersten Klasse. Der genannte Divisor wird aber auch in den folgenden Fällen klein sein:

IIa. Wenn μ_1 sich dem Brnche $\frac{1}{3}$ nähert, nnd wenn $n = 3$

IIb. „ μ_1 „ „ „ $\frac{3}{5}$ „ , „ „ $n = 5$

. . . .

Ich will die Planeten, für welche eine der Bedingungen II. erfüllt ist, **charakteristische Planeten der zweiten Klasse** nennen. Handelt es sich um einen der letzteren, so sind die Funktionen S_0, S_1, R_0 und W_0 rein erster Ordnnng, während in S Glieder vom zweiten Grade ab, und in R und W vom ersten Grade ab beträchtlich sind. Die Funktion R_1 enthält bei den charakteristischen Planeten der zweiten Klasse ausser gewöhnlichen Gliedern nur solche der Form D, bei denen der ersten Klasse jedoch auch solche der Form C, die durch S eingeführt werden. Wir wollen gegenwärtig auch die charakteristischen Planeten der zweiten Klasse bei Seite lassen. Dann werden die Ausdrücke 221) änsserst stark abnehmen, nnd wir können, wenn wir nicht einen sehr hohen Grad von Genanigkeit anstreben, die Glieder vernachlässigen, welche die Ableitungen der Grössen $\eta \cos \Pi$, $\eta \sin \Pi$ u. s. w. enthalten. Man erhält:

223)
$$\begin{aligned}\left.\begin{matrix} g_1 \\ g_2 \end{matrix}\right\} = &\pm \tfrac{1}{2}\sum b^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0}\left\{\frac{\eta \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}(nw+\mathrm{v}+v)}{n(1-\mu_1)+2} \pm \frac{\eta \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}(nw+\mathrm{v}-v)}{n(1-\mu_1)}\right\} \\ &\pm \tfrac{1}{2}\sum b^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0}\left\{\frac{\eta \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}(nw-\mathrm{v}+v)}{n(1-\mu_1)} \pm \frac{\eta \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}(nw-\mathrm{v}-v)}{n(1-\mu_1)-2}\right\} \\ &\pm \tfrac{1}{2}\sum b^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1}\left\{\frac{\eta' \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}(nw+\mathrm{v}_1+v)}{n(1-\mu_1)+2} \pm \frac{\eta' \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}(nw+\mathrm{v}_1-v)}{n(1-\mu_1)}\right\} \\ &\pm \tfrac{1}{2}\sum b^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1}\left\{\frac{\eta' \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}(nw-\mathrm{v}_1+v)}{n(1-\mu_1)} \pm \frac{\eta' \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}(nw-\mathrm{v}_1-v)}{n(1-\mu_1)-2}\right\},\end{aligned}$$

und wenn wir setzen:

224)
$$\begin{aligned}R_1 = &\sum_1^\infty R^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0}\,\eta\cos(nw+\mathrm{v}) + \sum_1^\infty R^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1}\,\eta'\cos(nw+\mathrm{v}_1) \\ &+ \sum_1^\infty R^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0}\,\eta\cos(nw-\mathrm{v}) + \sum_1^\infty R^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1}\,\eta'\cos(nw-\mathrm{v}_1),\end{aligned}$$

so ist:

224a) $$R^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0} = \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{n(1-\mu_1)+2} - \frac{1}{n(1-\mu_1)}\right] b^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0} = \frac{b^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0}}{1-[n(1-\mu_1)+1]^2}$$

$$R^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0} = \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{n(1-\mu_1)} - \frac{1}{n(1-\mu_1)-2}\right] b^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0} = \frac{b^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0}}{1-[n(1-\mu_1)-1]^2}$$

$$R^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1} = \frac{b^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1}}{1-[n(1-\mu_1)+1]^2}$$

$$R^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1} = \frac{b^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1}}{1-[n(1-\mu_1)-1]^2}.$$

3. Jetzt wollen wir die Gleichnng 219) integriren. Hierbei können wir die Relationen 221) nicht anwenden, wenn wir das Auftreten secularer Glieder vermeiden wollen. Gyldén hat gezeigt, wie man das Integral dieser Gleichung in rein periodischer Form erhalten kann, indem man die elementaren Glieder an Stelle der secularen einführt, und zwar lässt sich die Integration sehr einfach ausführen; da wir (ϱ) unter der Form:

$$(\varrho) = \eta\cos\mathrm{v} = \varkappa\cos(v-\omega) + \Sigma\varkappa_n\cos(v-\omega_n)$$

darstellen wollen, so differenziren wir diesen Ausdruck zweimal nnd finden

$$\frac{d^2(\varrho)}{dv^2} = (1-\varsigma)^2\varkappa\cos(v-\omega) + \Sigma(1-\varsigma_n)^2\varkappa_n\cos(v-\omega_n).$$

Nach den Relationen 154) ist aber:

$$\eta'\cos\mathrm{v}_1 = \eta'\cos\Pi_1\cos v + \eta'\sin\Pi_1\sin v = \Sigma\varkappa'_n\cos(v-\omega_n).$$

Setzt man die vorstehenden Werte in die Gleichung 219) ein, so erhält man zur Bestimmung der Coefficienten $\varkappa_n$ folgende Gleichung:

$$(2\varsigma-\varsigma^2)\varkappa\cos(v-\omega) + \Sigma(2\varsigma_n-\varsigma_n^2)\varkappa_n\cos(v-\omega_n) = b^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 0}\varkappa\cos(v-\omega) + \Sigma\left\{b^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 0}\varkappa_n + b^{(+1)}_{0\cdot 0\cdot 1}\varkappa'_n\right\}\cos(v-\omega_n),$$

woraus man schliesst:

225) $$(2\varsigma-\varsigma^2)\varkappa = b^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 0}\varkappa$$
$$(2\varsigma_n-\varsigma_n^2)\varkappa_n = b^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 0}\varkappa_n + b^{(+1)}_{0\cdot 0\cdot 1}\varkappa'_n.$$

Wir bestimmen demnach die Grösse ς aus der Gleichung:

225a) $$2\varsigma-\varsigma^2 = b^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 0},$$

womit $\varkappa$ und Γ in der That die beiden Integrationsconstanten werden. Für die $\varkappa_n$ hat man folgende Werte:

226) $$\varkappa_n = \frac{b^{(+1)}_{0\cdot 0\cdot 1}\varkappa'_n}{2\varsigma_n-\varsigma_n^2-b^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 0}} = \frac{b^{(+1)}_{0\cdot 0\cdot 1}\varkappa'_n}{2(\varsigma_n-\varsigma)-(\varsigma_n^2-\varsigma^2)} = \frac{b^{(+1)}_{0\cdot 0\cdot 1}\varkappa'_n}{2(\varsigma_n-\varsigma)\left[1-\frac{\varsigma_n+\varsigma}{2}\right]}.$$

Die Differenz $\varsigma_n - \varsigma$ ist eine Grösse rein erster Ordnung; die Coefficienten $\varkappa_n$ sind also nullter Ordnung, d. h. elementar. Die Constante ς kommt unter den ς_n nicht vor, und darum wird auch die Differenz $\varsigma_n - \varsigma$ im Allgemeinen nicht gleich Null sein. Es scheint indessen, dass in Ausnahmefällen die eine oder die andere der Constanten ς_n ihrem Werte nach so nahe ς kommen könne, dass daraus ausserordentlich grosse Werte der entsprechenden $\varkappa_n$ resultiren. Ueber diese Fälle zu sprechen, werde ich im achten Kapitel Gelegenheit nehmen, ebenso wie von der Darstellung der elementaren Glieder in secularer Form.

4. Für die Funktion W haben wir endlich:

$$\frac{dW}{dv} = S_1 - 2R_1 + (6R_0 - 2S_0)\,\eta\cos \mathrm{v} - \frac{d\Xi_1}{dv},$$

und wenn wir die für R und S gefundenen Werte einsetzen, so ist:

227)
$$\begin{aligned}\frac{dW}{dv} = {} & \sum T^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0}\,\eta\cos(nw+\mathrm{v}) && + \sum T^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1}\,\eta'\cos(nw+\mathrm{v}_1) \\ & + \sum T^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0}\,\eta\cos(nw-\mathrm{v}) && + \sum T^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1}\,\eta'\cos(nw-\mathrm{v}_1) \\ & - \frac{d\Xi_1}{dv},\end{aligned}$$

wo

227a)
$$\begin{aligned}T^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0} &= S^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0} - 2R^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0} + 3R_{n\cdot0\cdot0} - S_{n\cdot0\cdot0} \\ T^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0} &= S^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0} - 2R^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0} + 3R_{n\cdot0\cdot0} - S_{n\cdot0\cdot0} \\ T^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1} &= S^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1} - 2R^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1} \\ T^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1} &= S^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1} - 2R^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1}.\end{aligned}$$

Die Gleichung 227) integriren wir gerade wie die Gleichung 213), indem wir, wie 214a), schreiben:

$$\int \eta\cos(nw \pm \mathrm{v})\,dv = \frac{1}{n(1-\mu_1) \pm 1}\,\eta\sin(nw \pm \mathrm{v})$$

$$\int \eta'\cos(nw \pm \mathrm{v}_1)\,dv = \frac{1}{n(1-\mu_1) \pm 1}\,\eta'\sin(nw \pm \mathrm{v}_1).$$

Wenn wir also setzen:

228)
$$\begin{aligned}W_1 = {} & \sum W^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0}\,\eta\sin(nw+\mathrm{v}) && + \sum W^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1}\,\eta'\sin(nw+\mathrm{v}_1) \\ & + \sum W^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0}\,\eta\sin(nw-\mathrm{v}) && + \sum W^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1}\,\eta'\sin(nw-\mathrm{v}_1) \\ & - \Xi_1,\end{aligned}$$

so wird:

228a)
$$W^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0} = \frac{T^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0}}{n(1-\mu_1)+1}, \qquad W^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1} = \frac{T^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1}}{n(1-\mu_1)+1}$$
$$W^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0} = \frac{T^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0}}{n(1-\mu_1)-1}, \qquad W^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1} = \frac{T^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1}}{n(1-\mu_1)-1}.$$

Die Funktion Ξ_1 endlich findet man mit Hilfe der Relation 60). Wenn man dort nur die Glieder ersten Grades berücksichtigt und diejenigen rein zweiter Ordnung fortlässt, so wird:

228b)
$$\Xi_1 = 2\frac{d\eta\cos\Pi}{dv}\cos v + 2\frac{d\eta\sin\Pi}{dv}\sin v.$$

Der numerische Betrag derselben ist so klein, dass man sie wohl stets bei Seite lassen kann.

Für die Funktion U ergiebt sich dann

229)
$$U_1 = \mu W_1,$$

und da unter den Gliedern ersten Grades in W bei den allgemeinen Planeten nur gewöhnliche Glieder sich befinden, so ist auch:

229a)
$$K_1 = W_1, \qquad V_1 = 0.$$

5. Wir wollen nun die Gleichung 186) mit bezug auf die Glieder ersten Grades integriren. Wenn wir wieder von den charakteristischen Planeten absehen, so ist in der ersten Annäherung zu setzen, da $\mathfrak{z}$ ersten Grades ist:

230)
$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2} + \mathfrak{z} = -Q_0\frac{d(\mathfrak{z})}{dv} + Z_1,$$

und da mit Vernachlässigung der Glieder rein erster Ordnung:

$$\frac{d(\mathfrak{z})}{dv} = \sin j\cos\mathfrak{v},$$

so wird, wenn wir für Q_0 und Z_1 ihre Werte einsetzen:

231)
$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2} + \mathfrak{z} = \sum c^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0}\sin j\sin(nw+\mathfrak{v}) \qquad + \sum c^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1}\sin j'\sin(nw+\mathfrak{v}_1)$$
$$+ \sum c^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0}\sin j\sin(nw-\mathfrak{v}) \qquad + \sum c^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1}\sin j'\sin(nw-\mathfrak{v}_1),$$

wo:

231a)
$$c^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0} = C^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0} - \tfrac{1}{2}A_{n\cdot0\cdot0\cdot1} \qquad c^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1} = C^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1}$$
$$c^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0} = C^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0} - \tfrac{1}{2}A_{n\cdot0\cdot0\cdot1} \qquad c^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1} = C^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1}.$$

Die Gleichung 231) integriren wir dann gerade wie die Gleichung 216) für ϱ. Die in 231) vorkommenden Argumente werden auch hier elementar für $n = 0$. Wir zerlegen also, da $c^{(-1)}_{0\cdot1\cdot0}$ und $c^{(-1)}_{0\cdot0\cdot1}$ gleich Null sind, diese Gleichungen in die beiden folgenden:

$$232)\qquad \frac{d^2\mathfrak{Z}}{dv^2}+\mathfrak{Z} = \sum_1^\infty c^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0}\sin j\sin(nw+\mathfrak{v}) \quad +\sum_1^\infty c^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1}\sin j'\sin(nw+\mathfrak{v}_1)$$
$$+\sum_1^\infty c^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0}\sin j\sin(nw-\mathfrak{v}) \quad +\sum_1^\infty c^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1}\sin j'\sin(nw-\mathfrak{v}_1)$$

$$233)\qquad \frac{d^2(\mathfrak{z})}{dv^2}+(\mathfrak{z}) = c^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 0}\sin j\sin\mathfrak{v} \quad +c^{(+1)}_{0\cdot 0\cdot 1}\sin j'\sin\mathfrak{v}_1.$$

Wenn wir 232) in der Form:

$$232a)\qquad \frac{d^2\mathfrak{Z}}{dv^2}+\mathfrak{Z} = Y$$

schreiben, so wird wieder [1]):

$$234)\qquad \mathfrak{Z} = g_1\sin v - g_2\cos v,$$

wo zu setzen ist:

$$\frac{dg_1}{dv} = Y\cos v, \qquad \frac{dg_2}{dv} = Y\sin v.$$

Man hat also zu nehmen:

$$234a)\qquad \left.\begin{matrix}\dfrac{dg_1}{dv}\\ \dfrac{dg_2}{dv}\end{matrix}\right\} = \pm\tfrac{1}{2}\sum c^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0}\left\{\sin j\,{\sin\atop\cos}(nw+\mathfrak{v}+v)\pm\sin j\,{\sin\atop\cos}(nw+\mathfrak{v}-v)\right\}$$
$$\pm\tfrac{1}{2}\sum c^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0}\left\{\sin j\,{\sin\atop\cos}(nw-\mathfrak{v}+v)\pm\sin j\,{\sin\atop\cos}(nw-\mathfrak{v}-v)\right\}$$
$$\pm\tfrac{1}{2}\sum c^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1}\left\{\sin j'\,{\sin\atop\cos}(nw+\mathfrak{v}_1+v)\pm\sin j'\,{\sin\atop\cos}(nw+\mathfrak{v}_1-v)\right\}$$
$$\pm\tfrac{1}{2}\sum c^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1}\left\{\sin j'\,{\sin\atop\cos}(nw-\mathfrak{v}_1+v)\pm\sin j'\,{\sin\atop\cos}(nw-\mathfrak{v}_1-v)\right\}.$$

In Analogie mit den Gleichungen 221) haben wir aber:

$$235)\qquad \begin{aligned}\int\sin j\sin[nw\pm(\mathfrak{v}+v)]\,dv &= \sin j\cos\sigma\int\sin(nw\pm 2v)\,dv \mp \sin j\sin\sigma\int\cos(nw\pm 2v)\,dv\\ &-\frac{d\sin j\cos\sigma}{dv}\iint\sin(nw\pm 2v)\,dv^2 \pm \frac{d\sin j\sin\sigma}{dv}\iint\cos(nw\pm 2v)\,dv^2\\ &\pm\cdots\cdots\\ \int\sin j\sin[nw\pm(\mathfrak{v}-v)]\,dv &= \sin j\cos\sigma\int\sin nw\,dv \mp \sin j\sin\sigma\int\cos nw\,dv\\ &-\frac{d\sin j\cos\sigma}{dv}\iint\sin nw\,dv^2 \pm \frac{d\sin j\sin\sigma}{dv}\iint\cos nw\,dv^2\\ &\pm\cdots\cdots\end{aligned}$$

1) Die Bezeichnungen g_1 und g_2 brauche ich hier, wie oben, nur vorübergehend.

$$\int \sin j \cos [nw \pm (\mathfrak{v}+v)]\,dv = \sin j \cos \sigma \int \cos (nw \pm 2v)\,dv \pm \sin j \sin \sigma \int \sin (nw \pm 2v)\,dv$$
$$-\frac{d \sin j \cos \sigma}{dv} \iint \cos (nw \pm 2v)\,dv^2 \mp \frac{d \sin j \sin \sigma}{dv} \iint \sin (nw \pm 2v)\,dv^2$$
$$\pm \cdots\cdots$$

235)
$$\int \sin j \cos [nw \pm (\mathfrak{v}-v)]\,dv = \sin j \cos \sigma \int \cos nw\,dv \pm \sin j \sin \sigma \int \sin nw\,dv$$
$$-\frac{d \sin j \cos \sigma}{dv} \iint \cos nw\,dv^2 \mp \frac{d \sin j \sin \sigma}{dv} \iint \sin nw\,dv^2$$
$$\pm \cdots\cdots.$$

Die weitere Integration findet mit Anwendung der Relationen 222) statt und es treten hier dieselben Divisoren

$$n(1-\mu_1), \qquad n(1-\mu_1)+2, \qquad n(1-\mu_1)-2$$

auf wie in der Funktion R_1. $\mathfrak{Z}_1$ enthält also, wie R_1, merklich grosse Glieder, wenn es sich um charakteristische Planeten der ersten oder zweiten Klasse handelt.

Es wird endlich, wenn man die Rechnungen in der angegebenen Weise ausführt:

236)
$$\mathfrak{Z}_1 = \Sigma Z^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0} \sin j \sin (nw+\mathfrak{v}) \quad + \Sigma Z^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1} \sin j' \sin (nw+\mathfrak{v}_1)$$
$$+ \Sigma Z^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0} \sin j \sin (nw-\mathfrak{v}) \quad + \Sigma Z^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1} \sin j' \sin (nw-\mathfrak{v}_1),$$

wo

236a)
$$Z^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0} = \frac{c^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0}}{1-[n(1-\mu_1)+1]^2}, \qquad Z^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1} = \frac{c^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1}}{1-[n(1-\mu_1)+1]^2}$$
$$Z^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0} = \frac{c^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0}}{1-[n(1-\mu_1)-1]^2}, \qquad Z^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1} = \frac{c^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1}}{1-[n(1-\mu_1)-1]^2}.$$

6. Zur Integration der Gleichung 233) erinnern wir uns, dass wir $(\mathfrak{z})$ unter der Form

$$(\mathfrak{z}) = \sin j \sin \mathfrak{v} = \sin \iota \sin (v-\vartheta) + \Sigma \sin \iota_n \sin (v-\vartheta_n)$$

darstellen wollen, wonach

$$\frac{d^2(\mathfrak{z})}{dv^2} = -(1+\tau)^2 \sin \iota \sin (v-\vartheta) - \Sigma (1+\tau_n)^2 \sin \iota_n \sin (v-\vartheta_n).$$

Ferner folgt aus den Relationen 171) und 173)

$$\sin j' \sin \mathfrak{v}_1 = \sin j' \cos \sigma_1 \sin v - \sin j' \sin \sigma_1 \cos v = \Sigma \sin \iota_n' \sin (v-\vartheta_n).$$

Setzt man diese letzteren Werte in Gleichung 233) ein, so erhält man zur Bestimmung der $\sin \iota_n$ folgende Gleichung:

$$(2\tau+\tau^2) \sin \iota \sin (v-\vartheta) + \Sigma (2\tau_n+\tau_n^2) \sin \iota_n \sin (v-\vartheta_n) =$$
$$= -c^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 0} \sin \iota \sin (v-\vartheta) - \Sigma \left\{ c^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 0} \sin \iota_n + c^{(+1)}_{0\cdot 0\cdot 1} \sin \iota_n' \right\} \sin (v-\vartheta_n),$$

woraus man schliesst:

237)
$$2\tau+\tau^2 = -c^{(+1)}_{0\cdot1\cdot0}$$
$$\sin\iota_n = -\frac{c^{(+1)}_{0\cdot0\cdot1}\sin\iota'_n}{2\tau_n+\tau_n^2+c^{(+1)}_{0\cdot1\cdot0}} = \frac{c^{(+1)}_{0\cdot0\cdot1}\sin\iota'_n}{2(\tau-\tau_n)+(\tau^2-\tau_n^2)} = \frac{c^{(+1)}_{0\cdot0\cdot1}\sin\iota'_n}{2(\tau-\tau_n)\left[1+\frac{\tau+\tau_n}{2}\right]}$$

Es gelten für die τ_n und die $\sin\iota_n$ dieselben Bemerkungen, die wir schon anlässslich der ς_n und $\varkappa_n$ gemacht haben; ich will nur bemerken, dass τ' gleich Null ist, auch wenn man die Bewegung Jupiters nicht als elliptisch ansieht; eine Thatsache, die aus der Theorie der gegenseitigen Störungen der grossen Planeten folgt.

7. Es lassen sich nun auch ohne Schwierigkeiten nach 96) die Funktionen $\sin i \sin \Sigma$ und $\sin i \cos \Sigma$ bis auf Glieder zweiten Grades exclusive, sowie der Ausdruck 92) für die Länge l und nach 100) auch die Funktion $\Omega - \Sigma$ bis auf Glieder zweiten Grades inclusive berechnen. Ich gehe auf diese Operationen hier nicht des Näheren ein, da sie auf der Hand liegen; auch würde die analytische Darstellung unnütz weitläufig werden, während sich die numerische Berechnung äusserst einfach gestaltet, da man überall die Glieder, welche unwesentlich sind, sofort bei Seite lassen kann.

§ 4.

Die Glieder zweiten Grades.

1. Unter den Gliedern nullten und ersten Grades, welche wir bisher behandelt haben, fanden sich ausser gewöhnlichen Gliedern solche der Form B, welche stets ersten Grades sind und bei allen Planeten in gleicher Weise auftreten; ferner traten, insofern es sich um charakteristische Planeten handelt, Glieder der Formen C und D auf. Solche der Form A jedoch fanden sich nicht vor; dieselben sind demnach mindestens zweiten Grades, und wir werden jetzt mit ihnen zu thun haben. Sind die Excentricitäts- und Neigungsmoduln sämmtlicher störender Körper gleich Null, so treten gar keine Glieder der Form A auf.

Bei der Darstellung der Glieder zweiten Grades will ich nicht so weit ins Einzelne gehen, wie ich es bisher gethan habe, da ich sonst die analytische Entwicklung weit ausführlicher machen müsste, als man ihrer je benötigen wird. Nur bei grossen Excentricititäten und Neigungen wird man überhaupt auf diese Glieder Rücksicht nehmen und auch dann nur auf einen kleinen Teil derselben.

Ich setze wieder voraus, dass die Funktionen S_0, S_1, S_2, R_0, R_1, R_2 und U_0, U_1, U_2 als rein erster Ordnung angesehen werden können, schliesse also die charakteristischen Planeten vorläufig aus.

Zur Bestimmung von S_2 haben wir dann nach Gleichung 183)

$$\frac{dS}{dv} = -Q_2 - \tfrac{1}{2}\frac{d\eta^2}{dv}.$$

Ich will nun den Teil der Funktion S_2, der von der Form A ist, von den übrigen Gliedern trennen und zu diesem Zweck eine Bezeichnung anwenden, welche Gyldén zuerst in ähnlicher Weise gebraucht hat. Ich bezeichne nämlich allgemein mit

$$T_a F, \qquad T_b F, \qquad T_c F, \qquad T_d F$$

den bez. Teil einer jeden Funktion F, der von der Form A, B, C oder D ist und mit $T_e F$ den Teil, der sich aus den gewöhnlichen Gliedern zusammensetzt, so dass die Identität

$$F = T_a F + T_b F + T_c F + T_d F + T_e F$$

für jede Funktion erfüllt ist, die weder eine Constante noch einen secularen Teil enthält.

Hiernach zerlegt sich die obige Gleichung für S_2 in die beiden folgenden:

238) $$T_a \frac{dS}{dv} = -T_a Q_2 - \tfrac{1}{2}\frac{d\eta^2}{dv}$$

239) $$\frac{dS}{dv} = -Q_2,$$

wo in der letzteren die Glieder der Form A zu unterdrücken sind. Aus den Ausdrücken 165) und 177) für Q entnehmen wir, dass nur aus den vier Summen

$$\Sigma A^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 1}\,\eta\eta'\sin(nw+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \quad \text{und} \quad \Sigma A^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 1}\,\eta\eta'\sin(nw-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1)$$
$$\Sigma \bar{A}^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 1}\sin j\sin j'\sin(nw+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) \quad \text{und} \quad \Sigma \bar{A}^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 1}\sin j\sin j'\sin(nw-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1)$$

Glieder der Form A entstehen können, nämlich wenn $n = 0$. Da aber die Coefficienten $A^{(-1)}_{0\cdot 1\cdot 1}$, $\bar{A}^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 1}$ und $\bar{A}^{(-1)}_{0\cdot 1\cdot 1}$ gleich Null sind, so wird

240) $$T_a Q_2 = A^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 1}\,\eta\eta'\sin(\mathrm{v}-\mathrm{v}_1).$$

In Gleichung 239) hat man also zu setzen:

241) $$\begin{aligned} Q_2 = {} & \Sigma A_{n\cdot 2\cdot 0}\,\eta^2\sin nw & & + \Sigma \bar{A}_{n\cdot 2\cdot 0}\sin^2 j\sin nw \\ & + \Sigma A^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0}\,\eta^2\sin(nw+2\mathrm{v}) & & + \Sigma \bar{A}^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0}\sin^2 j\sin(nw+2\mathfrak{v}) \\ & + \Sigma A^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0}\,\eta^2\sin(nw-2\mathrm{v}) & & + \Sigma \bar{A}^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0}\sin^2 j\sin(nw-2\mathfrak{v}) \\ & + \Sigma A^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 1}\,\eta\eta'\sin(nw+\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) & & + \Sigma \bar{A}^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 1}\sin j\sin j'\sin(nw+\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1) \\ & + \Sigma A^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 1}\,\eta\eta'\sin(nw+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) & & + \Sigma \bar{A}^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 1}\sin j\sin j'\sin(nw+\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) \\ & + \Sigma A^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 1}\,\eta\eta'\sin(nw-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) & & + \Sigma \bar{A}^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 1}\sin j\sin j'\sin(nw-\mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1) \\ & + \Sigma A^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 1}\,\eta\eta'\sin(nw-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) & & + \Sigma \bar{A}^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 1}\sin j\sin j'\sin(nw-\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) \\ & + \Sigma A_{n\cdot 0\cdot 2}\,\eta'^2\sin nw & & + \Sigma \bar{A}_{n\cdot 0\cdot 2}\sin^2 j'\sin nw \\ & + \Sigma A^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 2}\,\eta'^2\sin(nw+2\mathrm{v}_1) & & + \Sigma \bar{A}^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 2}\sin^2 j'\sin(nw+2\mathfrak{v}_1) \\ & + \Sigma A^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 2}\,\eta'^2\sin(nw-2\mathrm{v}_1) & & + \Sigma \bar{A}^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 2}\sin^2 j'\sin(nw-2\mathfrak{v}_1), \end{aligned}$$

wo der Coefficient $A^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 1}$ zu unterdrücken ist.

Die Relationen, welche wir zur Integration dieses Ausdrucks brauchen, sind die folgenden:

$$242)\int\eta^2\sin nw\,dv = \eta^2\int\sin nw\,dv - \frac{d\eta^2}{dv}\iint\sin nw\,dv^2 \pm \cdots\cdot$$

$$\int\eta^2\sin(nw\pm 2\mathrm{v})\,dv = \eta^2\cos 2\Pi\int\sin(nw\pm 2v)\,dv \mp \eta^2\sin 2\Pi\int\cos(nw\pm 2v)\,dv$$
$$-\frac{d\eta^2\cos 2\Pi}{dv}\iint\sin(nw\pm 2v)\,dv^2 \pm \frac{d\eta^2\sin 2\Pi}{dv}\iint\cos(nw\pm 2v)\,dv^2$$
$$\pm\cdots\cdot$$

$$\int\eta\eta'\sin[nw\pm(\mathrm{v}+\mathrm{v}_1)]\,dv = \eta\eta'\cos(\Pi+\Pi_1)\int\sin(nw\pm 2v)\,dv \mp \eta\eta'\sin(\Pi+\Pi_1)\int\cos(nw\pm 2v)\,dv$$
$$-\frac{d\eta\eta'\cos(\Pi+\Pi_1)}{dv}\iint\sin(nw\pm 2v)\,dv^2 \pm \frac{d\eta\eta'\sin(\Pi+\Pi_1)}{dv}\iint\cos(nw\pm 2v)\,dv^2$$
$$\pm\cdots\cdot$$

$$\int\eta\eta'\sin[nw\pm(\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)]\,dv = \eta\eta'\cos(\Pi-\Pi_1)\int\sin nw\,dv \mp \eta\eta'\sin(\Pi-\Pi_1)\int\cos nw\,dv$$
$$-\frac{d\eta\eta'\cos(\Pi-\Pi_1)}{dv}\iint\sin nw\,dv^2 \pm \frac{d\eta\eta'\sin(\Pi-\Pi_1)}{dv}\iint\cos nw\,dv^2$$
$$\pm\cdots\cdot$$

u. s. w.,

von denen die beiden nicht angeführten mit dem Faktor η'^2 den beiden ersten vollständig analog sind und auch die mit den Faktoren $\sin j$ und $\sin j'$ sich leicht herstellen lassen; ausserdem sind die Relationen 222) heranzuziehen. Ich schreibe demnach:

$$243)\quad \begin{aligned} S_2 = {} & \Sigma S_{n\cdot 2\cdot 0}\,\eta^2\cos nw & & + \Sigma\bar{S}_{n\cdot 2\cdot 0}\sin^2 j\cos nw \\ & + \Sigma S^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0}\,\eta^2\cos(nw+2\mathrm{v}) & & + \Sigma\bar{S}^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0}\sin^2 j\cos(nw+2\mathfrak{v}) \\ & + \Sigma S^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0}\,\eta^2\cos(nw-2\mathrm{v}) & & + \Sigma\bar{S}^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0}\sin^2 j\cos(nw-2\mathfrak{v}) \\ & + \text{u. s. w.} \\ & + T_a S_2\,, \end{aligned}$$

welchen Ausdruck ich nicht ausgeschrieben habe wegen seiner völligen Analogie mit 241). Auch hier ist $S^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 1}$, wie $\bar{S}^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 1}$ gleich Null.

Man findet:

$$243\text{a})\quad S_{n\cdot 2\cdot 0} = \frac{A_{n\cdot 2\cdot 0}}{n(1-\mu_1)}\,,\quad S^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 1} = \frac{A^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 1}}{n(1-\mu_1)+2}\,,\quad S_{n\cdot 0\cdot 2} = \frac{A_{n\cdot 0\cdot 2}}{n(1-\mu_1)}$$

$$S^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0} = \frac{A^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0}}{n(1-\mu_1)+2}\,,\quad S^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 1} = \frac{A^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 1}}{n(1-\mu_1)}\,,\quad S^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 2} = \frac{A^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 2}}{n(1-\mu_1)+2}$$

$$S^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0} = \frac{A^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0}}{n(1-\mu_1)-2}\,,\quad S^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 1} = \frac{A^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 1}}{n(1-\mu_1)}\,,\quad S^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 2} = \frac{A^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 2}}{n(1-\mu_1)-2}$$

$$S^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 1} = \frac{A^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 1}}{n(1-\mu_1)-2}\,,$$

und ganz analog:

$$\bar{S}_{n\cdot 2\cdot 0} = \frac{\bar{A}_{n\cdot 2\cdot 0}}{n(1-\mu_1)}, \quad \text{u. s. w.}$$

Die Divisoren sind dieselben, wie in R_1, und S_2 wird also grosse Ungleichheiten enthalten bei den charakteristischen Planeten der ersten beiden Klassen, stets aber nur solche der Form C.

2. Für $T_a S_2$ haben wir nach 240) die Gleichung:

244) $$\frac{dT_a S_2}{dv} = -A^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 1}\eta\eta' \sin(\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) - \tfrac{1}{2}\frac{d\eta^2}{dv},$$

wo die Glieder rein zweiter Ordnung vernachlässigt sind, und wo wir $\frac{d\,T_a S_2}{dv}$ für $T_a\left(\frac{dS}{dv}\right)$ geschrieben haben, was offenbar hier zulässig ist.

Wenn wir die Gleichung 244) in der vorstehenden Form integriren würden, so würden wir in S Glieder von der Form A vorfinden, welche elementar sind. Gyldén hat aber schon gezeigt, dass $T_a S$ erster Ordnung ist, indem sich die elementaren Glieder in dieser Funktion gegenseitig aufheben. Wir werden uns hier darauf beschränken, diese Thatsache mit bezug auf die Glieder zweiten Grades zu beweisen, da Glieder dritten Grades von der Form A nicht vorkommen und wir die Glieder vierten Grades nicht entwickelt haben. Jedenfalls ist die Gleichung 244) zur Bestimmung von $T_a S$ ungeeignet, und wir wollen sie deswegen transformiren, indem wir das Glied $\frac{1}{2}\frac{d\eta^2}{dv}$ durch ein anderes ersetzen.

Wenn wir bezeichnen:

245) $$\begin{aligned} \lambda_1 &= \eta\cos\Pi \\ \lambda_2 &= \eta\sin\Pi, \end{aligned}$$

so wird:

$$(\varrho) = \eta\cos\mathrm{v} = \lambda_1\cos v + \lambda_2\sin v,$$

und

$$\frac{d(\varrho)}{dv} = -\eta\sin\mathrm{v} + \frac{d\lambda_1}{dv}\cos v + \frac{d\lambda_2}{dv}\sin v,$$

sowie

$$\frac{d^2(\varrho)}{dv^2} = -\eta\cos\mathrm{v} - 2\frac{d\lambda_1}{dv}\sin v + 2\frac{d\lambda_2}{dv}\cos v + \frac{d^2\lambda_1}{dv^2}\cos v + \frac{d^2\lambda_2}{dv^2}\sin v.$$

Hieraus folgt mit Vernachlässigung der Glieder rein zweiter Ordnung:

246) $$T_a\left\{\left[\frac{d^2(\varrho)}{dv^2} + (\varrho)\right]\frac{d(\varrho)}{dv}\right\} = \lambda_1\frac{d\lambda_1}{dv} + \lambda_2\frac{d\lambda_2}{dv} = \tfrac{1}{2}\frac{d(\lambda_1^2+\lambda_2^2)}{dv} = \tfrac{1}{2}\frac{d\eta^2}{dv}.$$

Das erste Glied dieser Relation können wir aber aus der Gleichung 184) construiren, und es findet sich:

$$T_0\left\{\left[\frac{d^2(\varrho)}{dv^2}+(\varrho)\right]\frac{d(\varrho)}{dv}\right\} = -Q_0\left(\frac{d(\varrho)}{dv}\right)^2+2S_1\frac{d(\varrho)}{dv}-P_1\frac{d(\varrho)}{dv},$$

wo ich die Glieder rein zweiter Ordnung, sowie alle, welche nicht von der Form A sind, fortgelassen habe.

Wenn man die Identität

$$S_1\frac{d(\varrho)}{dv} = \frac{d(\varrho)S_1}{dv}-(\varrho)\frac{dS_1}{dv}$$

bedenkt, sowie dass $Q_0\left(\frac{d(\varrho)}{dv}\right)^2$ keine Glieder der Form A enthält, und dass $T_0\frac{d(\varrho)S_1}{dv}$ rein zweiter Ordnung ist, so findet man:

247) $$\tfrac{1}{2}\frac{d\eta^2}{dv} = -T_0\left\{2(\varrho)\frac{dS_1}{dv}+P_1\frac{d(\varrho)}{dv}\right\} = T_0\left\{2(\varrho)Q_1-P_1\frac{d(\varrho)}{dv}\right\}.$$

Offenbar wird man für Q_1 und P_1 hier nur die Glieder von der Form B einzusetzen haben, da nur diese im Produkt mit (ϱ) oder $\frac{d(\varrho)}{dv}$ Glieder von der Form A liefern; man hat demnach nach 165) und 179) zu setzen

$$Q_1 = A^{(+1)}_{0\cdot0\cdot1}\,\eta'\sin \mathrm{v}_1, \qquad P_1 = B^{(+1)}_{0\cdot0\cdot1}\,\eta'\cos \mathrm{v}_1,$$

und wenn man sich erinnert, dass mit ausreichender Genauigkeit

$$\frac{d(\varrho)}{dv} = -\eta\sin \mathrm{v},$$

so wird:

248) $$\tfrac{1}{2}\frac{d\eta^2}{dv} = \left\{\tfrac{1}{2}B^{(+1)}_{0\cdot0\cdot1}-A^{(+1)}_{0\cdot0\cdot1}\right\}\eta\eta'\sin(\mathrm{v}-\mathrm{v}_1).$$

Diesen Wert endlich setzen wir in 244) ein und erhalten:

249) $$\frac{dT_0S_1}{dv} = \left\{A^{(+1)}_{0\cdot0\cdot1}-\tfrac{1}{2}B^{(+1)}_{0\cdot1\cdot1}-A^{(+1)}_{0\cdot1\cdot1}\right\}\eta\eta'\sin(\mathrm{v}-\mathrm{v}_1).$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass das Glied rechter Hand Null ist; wenn wir nämlich die dort auftretenden A- und B-Coefficienten durch die Relationen 166), 180), 135a), 138a) und 122) oder mit Hilfe von Masal's Tafeln und Formeln[1]) durch die γ-Coefficienten ausdrücken, so ist:

$$A^{(+1)}_{0\cdot0\cdot1} = -2\gamma_{1.1}, \qquad A^{(+1)}_{0\cdot1\cdot1} = -5\gamma_{1.1}-4\gamma_{1.2}$$
$$B^{(+1)}_{0\cdot0\cdot1} = 6\gamma_{1.1}+8\gamma_{1.2},$$

---

1) Masal, Formeln und Tafeln zur Berechnung der absoluten Störungen der Planeten. Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Band 23 N:o 7.

In dieser Abhandlung sind allerdings die Bezeichnungen nicht die gleichen wie in der vorliegenden.

und es wird

249a) $$T_n S_2 = 0.$$

Indessen hat diese Gleichung nur die Bedeutung, dass $T_n S_2$ erster Ordnung und bei den gewöhnlichen Planeten auch rein erster Ordnung ist; die Glieder rein erster Ordnung der Form A in S_2 können wir aber stets vernachlässigen, nicht nur ihrer ausserordentlichen Kleinheit, sondern auch ihrer Periode wegen.

3. Wir wollen nun die Glieder zweiten Grades im Radiusvektor berechnen. Mit Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung folgt für ϱ_2 aus Gleichung 184):

$$\frac{d^2\varrho}{dv^2} + \varrho = -Q_1 \frac{d(\varrho)}{dv} + 2S_2 - P_2,$$

und wenn wir bezeichnen:

250) $$\begin{aligned} \frac{d^2\varrho}{dv^2} + \varrho = {} & \Sigma b_{n\cdot 2\cdot 0}\, \eta^2 \cos nw & & + \Sigma \bar{b}_{n\cdot 2\cdot 0} \sin^2 j \cos nw \\ & + \Sigma b^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0}\, \eta^2 \cos (nw + 2v) & & + \Sigma \bar{b}^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0} \sin^2 j \cos (nw + 2v) \\ & + \Sigma b^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0}\, \eta^2 \cos (nw - 2v) & & + \Sigma \bar{b}^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0} \sin^2 j \cos (nw - 2v) \\ & + \text{u. s. w. in völliger Analogie mit 241)} \\ & + 2 T_n S_2, \end{aligned}$$

so haben die *b*-Coefficienten folgende Werte:

250a) $$\begin{aligned} b_{n\cdot 2\cdot 0} &= 2 S_{n\cdot 2\cdot 0} - B_{n\cdot 2\cdot 0} + \tfrac{1}{2} A^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0} - \tfrac{1}{2} A^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0} \\ b^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0} &= 2 S^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0} - B^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0} - \tfrac{1}{2} A^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0} \\ b^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0} &= 2 S^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0} - B^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0} + \tfrac{1}{2} A^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0} \\ b^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 1} &= 2 S^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 1} - B^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 1} - \tfrac{1}{2} A^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1} \\ b^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 1} &= 2 S^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 1} - B^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 1} - \tfrac{1}{2} A^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1}, \qquad \text{aber } b^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 1} = -B^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 1} - \tfrac{1}{2} A^{(-1)}_{0\cdot 0\cdot 1} \\ b^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 1} &= 2 S^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 1} - B^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 1} + \tfrac{1}{2} A^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1} \\ b^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 1} &= 2 S^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 1} - B^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 1} + \tfrac{1}{2} A^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1} \\ b_{n\cdot 0\cdot 2} &= 2 S_{n\cdot 0\cdot 2} - B_{n\cdot 0\cdot 2} \\ b^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 2} &= 2 S^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 2} - B^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 2} \\ b^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 2} &= 2 S^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 2} - B^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 2} \\ \bar{b}_{n\cdot 2\cdot 0} &= 2 \bar{S}_{n\cdot 2\cdot 0} - \bar{B}_{n\cdot 2\cdot 0} \end{aligned}$$

und für die weiteren Coefficienten in gleicher Weise:

$$\bar{b}^{(\pm\sigma)}_{n\cdot s\cdot s'} = 2 \bar{S}^{(\pm\sigma)}_{n\cdot s\cdot s'} - \bar{B}^{(\pm\sigma)}_{n\cdot s\cdot s'}$$

Die Integration der Gleichung 250) brauchen wir nicht so eingehend auszuführen, wie wir es für die Glieder nullten und ersten Grades gethan haben;

denn es kommen hier keine Glieder der Form B vor, und wir können im Anschluss an das Vorige die Grössen η, η', Π, Π_1, $\sin j$, $\sin j'$, σ und σ_1 bei der Integration als constant ausehen; wir erhalten so:

251) $$\begin{aligned} \varrho_2 = R_2 = & R_{n\cdot 2\cdot 0}\,\eta^2 \cos nw && + \bar{R}_{n\cdot 2\cdot 0} \sin^2 j \cos nw \\ & + R^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0}\,\eta^2 \cos(nw + 2v) && + \bar{R}^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0} \sin^2 j \cos(nw + 2v) \\ & + R^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0}\,\eta^2 \cos(nw - 2v) && + \bar{R}^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0} \sin^2 j \cos(nw - 2v) \\ & + \text{u. s. w. in völliger Analogie mit 241)} \\ & + T_n R_2, \end{aligned}$$

wo:

251a) $$R_{n\cdot 2\cdot 0} = \frac{b_{n\cdot 2\cdot 0}}{1 - n^2(1-\mu_1)^2}, \quad R^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 1} = \frac{b^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 1}}{1 - [n(1-\mu_1)+2]^2}, \quad R_{n\cdot 0\cdot 2} = \frac{b_{n\cdot 0\cdot 2}}{1 - n^2(1-\mu_1)^2}$$

$$R^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0} = \frac{b^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0}}{1 - [n(1-\mu_1)+2]^2}, \quad R^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 1} = \frac{b^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 1}}{1 - n^2(1-\mu_1)^2}, \quad R^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 2} = \frac{b^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 2}}{1 - [n(1-\mu_1)+2]^2}$$

$$R^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0} = \frac{b^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0}}{1 - [n(1-\mu_1)-2]^2}, \quad R^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 1} = \frac{b^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 1}}{1 - n^2(1-\mu_1)^2}, \quad R^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 2} = \frac{b^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 2}}{1 - [n(1-\mu_1)-2]^2}$$

$$R^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 1} = \frac{b^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 1}}{1 - [n(1-\mu_1)-2]^2},$$

$$\bar{R}_{n\cdot 2\cdot 0} = \frac{\bar{b}_{n\cdot 2\cdot 0}}{1 - n^2(1-\mu_1)^2},$$

u. s. w., indem die $\bar{R}$-Coefficienten von den $\bar{b}$-Coefficienten genau ebenso abhängen, wie die entsprechenden R-Coefficienten von den b-Coefficienten. Ausserdem hat man zu setzen:

$$R_{0\cdot 2\cdot 0} = R^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 1} = R^{(-1)}_{0\cdot 1\cdot 1} = R_{0\cdot 0\cdot 2} = \bar{R}_{0\cdot 2\cdot 0} = R^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 1} = \bar{R}^{(-1)}_{0\cdot 1\cdot 1} = \bar{R}_{0\cdot 0\cdot 2} = 0.$$

Von den in den vorstehenden Relationen vorkommenden Divisoren können die folgenden klein werden:

$$1 - n^2(1-\mu_1)^2 \qquad \text{und} \qquad 1 - [n(1-\mu_1) - 2]^2,$$

welche wieder zu Gliedern der Form D gehören. Sie sind klein zunächst bei den charakteristischen Planeten der ersten Klasse, und zwar

Ia. Für die Planeten vom Hekubatypus, wenn $n = 2$ und $n = 6$

Ib. „ „ „ Hildatypus, „ $n = 3$ „ $n = 9$

Ic. „ „ „ Thuletypus, „ $n = 4$ „ $n = 12$,

ferner aber auch für eine neue Klasse von Planeten, welche als charakteristische Planeten der dritten Klasse zu bezeichnen wären, nämlich:

IIIa.	Wenn μ_1 sich dem Bruche $\frac{1}{4}$ nähert,	und wenn	$n = 4$	
IIIb.	„ μ_1 „ „ „ $\frac{2}{5}$ „	„ „	$n = 5$	
IIIc.	„ μ_1 „ „ „ $\frac{4}{7}$ „	„ „	$n = 7$	
IIId.	„ μ_1 „ „ „ $\frac{5}{8}$ „	„ „	$n = 8$	
IIIe.	„ μ_1 „ „ „ $\frac{7}{10}$ „	„ „	$n = 10$	
IIIf.	„ μ_1 „ „ „ $\frac{8}{11}$ „	„ „	$n = 11.$	

Die charakteristischen Planeten der zweiten Klasse finden sich hier nicht wieder, indessen wird auch bei ihnen R_2 beträchtliche Glieder enthalten; diese werden nämlich durch die Funktion S_2 eingeführt, welche rechter Hand in der Differentialgleichung für R_2 vorkommt; sie werden durch die Integration dieser Gleichung nicht vergrössert, da sie von der Form C sind.

Für den Teil von R_2, der von der Form A ist, hat man offenbar:

$$\text{251b)}\quad T_n R_2 = b_{0\cdot2\cdot0}\,\eta^2 + b^{(+1)}_{0\cdot1\cdot1}\,\eta\eta'\cos(\Pi-\Pi_1) + b_{0\cdot0\cdot2}\,\eta'^2 + \bar{b}_{0\cdot2\cdot0}\sin^2 j + \bar{b}^{(+1)}_{0\cdot1\cdot1}\sin j\sin j'\cos(\sigma-\sigma_1) + \bar{b}_{0\cdot0\cdot2}\sin^2 j' + 2\,T_n S_2.$$

Die Funktion $T_n R_2$ enthält einen constanten Teil; denn es ist:

$$\begin{aligned} &\text{p. const. } \eta^2 = \Sigma x_n^2, &&\text{p. const. } \sin^2 j = \Sigma \sin^2 \iota_n \\ \text{251c)}\quad &\text{p. const. } \eta\eta'\cos(\Pi-\Pi_1) = \Sigma x_n x_n', &&\text{p. const. } \sin j \sin j' \cos(\sigma-\sigma_1) = \Sigma \sin\iota_n \sin\iota_n' \\ &\text{p. const. } \eta'^2 = \Sigma x_n'^2, &&\text{p. const. } \sin^2 j' = \Sigma \sin^2 \iota_n'. \end{aligned}$$

Dieser constante Teil ist zu der Constante b_0 zu schlagen und der Teil der beiden Constanten a_2 und b_0, welcher zweiten Grades ist, kann auf dieselbe Weise bestimmt werden, wie wir auf pag. 101 unter No. 3 den Teil nullten Grades bestimmt haben, sobald die Funktion W_2 bekannt ist, welche wir gleich herstellen werden; einstweilen haben wir:

$$\text{251d)}\quad \text{p. const. } R_2 = b_{0\cdot2\cdot0}\,\Sigma x_n^2 + b^{(+1)}_{0\cdot1\cdot1}\,\Sigma x_n x_n' + b_{0\cdot0\cdot2}\,\Sigma x_n'^2 + \bar{b}_{0\cdot2\cdot0}\,\Sigma\sin^2\iota_n + \bar{b}^{(+1)}_{0\cdot1\cdot1}\,\Sigma\sin\iota_n\sin\iota_n' + \bar{b}_{0\cdot0\cdot2}\,\Sigma\sin\iota_n'^2 + 2\text{ p. const. } S_2.$$

Die Funktion $T_n R_2$ können wir übrigens aus demselben Grunde fortlassen wie $T_n S_2$.

4. Wir wollen nun die Gleichung 185) mit bezug auf die Glieder zweiten Grades integriren; wenn wir nur diese beibehalten und die Glieder zweiter Ordnung vernachlässigen, so ist:

$$\text{252)}\quad \frac{dW}{dv} = S_2 - R_2 + \{6R_1 - 2S_1\}\eta\cos v - 3\eta^2 R_0 + \{\tfrac{3}{2}S_0 - 6R_0\}\eta^2\cos 2v - \frac{d\Xi_2}{dv}.$$

Setzen wir:

$$252a)\qquad \frac{dW}{dv} = \Sigma\, T_{n\cdot 2\cdot 0}\,\eta^2 \cos nw \qquad + \Sigma\, \bar{T}_{n\cdot 2\cdot 0} \sin^2 j \cos nw$$

$$+ \Sigma\, T^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 0}\,\eta^2 \cos(nw + 2v) \qquad + \Sigma\, \bar{T}^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 0} \sin^2 j \cos(nw + 2v)$$

$$+ \Sigma\, T^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 2}\,\eta^2 \cos(nw - 2v) \qquad + \Sigma\, \bar{T}^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 2} \sin^2 j \cos(nw - 2v)$$

+ u. s. w. in völliger Analogie mit 241)

$$+ T_0 \frac{dW}{dv} - \frac{d\Xi_2}{dv},$$

so leitet man aus den oben gefundenen Werten von S und R unschwer die folgenden Ausdrücke der T-Coefficienten ab:

$$252b)\qquad T_{n\cdot 2\cdot 0} = S_{n\cdot 2\cdot 0} - 2R_{n\cdot 2\cdot 0} + 3R^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0} + 3R^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0} - S^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0} - S^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0} - 3R_{n\cdot 0\cdot 0}$$

$$T^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0} = S^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0} - 2R^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 0} + 3R^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0} - S^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0} + \tfrac{3}{4} S_{n\cdot 0\cdot 0} - 3R_{n\cdot 0\cdot 0}$$

$$T^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 0} = S^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 0} - 2R^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 2} + 3R^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0} - S^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0} + \tfrac{3}{4} S_{n\cdot 0\cdot 0} - 3R_{n\cdot 0\cdot 0}$$

$$T^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 1} = S^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 1} - 2R^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 1} + 3R^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1} - S^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1}$$

$$T^{(+0)}_{n\cdot 1\cdot 1} = S^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 1} - 2R^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 1} + 3R^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1} - S^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1}$$

$$T^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 1} = S^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 1} - 2R^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0} + 3R^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1} - S^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1}$$

$$T^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 1} = S^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 1} - 2R^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 1} + 3R^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1} - S^{(-1)}_{n\cdot 0\cdot 1}$$

$$T_{n\cdot 0\cdot 2} = S_{n\cdot 0\cdot 0} - 2R_{n\cdot 0\cdot 0}$$

$$T^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 2} = S^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 0} - 2R^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 0}$$

$$T^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 2} = S^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 2} - 2R^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 2}$$

$$\bar{T}_{n\cdot 2\cdot 0} = \bar{S}_{n\cdot 2\cdot 0} - 2\bar{R}_{n\cdot 0\cdot 0};$$

und für die weiteren Coefficienten in ganz allgemeiner Weise:

$$\bar{T}^{(\pm\sigma)}_{n.s.s'} = \bar{S}^{(\pm\sigma)}_{n.s.s'} - 2\bar{R}^{(\pm\sigma)}_{n.s.s'}.$$

Dabei sind die Coefficienten

$$T_{0\cdot 0\cdot 0},\quad T^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 1},\quad T^{(-1)}_{2\cdot 1\cdot 1},\quad T_{0\cdot 0\cdot 1},\quad \bar{T}_{0\cdot 2\cdot 0},\quad \bar{T}^{(+1)}_{2\cdot 1\cdot 1},\quad \bar{T}^{(-1)}_{0\cdot 1\cdot 1},\quad \bar{T}_{0\cdot 0\cdot 2}$$

gleich Null zu setzen, und man hat ausserdem:

$$252c)\qquad T_0 \frac{dW}{dv} = T_0 S_0 - 2T_0 R_0 - S^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 0}\,\eta^2 - S^{(+1)}_{0\cdot 0\cdot 1}\,\eta\eta' \cos(\Pi - \Pi_1) - 3R_{0\cdot 0\cdot 0}\,\eta^2.$$

Ich setze nun auch W_2 unter die Form:

253) $$W_2 = \Sigma W_{n\cdot 2\cdot 0}\,\eta^2 \sin nw \qquad + \Sigma \overline{W}_{n\cdot 2\cdot 0} \sin j \sin nw$$
$$+ \Sigma W^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0}\,\eta^2 \sin(nw+2v) \qquad + \Sigma \overline{W}^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0} \sin^2 j \sin(nw+2v)$$
$$+ \Sigma W^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0}\,\eta^2 \sin(nw-2v) \qquad + \Sigma \overline{W}^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0} \sin^2 j \sin(nw-2v)$$
+ u. s. w. in völliger Analogie mit 241)
$$+ T_a W_2 - \Xi_2.$$

Die Herstellung der Ausdrücke für die W-Coefficienten macht nach dem Vorhergehenden auch keine Schwierigkeiten; man erhält:

253a) $$W_{n\cdot 2\cdot 0} = \frac{T_{n\cdot 2\cdot 0}}{n(1-\mu_1)}, \quad W^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 1} = \frac{T^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 1}}{n(1-\mu_1)+2}, \quad W_{n\cdot 0\cdot 2} = \frac{T_{n\cdot 0\cdot 2}}{n(1-\mu_1)},$$
$$W^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0} = \frac{T^{(+2)}_{n\cdot 2\cdot 0}}{n(1-\mu_1)+2}, \quad W^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 1} = \frac{T^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 1}}{n(1-\mu_1)}, \quad W^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 2} = \frac{T^{(+2)}_{n\cdot 0\cdot 2}}{n(1-\mu_1)+2},$$
$$W^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0} = \frac{T^{(-2)}_{n\cdot 2\cdot 0}}{n(1-\mu_1)-2}, \quad W^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 1} = \frac{T^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 1}}{n(1-\mu_1)}, \quad W^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 2} = \frac{T^{(-2)}_{n\cdot 0\cdot 2}}{n(1-\mu_1)-2},$$
$$W^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 1} = \frac{T^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 1}}{n(1-\mu_1)-2},$$
$$\overline{W}_{n\cdot 2\cdot 0} = \frac{\overline{T}_{n\cdot 2\cdot 0}}{n(1-\mu_1)},$$

u. s. w., indem die $\overline{W}$-Coefficienten von den $\overline{T}$-Coefficienten in derselben Weise abhängen, wie die W-Coefficienten von den T-Coefficienten. Die Divisoren sind hier dieselben wie in S_2.

Für die Funktion Ξ_2, welche wohl immer vernachlässigt werden kann, hat man nach 60) und 47)

253b) $$\Xi_2 = -\tfrac{3}{8}\frac{d\eta^2 \cos 2\Pi}{dv}\cos 2v - \tfrac{3}{8}\frac{d\eta^2 \sin 2\Pi}{dv}\sin 2v$$

5. Bei der Bestimmung der Funktion $T_a W_2$ endlich stösst man auf gewisse Schwierigkeiten; wenigstens erfordert eine vollständige Darstellung derselben eine sehr weitgehende Entwicklung. Nach 252c) und 251b) hat man:

254) $$T_a \frac{dW}{dv} = -\left\{3R_{0\cdot 0\cdot 0} + 2b_{0\cdot 2\cdot 0} + S^{(+1)}_{2\cdot 1\cdot 0}\right\}\eta^2 - \left\{2b^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 1} + S^{(+1)}_{0\cdot 0\cdot 1}\right\}\eta\eta' \cos(\Pi - \Pi_1) - 2b_{0\cdot 0\cdot 2}\eta'^2$$
$$-2\overline{b}_{0\cdot 2\cdot 0}\sin^2 j - 2\overline{b}^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 1}\sin j \sin j' \cos(\sigma - \sigma_1) - 2\overline{b}_{0\cdot 0\cdot 2}\sin^2 j'$$
$$-3T_a S_2$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist eine Grösse rein erster Ordnung, und zu ihrer Integration leitet man aus den Relationen 10), 75), und den entsprechenden 154b) und 171a) die folgenden ab:

$$255)\quad \int \eta^2 dv = \frac{2\varkappa\varkappa_1}{\varsigma-\varsigma_1}\sin(\omega-\omega_1)+\frac{2\varkappa\varkappa_2}{\varsigma-\varsigma_2}\sin(\omega-\omega_2)+\cdots\cdots$$
$$+\frac{2\varkappa_1\varkappa_2}{\varsigma_1-\varsigma_2}\sin(\omega_1-\omega_2)+\cdots\cdots$$
$$+\cdots\cdots$$

$$\int \eta\eta' \cos(\Pi-\Pi_1)\,dv = \frac{\varkappa\varkappa'}{\varsigma-\varsigma_1}\sin(\omega-\omega_1)+\frac{\varkappa\varkappa_2'}{\varsigma-\varsigma_2}\sin(\omega-\omega_2)+\cdots\cdots$$
$$+\frac{\varkappa_1\varkappa_2'+\varkappa_2\varkappa'}{\varsigma_1-\varsigma_2}\sin(\omega_1-\omega_2)+\cdots\cdots$$
$$+\cdots\cdots$$

$$\int \eta'^2 dv = \frac{2\varkappa'\varkappa_2'}{\varsigma_1-\varsigma_2}\sin(\omega_1-\omega_2)+\cdots\cdots$$
$$+\cdots\cdots$$

$$\int \sin^2 j\, dv = -\frac{2\sin\iota\sin\iota_1}{\tau-\tau_1}\sin(\vartheta-\vartheta_1)-\frac{2\sin\iota\sin\iota_2}{\tau-\tau_2}\sin(\vartheta-\vartheta_2)-\cdots\cdots$$
$$-\frac{2\sin\iota_1\sin\iota_2}{\tau_1-\tau_2}\sin(\vartheta_1-\vartheta_2)-\cdots\cdots$$
$$-\cdots\cdots$$

$$\int \sin j \sin j' \cos(\sigma-\sigma_1)\,dv = -\frac{\sin\iota\sin\iota'}{\tau-\tau_1}\sin(\vartheta-\vartheta_1)-\frac{\sin\iota\sin\iota_2'}{\tau-\tau_2}\sin(\vartheta-\vartheta_2)-\cdots\cdots$$
$$-\frac{\sin\iota_1\sin\iota_2'+\sin\iota_2\sin\iota'}{\tau_1-\tau_2}\sin(\vartheta_1-\vartheta_2)-\cdots\cdots$$
$$-\cdots\cdots$$

$$\int \sin^2 j'\, dv = -\frac{2\sin\iota'\sin\iota_2'}{\tau_1-\tau_2}\sin(\vartheta_1-\vartheta_2)-\cdots\cdots$$
$$-\cdots\cdots$$

In diesen Formeln sind indessen die secularen Teile fortgelassen, da wir sie besonders behandeln wollen. Sie ergeben sich nach den Formeln 251c).

Wenn wir alle elementaren Glieder in W_2 finden wollen, so müssen wir in der Gleichung 254) alle Glieder erster Ordnung berücksichtigen, und folglich in $T_0\left(\frac{dS}{dv}\right)_2$ alle Glieder zweiter Ordnung. Wir müssten also die Gleichung

$$T_0\left(\frac{dS}{dv}\right)_2 = -(1+3S)Q-\tfrac{1}{2}\frac{d\eta^2}{dv}-\tfrac{1}{2}S_{0\cdot0\cdot0}\frac{d\eta^2}{dv}$$

mit Berücksichtigung der Glieder zweiter Ordnung aufstellen. Diese Operation

hat nun allerdings keine principiellen Schwierigkeiten, jedoch ist die Anzahl dieser Glieder ausserordentlich gross, obwohl sie sich in wenige Argumente vereinigen, und vor Allem müssten dazu auch die Funktionen S_1 und R_1 bis zu den Gliedern zweiter Ordnung einschliesslich berechnet werden, was im Uebrigen nicht erforderlich ist.

Wir begnügen uns hier mit der Bemerkung, dass diese Glieder der Form A, welche in der Funktion W elementar sind, für unsere Zwecke, d. h. für die praktische Rechnung während eines Zeitraums von etwa 100 Jahren gänzlich belanglos sind, worauf ich noch später (Kapitel VIII) zurückkommen werde; sie sind mit den Gliedern rein erster Ordnung annähernd auf eine Stufe zu stellen.

Eine sehr ausführliche Berechnung dieser Glieder habe ich vor einigen Jahren für den Planeten Hestia ausgeführt, wodurch das eben Gesagte sich bestätigt fand. Man wird demnach nur bei den charakteristischen Planeten nötig haben, die Glieder der Form A zu berücksichtigen; bei denselben tritt der merkwürdige Umstand ein, dass diese Glieder, soweit sie elementar, also nullter Ordnung sind, ebenso belanglos sind, wie bei den gewöhnlichen Planeten, während sich in der Funktion W_2 Glieder erster (aber nicht rein erster) Ordnung vorfinden, die sehr merkliche Beträge erreichen, obwohl sie ursprünglich als Störungen dritter Ordnung auftreten. Das eben Gesagte habe ich für die Planeten vom Hestiatypus bewiesen, während Herr Ludendorff[1]) die sehr mühsame Beweisführung für die Planeten vom Hekubatypus mit dem gewünschten Erfolge durchgeführt hat. Da sich der von Herrn Ludendorff gegebene Beweis auf alle charakteristischen Planeten der ersten Klasse, und der von mir gegebene auf alle solchen der zweiten Klasse ausdehnen lässt, und ferner bei den charakteristischen Planeten der dritten und höheren Klassen die Glieder der Form A zweiten Grades sämmtlich rein erster Ordnung sind, so ist die Frage betreffs dieser Glieder, soweit sie in den Rahmen des vorliegenden Kapitels fällt, im Allgemeinen als gelöst anzusehen, und ich werde erst im nächsten Kapitel auf dieselbe zurückkommen.

Ich will nun nur noch den secularen Teil der Funktion W mit Berücksichtigung der Glieder zweiten Grades construiren. Derselbe findet sich nach 252c) folgendermaassen:

255a) $$\text{p. const.}\left(\frac{dW}{dv}\right)_2 = \text{p. const.}\, S_2 - 2\,\text{p. const.}\, R_2 - \left\{S^{(+1)}_{0\cdot1\cdot0} + 3R_{0\cdot0\cdot0}\right\}\Sigma x_n^2 - S^{(+1)}_{0\cdot0\cdot1}\,\Sigma x_n x_n'.$$

Da aber der constante Teil von $\frac{dW}{dv}$ gleich Null sein soll, so ist die rechte

1) Hans Ludendorff, Die Jupiter-Störungen der kleinen Planeten vom Hecuba-Typus. Inaugural-Dissertation. Berlin 1897.

Seite dieser Gleichung gleich Null zu setzen und aus ihr in Verbindung mit 251d) die constanten Teile von S_2 und R_2 zu bestimmen.

6. Die Gleichung 186) giebt uns für die Glieder zweiten Grades:

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2}+\mathfrak{z} = -Q_1\frac{d(\mathfrak{z})}{dv}-Z_2.$$

Da mit genügender Annäherung

$$\frac{d(\mathfrak{z})}{dv} = \sin j\cos\mathfrak{v},$$

so wird:

$$256)\ \frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2}+\mathfrak{z} = \Sigma c^{(+2)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}\,\eta\sin j\sin(nw+\mathfrak{v}+\mathrm{v}) \quad +\Sigma c^{(+2)}_{n\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1}\,\eta'\sin j\sin(nw+\mathfrak{v}+\mathrm{v}_1)$$
$$+\Sigma c^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}\,\eta\sin j\sin(nw+\mathfrak{v}-\mathrm{v}) \quad +\Sigma c^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1}\,\eta'\sin j\sin(nw+\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1)$$
$$+\Sigma c^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}\,\eta\sin j\sin(nw-\mathfrak{v}+\mathrm{v}) \quad +\Sigma c^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1}\,\eta'\sin j\sin(nw-\mathfrak{v}+\mathrm{v}_1)$$
$$+\Sigma c^{(-2)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}\,\eta\sin j\sin(nw-\mathfrak{v}-\mathrm{v}) \quad +\Sigma c^{(-2)}_{n\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1}\,\eta'\sin j\sin(nw-\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1)$$
$$+\Sigma c^{(+2)}_{n\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0}\,\eta\sin j'\sin(nw+\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}) \quad +\Sigma c^{(+2)}_{n\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1}\,\eta'\sin j'\sin(nw+\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}_1)$$
$$+\Sigma c^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0}\,\eta\sin j'\sin(nw+\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}) \quad +\Sigma c^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1}\,\eta'\sin j'\sin(nw+\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1)$$
$$+\Sigma c^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0}\,\eta\sin j'\sin(nw-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}) \quad +\Sigma c^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1}\,\eta'\sin j'\sin(nw-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}_1)$$
$$+\Sigma c^{(-2)}_{n\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0}\,\eta\sin j'\sin(nw-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}) \quad +\Sigma c^{(-2)}_{n\cdot0\cdot1\cdot0\cdot1}\,\eta'\sin j'\sin(nw-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1),$$

wo

$$256a)\quad c^{(+2)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0} = C^{(+2)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}-\tfrac{1}{2}A^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0}, \qquad c^{(+2)}_{n\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1} = C^{(+2)}_{n\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1}-\tfrac{1}{2}A^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1}$$
$$c^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0} = C^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}-\tfrac{1}{2}A^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0}, \qquad c^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1} = C^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1}-\tfrac{1}{2}A^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1}$$
$$c^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0} = C^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}-\tfrac{1}{2}A^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0}, \qquad c^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1} = C^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1}-\tfrac{1}{2}A^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1}$$
$$c^{(-2)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0} = C^{(-2)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}-\tfrac{1}{2}A^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0}, \qquad c^{(-2)}_{n\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1} = C^{(-2)}_{n\cdot1\cdot0\cdot0\cdot1}-\tfrac{1}{2}A^{(-2)}_{n\cdot0\cdot1}$$
$$c^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0} = C^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1\cdot1\cdot0}$$

u. s. w. Die weiteren c-Coefficienten sind gleich den entsprechenden C-Coefficienten.

Die Integration der Gleichung 256) erfolgt in derselben Weise wie die der Gleichung 250), indem man η, η', $\sin j$, $\sin j'$, Π, Π_1, σ und σ_1 als constant ansieht. Setzt man

$$257)\quad \mathfrak{z}_2 = \mathfrak{Z}_2 = \Sigma Z^{(+2)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}\,\eta\sin j\sin(nw+\mathfrak{v}+\mathrm{v})$$
$$+\Sigma Z^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}\,\eta\sin j\sin(nw+\mathfrak{v}-\mathrm{v})$$
$$+\Sigma Z^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}\,\eta\sin j\sin(nw-\mathfrak{v}+\mathrm{v})$$
$$+\Sigma Z^{(-2)}_{n\cdot1\cdot0\cdot1\cdot0}\,\eta\sin j\sin(nw-\mathfrak{v}-\mathrm{v})$$

+ u. s. w. in völliger Analogie mit 256),

so wird offenbar:

257a) $$Z^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 0\cdot 1\cdot 0} = \frac{c^{(+2)}_{n\cdot 1\cdot 0\cdot 1\cdot 0}}{1-[n(1-\mu^1)+2]^2}, \qquad Z^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0\cdot 1\cdot 0} = \frac{c^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0\cdot 1\cdot 0}}{1-n^2(1-\mu_1)^2}$$

$$Z^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0\cdot 1\cdot 0} = \frac{c^{(-1)}_{n\cdot 1\cdot 0\cdot 1\cdot 0}}{1-n^2(1-\mu_1)^2}, \qquad Z^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 0\cdot 1\cdot 0} = \frac{c^{(-2)}_{n\cdot 1\cdot 0\cdot 1\cdot 0}}{1-[n(1-\mu_1)-2]^2},$$

und überhaupt

$$Z^{(+2)}_{n\cdot\sigma\cdot\sigma'\cdot s\cdot s'} = \frac{c^{(+2)}_{n\cdot\sigma\cdot\sigma'\cdot s\cdot s'}}{1-[n(1-\mu_1)+2]^2}, \qquad Z^{(+1)}_{n\cdot\sigma\cdot\sigma'\cdot s\cdot s'} = \frac{c^{(+1)}_{n\cdot\sigma\cdot\sigma'\cdot s\cdot s'}}{1-n^2(1-\mu_1)^2},$$

$$Z^{(-1)}_{n\cdot\sigma\cdot\sigma'\cdot s\cdot s'} = \frac{c^{(-1)}_{n\cdot\sigma\cdot\sigma'\cdot s\cdot s'}}{1-n^2(1-\mu_1)^2}, \qquad Z^{(-2)}_{n\cdot\sigma\cdot\sigma'\cdot s\cdot s'} = \frac{c^{(-2)}_{n\cdot\sigma\cdot\sigma'\cdot s\cdot s'}}{1-[n(1-\mu_1)-2]^2}.$$

In $\mathfrak{Z}_2$ werden sich merkliche Glieder finden in denselben Fällen, wie in R_2, mit dem einzigen Unterschiede, dass $\mathfrak{Z}_2$ keine beträchtlichen Glieder der Form C enthält.

Nur bei sehr grossen Neigungen wird man einen wesentlichen Teil der Funktion $\mathfrak{Z}_2$ mitzunehmen haben.

§ 5.

Die Glieder höherer Grade.

1. Zum Schlusse dieses Kapitels erübrigt es noch, einige Worte zu sagen über etwaige Rücksichtnahme auf Glieder höheren als zweiten Grades, sowie Gründe dafür beizubringen, warum wir unsere Untersuchungen gerade bei den Gliedern zweiten Grades abgebrochen haben.

Bei den Gliedern nullten Grades ist der Faktor von v in den Argumenten sehr genähert

$$n(1-\mu_2),$$

und die Divisoren in S und W sind

$$n(1-\mu_1),$$

und endlich die Divisoren in R

$$n(1-\mu_1)+1 \qquad \text{und} \qquad n(1-\mu_1)-1.$$

Bei den Gliedern ersten Grades sind:

die Faktoren von v: $n(1-\mu_2)+1$ und $n(1-\mu_2)-1$

die Divisoren in S und W: $n(1-\mu_1)+1$ und $n(1-\mu_1)-1$

„ „ in R: $n(1-\mu_1)$, $n(1-\mu_1)+2$, $n(1-\mu_1)-2$.

Bei den Gliedern zweiten Grades sind:

die Faktoren von v: $n(1-\mu_2)$, $n(1-\mu_2)+2$, $n(1-\mu_2)-2$

die Divisoren in S und W: $n(1-\mu_1)$, $n(1-\mu_1)+2$, $n(1-\mu_1)-2$

" " in R: $n(1-\mu_1)+1$, $n(1-\mu_1)-1$, $n(1-\mu_1)+3$, $n(1-\mu_1)-3$.

Diese Reihe ist unschwer fortzusetzen, und man zieht daraus die folgenden Schlüsse:

Die Glieder der Form B sind ersten, dritten u. s. w. Grades, also stets von einem ungeraden Grade; die Glieder der Form A sind zweiten, vierten u. s. w. Grades, also stets von einem geraden Grade, mindestens jedoch vom zweiten; constante und seculare (d. h. von der Form constans mal v) Glieder sind ebenfalls stets von einem geraden Grade, können aber auch nullten Grades sein; und zwar gilt das eben Gesagte für alle Planeten ohne Rücksicht auf den Wert ihrer mittleren Bewegung.

Glieder der Formen C und D kommen nur bei den charakteristischen Planeten vor, und zwar bei den charakteristischen Planeten der ersten Klasse:

die Glieder der Form D bei allen Graden vom nullten an,

" " " " C " " " " ersten an,

bei den charakteristischen Planeten der zweiten Klasse:

die Glieder der Form D bei allen ungeraden Graden vom ersten an,

" " " " C " " geraden Graden vom zweiten an.

Im allgemeinen lautet das Gesetz folgendermaassen, wenn k die Klassenzahl des Planeten bedeutet:

Ist k eine ungerade Zahl, so kommen Glieder der Form D bei allen geraden Graden vom $(k-1)$ten an, und Glieder der Form C bei allen ungeraden Graden vom k-ten an vor; ausserdem aber finden sich Glieder aller beiden Formen bei jedem Grade vom $(2k-1)$ten an.

Ist k eine gerade Zahl, so kommen Glieder der Form D nur bei allen ungeraden Graden vom $(k-1)$ten an, und Glieder der Form C nur bei allen geraden Graden vom k-ten an vor.

2. Wenn wir von den charakteristischen Planeten der dritten und der höheren Klassen absehen, so zeigt sich in der That bei den Gliedern zweiten Grades ein gewisser Abschnitt, indem die Glieder höheren als zweiten Grades, soweit sie merklich gross sind, keine neuen Argumente aufweisen, die wesentlich verschieden (mit Bezug auf ihre Periode) sind von denen der niederen Grade, so dass man einerseits die Glieder der geraden Grade und andererseits die der ungeraden Grade unter sich als stark genug fallende Reihen ansehen kann.

Die gewöhnlichen Glieder dritten Grades sind in fast allen Fällen sehr klein; und auch die elementaren und charakteristischen Gliedor nehmen an Grösse mit ihrem Grade und mit der Klassenzahl des Planeten ab; handelt es sich z. B. um einen Planeten der dritten Klasse, so wird man nur bei ganz besonders starker Annäherung an die strenge Commensurabilität einige wenige Glieder höheren als zweiten Grades berücksichtigen müssen, hauptsächlich solche der Form C. Denn je höher die Klasse ist, der ein charakteristischer Planet angehört, um so mehr muss das Verhältniss der mittleren Bewegungen sich der strengen Commensurabilität nähern, damit die betreffenden Glieder merklich werden. Commensurabilitäten höherer Klassen haben darum keine solche Bedeutung wie die der niederen. (Vgl. Kap. VIII.)

Unter Umständen ist die Mitnahme des einen oder anderen Gliedes dritten Grades noch zu empfehlen, nicht etwa in der Entwicklung der Störungsfunktion, wohl aber in der Differentialgleichung 185) für W, wo Glieder wie die folgenden

$$R_2\,\eta\cos\mathrm{v}, \qquad \eta^2 R_1, \qquad R_1\,\eta^2\cos 2\mathrm{v},$$

einen gewissen noch merklichen Betrag erreichen können.

Ob noch in vereinzelten sonstigen Fällen die Mitnahme einiger Glieder dritten Grades (also auch in der Entwicklung der Störungsfunktion) angebracht ist, hängt im Einzelnen von den Beträgen der Excentricitäts- und Neigungsmoduln ab, und es lassen sich darüber keine einfachen allgemeinen Regeln aufstellen.

Siebentes Kapitel.

Die charakteristischen Planeten.

§ 1.

Die Glieder nullten Grades.

1. Die Gleichungen 183) bis 186) sollen nun integrirt werden für den Fall, dass es sich um einen charakteristischen Planeten handle und dass also in der ersten Annäherung bereits die Störungen zweiter (eventuell auch höherer) Ordnung berücksichtigt werden müssen. Ich werde hierbei auch Gelegenheit nehmen, von den Fällen sogenannter strenger Commensurabilität zu sprechen und zu zeigen, wie die Integrationen für jeden beliebigen Wert der mittleren Bewegung auszuführen sind.

Bei der Herstellung der Glieder nullten Grades handelt es sich nur um die charakteristischen Planeten der ersten Klasse, da die übrigen nach den Formeln des vorigen Kapitels berechnet werden können.

Ich will zunächst die Planeten vom Hecubatypus besprechen, für welche das Verhältnis μ nahe gleich $\frac{1}{2}$ ist. Wie wir oben gesehen haben, ist S_0 rein erster Ordnung; dagegen wird R_0 ein grosses Glied enthalten, das offenbar das Argument $2w$ hat. Ich setze darum den Teil von R_0, welcher nicht rein erster Ordnung ist, unter die Form[1]):

258) $$\text{pars}\, R_0 = \beta_1 \cos 2w,$$

wo der Coefficient β_1 vorläufig unbekannt ist. Ich will durchweg die griechischen Buchstaben für alle solchen Coefficienten anwenden, welche zwar erster, aber nicht rein erster Ordnung sind, also kleine Divisoren enthalten.

Die Gleichungen 188), 193) und 205) bestehen auch hier, und zwar giebt uns die letztere für den wesentlichsten Teil von W_0, d. h. für den Teil, der wesentlich grösser ist als die störende Masse:

$$\text{pars}\frac{dW}{dv} = -2\beta_1 \cos 2w,$$

oder integrirt:

259) $$\text{pars}\ W_0 = -\frac{\beta_1}{1-\mu_1}\sin 2w,$$

woraus

259a) $$\text{pars}\, K_0 = -\frac{\beta_1}{1-\mu_1}\sin 2w$$
$$V_0 = 0.$$

2. Wenn man die so gefundenen Teile von R_0 und K_0 in 188) einsetzt, nur die Glieder mit dem Argument $2w$ beibehält, und alle Glieder rein zweiter, sowie die dritter Ordnung bei Seite lässt, so wird:

$$\text{pars}\frac{dS}{dv} = -\left\{A_{2\cdot0\cdot0} + \left[\tfrac{1}{2}A^{1\cdot0}_{4\cdot0\cdot0} - \frac{2\mu}{1-\mu_1}A_{4\cdot0\cdot0}\right]\beta_1\right\}\sin 2w.$$

Diesen Ausdruck integriren wir nach der Formel 190) und stellen S_0 wieder durch die Entwicklung 191) dar; dann ist, wenn man bedenkt, dass $V_0 = 0$:

260) $$S_{2\cdot0\cdot0} = \frac{A_{2\cdot0\cdot0}}{2(1-\mu_1)} + \left[\frac{A^{1\cdot0}_{4\cdot0\cdot0}}{4(1-\mu_1)} - \frac{\mu A_{4\cdot0\cdot0}}{(1-\mu_1)^2}\right]\beta_1.$$

Wir haben also den Coefficienten $S_{2\cdot0\cdot0}$ mit Einschluss der Glieder zweiter Ordnung, jedoch mit Ausschluss derjenigen rein zweiter Ordnung hergestellt. Aller-

1) Durch die vorgesetzte Bezeichnung „pars" soll angedeutet werden, dass nur ein Teil der betreffenden Funktion gemeint ist.

dings ist der Coefficient β_1 noch immer unbekannt; wir werden ihn gleich bestimmen.

3. Wenn wir nämlich in der Gleichung 193) die Glieder rein zweiter, sowie die dritter Ordnung fortlassen, so ist:

261)
$$\frac{d^2R}{dv^2}+R = -Q_0\left(\frac{dR}{dv}\right)_0+2S_0-P_0$$
$$= -\Sigma A_{n\cdot 0\cdot 0}\left(\frac{dR}{dv}\right)_0 \sin nw+2\Sigma S_{n\cdot 0\cdot 0}\cos nw$$
$$-\Sigma B_{n\cdot 0\cdot 0}\cos nw-\Sigma B^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0}R_0\cos nw-\Sigma n\mu B_{n\cdot 0\cdot 0}K_0\sin nw.$$

Die Differentiation der Relation 258) giebt uns aber mit derselben Genauigkeit:

$$\text{pars}\left(\frac{dR}{dv}\right)_0 = -2(1-\mu_1)\beta_1\sin 2w,$$

und wenn wir diesen Wert, sowie die Werte 258), 259a) und 260) in die vorstehende Gleichung substituiren und nur die Glieder mit dem Argument $2w$ beibehalten, so wird:

262)
$$\text{pars}\left\{\frac{d^2R}{dv^2}+R\right\} = b_{2\cdot 0\cdot 0}\cos 2w,$$

wo

262a)
$$b_{2\cdot 0\cdot 0} = p_1+p_1'\beta_1$$

und

262b)
$$p_1 = \frac{A_{2\cdot 0\cdot 0}}{1-\mu_1}-B_{2\cdot 0\cdot 0}$$
$$p_1' = (1-\mu_1)A_{4\cdot 0\cdot 0}+\frac{A^{1\cdot 0}_{4\cdot 0\cdot 0}}{2(1-\mu_1)}-\frac{2\mu A_{4\cdot 0\cdot 0}}{(1-\mu_1)^2}-B^{1\cdot 0}_{0\cdot 0\cdot 0}-\tfrac{1}{2}B^{1\cdot 0}_{4\cdot 0\cdot 0}+\frac{2\mu B_{4\cdot 0\cdot 0}}{1-\mu_1}.$$

Diese beiden letzteren Coefficienten können ohne Weiteres berechnet werden, wenn auch noch nicht streng, da die Constanten α, μ nnd μ_1 noch nicht genau bekannt sind. Zur Integration der Gleichung 262) erinnert man sich der Relation 197) und ihres Integrals, und man wird schreiben:

$$\text{pars}\,R_0 = g_1\sin v-g_2\cos v$$

263)
$$\frac{dg_1}{dv} = \tfrac{1}{2}b_{2\cdot 0\cdot 0}\cos(2w+v)+\tfrac{1}{2}b_{2\cdot 0\cdot 0}\cos(2w-v)$$
$$\frac{dg_1}{dv} = \tfrac{1}{2}b_{2\cdot 0\cdot 0}\sin(2w+v)-\tfrac{1}{2}b_{2\cdot 0\cdot 0}\sin(2w-v).$$

Ich will nun setzen:

264) $$\mu = \frac{1-\delta}{2}, \qquad \mu_1 = \frac{1-\delta_1}{2},$$

wonach also die Grössen δ und δ_1 als klein anzusehen sind. Nach den Relationen 210) und indem wir c_0 gleich Null annehmen, besteht zwischen ihnen die wichtige Beziehung:

265) $$\delta_1 = \delta - 2\mu\gamma.$$

Nur bei den kritischen Planeten, d. h. bei denen, deren mittlere Bewegung sich ganz besonders stark einem commensurablen Verhältniss nähert, dürfen wir γ nicht gleich Null annehmen, wie sich gleich zeigen wird. Da unsere Formeln auch für diese Planeten gelten sollen, so behalten wir es bei.

Man hat also:

265a) $$2(1-\mu_1) = 1+\delta_1, \quad 2(1-\mu_1)+1 = 2+\delta_1, \quad 2(1-\mu_1)-1 = \delta_1.$$

Integriren wir die Gleichungen 263) nach den Formeln 201), so wird:

$$g_1 = \tfrac{1}{2}\frac{b_{2\cdot 0\cdot 0}}{2+\delta_1}\sin(2w+v)+\tfrac{1}{2}\frac{b_{2\cdot 0\cdot 0}}{\delta_1}\sin(2w-v)$$

$$g_2 = -\tfrac{1}{2}\frac{b_{2\cdot 0\cdot 0}}{2+\delta_1}\cos(2w+v)+\tfrac{1}{2}\frac{b_{2\cdot 0\cdot 0}}{\delta_1}\cos(2w-v),$$

woraus man erhält:

266) $$\beta_1 = \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{2+\delta_1}-\frac{1}{\delta_1}\right]b_{2\cdot 0\cdot 0} = -\frac{b_{2\cdot 0\cdot 0}}{2\delta_1+\delta_1^2},$$

und mit Rücksicht auf den Ausdruck 262a) für $b_{2\cdot 0\cdot 0}$ ergiebt sich folgende Gleichung für den Coefficienten β_1

267) $$(2\delta_1+\delta_1^2+p_1')\beta_1 = -p_1,$$

aus welcher β_1 berechnet werden kann, sobald δ_1 genau genug bekannt ist; ist das letztere nicht der Fall, was wohl nur bei den kritischen Planeten vorkommen kann, so wird man sich ein Täfelchen rechnen, das β_1 für verschiedene Werte von δ_1 giebt, und aus dem man später den richtigen Wert interpoliren kann.

4. Im Falle nun, dass δ_1 gleich Null wäre, würde β_1 sehr gross und zwar nullter Ordnung werden, und im Falle der Ausdruck $2\delta_1+\delta_1^2+p_1'$ verschwände, wäre β_1 unendlich. Aus diesem Grunde hat man geschlossen, dass unser Integrationsverfahren für die kritischen Planeten unbrauchbar wäre; Gyldén hat ebenso wie Herr Harzer complicirtere Integrationsmethoden aufgestellt, um dieser Schwierigkeit aus dem Wege zu gehen. Ich habe aber schon in den Astronomischen Nachrichten[1]) gezeigt, dass solche Werte von δ_1 garnicht vor-

1) No. 3346.

kommen können, und dass also eine strenge oder äusserst genäherte Commensurabilität zwischen den mittleren Bewegungen des störenden und des gestörten Körpers überhaupt ausgeschlossen ist. δ_1 ist immer gross im Verhältniss zur störenden Masse. Den Beweis hierfür will ich jetzt im Einzelnen geben und dazu zunächst den Ausdruck der Constanten γ mit Hilfe der Gleichung 205) aufstellen. Diejenigen constanten Glieder auf der rechten Seite dieser Gleichung, welche rein erster Ordnung sind, haben wir zu c_0 geschlagen und mit dieser Grösse zum Verschwinden gebracht. Es wird also

268) $$\gamma = \tfrac{3}{2}\beta_1^2,$$

wo die Glieder vierter Ordnung sowie die zweiten Grades fortgelassen sind; denn γ enthält nur Glieder gerader Grade und offenbar auch nur solche gerader Ordnungen. Hiermit wird:

269) $$\delta_1 = \delta - 3\mu\beta_1^2.$$

Bisher haben wir zwei Arten von mittleren Bewegungen (n und n_1) eingeführt, die bei allen nicht kritischen Planeten als identisch angesehen werden können; denn es ist:

270) $$\frac{2n'}{n} = 2\mu = 1-\delta$$
$$\frac{2n'}{n_1} = 2\mu_1 = 1-\delta_1.$$

Wir wollen uns die Bedeutung dieser Constanten klar machen. n ist offenbar diejenige Grösse, welche als Integrationsconstante auftritt, so dass δ jeden beliebigen reellen noch so kleinen positiven oder negativen Wert, die Null eingeschlossen, annehmen kann. Ich will darum n die „Bewegungsconstante" und n_1 die (wahre) „mittlere Bewegung" nennen; nur die letztere tritt in unseren Divisoren auf.

Man wird aber noch von einer dritten Constante n_2 zu sprechen haben; ich habe nämlich bereits in den Gleichungen 153) und 161a) den secularen Teil von W wie folgt bezeichnet (da $c_0 = 0$):

$$\text{p. sec. } W = \bar{\gamma}v, \qquad \bar{\gamma} = \gamma+\gamma_0,$$

und die Relation

$$\mu_2 = \mu(1+\bar{\gamma})$$

eingeführt. Aus der Gleichung 155) für das Argument w_1:

$$w_1 = (1-\mu)v - B - \mu W + W' + \mathrm{H} - \mathrm{H}'$$

folgt, dass derjenige Teil dieses Argumentes, ebenso wie der des Argumentes w,

der der Länge v proportional, also secular ist, der folgende sein wird

$$\text{p. sec } w = \text{p. sec. } w_1 = (1-\mu-\mu\bar{\gamma})v = (1-\mu_1)v,$$

wo ich die kleinen Grössen c und c' fortgelassen habe.

Setzt man in Analogie mit den Relationen 270) und 264):

271) $$\frac{n'}{n_1} = \mu_1 \qquad \text{und} \qquad \mu_1 = \frac{1-\delta_1}{2},$$

so gelten die Beziehungen:

272) $$n_1 = \frac{n}{1+\bar{\gamma}}$$
$$\delta_1 = \delta - 2\mu\bar{\gamma} = \delta_1 - 2\mu\gamma_0.$$

Ist die Grösse δ_0 äusserst nahe resp. streng gleich Null, so tritt der Fall ein, den man Libration genannt hat, und der sich ebenfalls nach unserer Methode ohne wesentliche Schwierigkeiten behandeln lässt. Aus diesem Grunde will ich n_1 die „mittlere Bewegung in Länge“ nennen, da solche Relationen zwischen den mittleren Längen, wie sie sich z. B. bei den Jupitersmonden zeigen, von ihrem Werte abhängen.

Es mag hier wiederholt werden, dass γ_0 mindestens zweiten Grades ist und sowohl positiv wie negativ sein kann; γ ist stets positiv und bei den charakteristischen Planeten der ersten Klasse nullten Grades, bei allen übrigen aber mindestens vom zweiten Grade.

5. Wir wollen jetzt die Gleichungen 267) und 269) betrachten. Wenn wir die Grösse δ_1 sich der Null nähern lassen, so wird nach 267) β_1 unaufhörlich wachsen, dagegen nach 269) sich der Null oder doch einer ausserordentlich kleinen Grösse nähern; man kann hieraus schon schliessen, dass es für β_1 eine obere und für δ_1 eine untere Grenze giebt, die diese Grössen nicht überschreiten können.

Wenn wir den Wert 269) für δ_1 in die Gleichung 267) einsetzen und δ_1^2 gegen δ_1 vernachlässigen, so findet sich die Relation:

273) $$\beta_1^3 + p\beta_1 + q = 0,$$

wo

$$p = -\frac{2\delta + p_1'}{6\mu} \qquad q = -\frac{p_1}{6\mu}.$$

Aus derselben lässt sich β_1 für jeden beliebigen Wert von δ berechnen, und zwar zeigt ein Blick, dass der Maximalwert von β_1 von der Ordnung der **Kubikwurzel** aus der störenden Masse ist. Die Relation 269) dient zur Berechnung des entsprechenden Wertes von δ_1; der kleinste Wert, den δ_1 annehmen kann, ist von der Ordnung der Kubikwurzel aus dem Quadrat der störenden Masse.

Zur numerischen Lösung der Gleichung 273) hat man die folgenden drei Fälle zu unterscheiden:

I. Wenn

a) $$1 + \frac{4}{27}\frac{p^3}{q^2} > 0$$

ist, so hat die Gleichung nur eine reelle Wurzel. Durch Einführung der numerischen Werte für p_1 und p_1' habe ich gefunden, dass die Bedingung a) den folgenden Bedingungen gleichbedeutend ist:

a$_1$) $$\delta < +0.0147 \qquad n < 607''.2.$$

Dieser Fall entspricht aber allen negativen Werten von δ, dem Werte Null (der strengen Commensurabilität) und allen positiven Werten, welche kleiner als 0.0147 sind, und man hat dementsprechend in diesen Fällen

$$\beta_1 \text{ negativ und } |\beta_1| < 0.122$$
$$\delta_1 \text{ negativ und } |\delta_1| > 0.0082$$
$$n_1 < 593''.3.$$

II. Wenn

b) $$1 + \frac{4}{27}\frac{p^3}{q^2} = 0,$$

so hat die Gleichung drei reelle Wurzeln, von denen zwei einander gleich sind; die Bedingung b) entspricht den folgenden:

b$_1$) $$\delta = +0.0147 \qquad n = 607''.2,$$

und ich fand die entsprechenden Werte

$$\beta_1 = -0.122 \quad \text{und} \quad = +0.061$$
$$\delta_1 = -0.0082 \quad \text{und} \quad = +0.0091$$
$$n_1 = 593''.3 \quad \text{und} \quad = 603''.8.$$

III. Wenn

c) $$1 + \frac{4}{27}\frac{p^3}{q^2} < 0,$$

so hat die Gleichung drei verschiedene reelle Wurzeln, von denen wir aber zwei verwerfen müssen, da sie zu unbrauchbaren Resultaten führen, wenn δ wächst. Man hat in diesem Fall

c$_1$) $$\delta > +0.0147 \quad \text{und} \quad n > 607''.2,$$

und ferner

$$\beta_1 \text{ positiv und } |\beta_1| < 0.061$$

$$\delta_1 \text{ positiv und } |\delta_1| > 0.0091$$

$$n_1 > 603''.8.$$

Ich gebe im Folgenden eine kleine Tafel wieder, die ich bereits in den Astronomischen Nachrichten mitgeteilt habe, und die die Werte von δ_1, n_1 und β_1 für n und δ als Argument giebt, wie sie aus den Gleichungen 269) und 267) folgen:

Tabelle I.

$\log \delta$	n	$\log \delta_1$	n_1	$\log \beta_1$
8.60_n	575".4	8.61_n	575".0	8.32_n
8.40_n	583.6	8.42_n	582.8	8.50_n
8.20_n	588.9	8.28_n	587.2	8.66_n
8.00_n	592.3	8.18_n	589.4	8.76_n
7.00_n	597.7	8.05_n	591.6	8.92_n
$-\infty$	598.3	8.03_n	591.8	8.93_n
7.00	598.9	8.02_n	592.1	8.94_n
8.00	604.2	7.94_n	593.1	9.05_n
8.15	606.8	7.93_n	593.2	9.08_n
8.1670	607.2	7.92_n	593.3	9.09_n
		7.96	603.8	8.79
8.20	607.9	8.10	605.9	8.67
8.40	613.7	8.38	612.9	8.41
8.60	623.1	8.60	623.1	8.19

wo den Logarithmen selbstverständlich -10 anzuhängen ist.

Die Maximalwerte, welche β_1 seinem absoluten Betrage nach annehmen kann, werden also $+0.061$ und -0.122 sein, während δ_1, absolut genommen, nicht unter die Grenzen -0.0082 und $+0.0091$ heruntersinken kann. Die Werte der mittleren Bewegung n_1, welche zwischen 593".3 und 603".8 liegen, können nicht vorkommen, und es zeigt sich eine sehr ausgeprägte Lücke im System der kleinen Planeten für das Commensurabilitätsverhältniss $\frac{1}{2}$, eine Thatsache, die durch die Beobachtungen bestätigt wird. n_1 ist eine unstetige Funktion von n, und es darf nicht vergessen werden, dass n_1 nicht unmittelbar mit der elliptischen osculirenden Bewegung verglichen werden kann, und dass wir nur die Glieder nullten Grades in Rücksicht gezogen haben. Aus diesem Grunde kann die von uns gefundene Lücke nicht identisch sein mit derjenigen, welche sich aus den osculirenden Elementen des Berliner Jahrbuchs ergiebt. Wenn wir auf die Glieder höheren Grades Rücksicht nehmen, so erweitert sie sich.

Hat die Constante n genau den der Bedingung b) entsprechenden Wert, also

ungefähr 607".2, so lässt das Problem zwei Lösungen zu, und der Planet befände sich gewissermassen in einem labilen Zustande.

Hiermit ist bewiesen, dass unsere Integrationsmethode (zunächst mit bezug auf die Glieder nullten Grades) stets zu brauchbaren Resultaten führt, wie nahe auch das Verhältniss der mittleren Bewegungen (oder nach unserer Bezeichnungsweise der Bewegungsconstanten) einem streng commensurablen Verhältniss kommen möge, und die angewandte Methode dürfte wohl die einfachste sein, die man mit den gegenwärtigen Hilfsmitteln der Mathematik aufstellen kann.

6. Eines möchte ich noch hinzufügen, nämlich dass es uns hiermit gelungen ist, einen interessanten Specialfall des Dreikörperproblems in aller Strenge zu lösen; nämlich den Fall, in welchem störender und gestörter Körper sich in derselben Ebene bewegen und die Excentricitätsmoduln beider, sowie die Masse des gestörten Körpers gleich Null sind. In diesem Falle beschreibt der störende Körper eine Kreisbahn, der gestörte Körper jedoch eine Bahn, welche (bei Annäherung des Verhältnisses der mittleren Bewegungen an einen commensurablen Bruch) genähert als eine Ellipse mit der eventuell recht beträchtlichen Excentricität β_1 und der starken Apsidenbewegung δ_1 angesehen werden kann. Diese Apsidenbewegung ist retrograd, wenn δ_1 positiv, n also grösser als 607".2 ist. Nähert sich die Masse des störenden Körpers der Null, so nähert sich die Bahn des gestörten Körpers selbstredend der Kreisbahn.

7. Ich will nun den Begriff der kritischen Planeten strenger definiren, und solche Planeten kritische nennen, für welche die Constante γ numerisch grösser ist als eine Grösse rein erster Ordnung; für sie ist der Coefficient β_1 seiner Grössenordnung nach grösser als die Wurzel aus der störenden Masse, und δ_1 kleiner als dieselbe. Für alle nicht kritischen Planeten kann γ zu c_0 gezogen und annullirt werden, so dass $\mu_1 = \mu$ und $\delta_1 = \delta$ wird. Unter den bis jetzt entdeckten Planeten des Hecubatypus scheint sich kein kritischer zu befinden; dagegen hat es den Anschein, als ob die meisten Planeten des Hildatypus zu diesen zählen, von denen wir nun sprechen werden.

Die Hauptaufgabe bei der Berechnung der kritischen Planeten ist die Bestimmung der Constanten δ_1, welche sich ohne grosse Schwierigkeiten aus osculirenden elliptischen Elementen findet. Auf diese Operation im gegenwärtigen Teile dieser Arbeit einzugehen, würde uns zu weit führen.

8. Wir wollen nun die Planeten vom Hildatypus betrachten, für welche μ nahe gleich $\frac{2}{3}$ ist. Hierbei kann ich mich kurz fassen, da das Verfahren ganz analog dem eben auseinandergesetzten ist. Derjenige Teil von R_0, welcher gross ist im Verhältniss zur störenden Masse, hängt hier offenbar vom Argument $3w$ ab, und ich setze dementsprechend

274) $$\text{pars } R_0 = \beta_1 \cos 3w,$$

woraus man ableitet

275) $$\text{pars}\, K_0 = -\frac{2\beta_1}{3(1-\mu_1)} \sin 3w.$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die Gleichung 188) und wenn man dieselbe integrirt, so wird der vom Argument $3w$ abhängige Coefficient in S_0

276) $$S_{3\cdot 0\cdot 0} = \frac{A_{3\cdot 0\cdot 0}}{3(1-\mu_1)} + \left[\frac{A^{1\cdot 0}_{0\cdot 0\cdot 0}}{6(1-\mu_1)} - \frac{2\mu A_{0\cdot 0\cdot 0}}{3(1-\mu_1)^2}\right]\beta_1.$$

Wenn man weiter den Ausdruck

$$\text{pars}\left(\frac{dR}{dv}\right)_0 = -3(1-\mu_1)\beta_1 \sin 3w$$

berücksichtigt, so hat man aus der Gleichung 193)

277) $$\text{pars}\left\{\frac{d^2 R}{dv^2} + R\right\} = \{p_1 + p_1' \beta_1\} \cos 3w,$$

wo

277a) $$p_1 = \frac{2A_{0\cdot 0\cdot 0}}{3(1-\mu_1)} - B_{0\cdot 0\cdot 0}$$

$$p_1' = \frac{3}{2}(1-\mu_1) A_{0\cdot 0\cdot 0} + \frac{A^{1\cdot 0}_{0\cdot 0\cdot 0}}{3(1-\mu_1)} - \frac{4\mu A_{0\cdot 0\cdot 0}}{3(1-\mu_1)^2} - B^{1\cdot 0}_{0\cdot 0\cdot 0} - \frac{1}{2} B^{1\cdot 0}_{0\cdot 0\cdot 0} + \frac{3\mu B_{0\cdot 0\cdot 0}}{1-\mu_1}.$$

Bezeichnet man:

278) $$\mu = \frac{2-\delta}{3} \quad \text{und} \quad \mu_1 = \frac{2-\delta_1}{3},$$

so besteht zwischen δ und δ_1 die Relation:

279) $$\delta_1 = \delta - 3\mu\gamma,$$

und es ist

$$3(1-\mu_1) = 1+\delta_1 \qquad 3(1-\mu_1)+1 = 2+\delta_1 \qquad 3(1-\mu_1)-1 = \delta_1.$$

Für β_1 hat man also die Gleichung:

280) $$(2\delta_1 + \delta_1^2 + p_1')\beta_1 = -p_1,$$

und für γ wieder:

281) $$\gamma = \frac{3}{2}\beta_1^2,$$

also

282) $$\delta_1 = \delta - \frac{9}{2}\mu\beta_1^2.$$

Wenn wir diesen Wert von δ_1 in 280) einführen, und δ_1^2 fortlassen, so kommt

283) $$\beta_1^3 + p\beta_1 + q = 0,$$

wo

$$p = -\frac{2\delta + p_1'}{9\mu}, \qquad q = -\frac{p_1}{9\mu},$$

und diese Gleichung discutiren wir wie 273). Mit Berücksichtigung der numerischen Werte von p_1 und p_1' (die ich hier indessen nur genähert berechnet habe) können wieder drei Fälle eintreten:

a) $$1 + \frac{4}{27}\frac{p^3}{q^2} > 0.$$

Die Gleichung hat eine reelle Wurzel, und es ist:

$$\delta < +0.0257 \qquad n < 454''.5$$
$$\beta_1 \text{ negativ und } |\beta_1| < 0.124$$
$$\delta_1 \text{ negativ und } |\delta_1| > 0.0217$$
$$n_1 < 443''.8$$

b) $$1 + \frac{4}{27}\frac{p^3}{q^2} = 0.$$

Die Gleichung hat drei reelle Wurzeln, von denen zwei einander gleich sind, und es ist:

$$\delta = +0.0257 \qquad n = 454''.5$$
$$\beta_1 = -0.124 \text{ und } = +0.062$$
$$\delta_1 = -0.0217 \text{ und } = +0.0140$$
$$n_1 = 443''.8 \text{ und } = 451''.9.$$

c) $$1 + \frac{4}{27}\frac{p^3}{q^2} < 0.$$

Die Gleichung hat drei verschiedene reelle Wurzeln, von denen zwei zu verwerfen sind, und es ist:

$$\delta > +0.0257 \qquad n > 454''.5$$
$$\beta_1 \text{ positiv und } |\beta_1| < 0.062$$
$$\delta_1 \text{ positiv und } |\delta_1| > 0.0140$$
$$n_1 > 451''.9.$$

Ich gebe wieder eine kleine Tafel, die β_1, δ_1 und n_1 als Funktion von δ resp. n giebt, und die ich auch schon in den Astronomischen Nachrichten veröffentlicht habe:

Tabelle II.

$\log \delta$	n	$\log \delta_1$	n_1	δ_1
8.41_n	443″.0	8.48_n	442″.0	8.75_n
8.00_n	446.5	8.44_n	442.6	8.88_n
7.00_n	448.5	8.40_n	443.1	8.95_n
$-\infty$	448.7	8.40_n	443.1	8.96_n
7.00	448.9	8.38_n	443.4	8.96_n
8.00	451.0	8.34_n	443.8	9.01_n
8.4099	454.5	8.34_n	443.8	9.09_n
		8.15	451.9	8.79
8.45	455.1	8.34	453.7	8.67
8.50	455 9	8.43	454.8	8.60
8 60	457.8	8.57	457.2	8.49

wo den Logarithmen selbstverständlich -10 anzuhängen ist.

Die Lücke umfasst hier die Werte der mittleren Bewegung von 443″.8 bis 451″.9; mit Berücksichtigung der Glieder höherer Grade erweitert auch sie sich.

9. Man kann übrigens schon in der ersten Annäherung die Glieder dritter und selbst vierter Ordnung mitnehmen; die Gleichungen 273) und 283) würden dritten Grades bleiben, und bis zu den Gliedern dritter Ordnung sind unsere Entwicklungen der Funktionen P und Q ausgeführt. Erst wenn man die Glieder fünfter Ordnung, also in γ diejenigen vierter Ordnung berücksichtigt, werden diese Gleichungen fünften Grades; streng lauten sie folgendermaassen:

$$284)\qquad (2\delta_1+\delta_1^2)\beta_1 = p_1+p_1'\beta_1+p_1''\beta_1^2+p_1'''\beta_1^3+\cdots\cdots.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung bildet eine convergente Reihe, da das Verhältnis $\frac{p_1^{(n)}}{p_1^{(n-1)}}$ die Einheit als Grenze hat, und der Coefficient β_1 wesentlich kleiner als Eins ist. Es fragt sich nur, ob für praktische Zwecke die numerische Convergenz der ersten Glieder stark genug ist, damit man die Reihe mit ihnen abbrechen kann. Für die Planeten vom Hecubatypus ist genähert:

$$\log p_1 = 7.13-10 \qquad \log p_1' = 7.63_n-10,$$

und für diejenigen vom Hildatypus

$$\log p_1 = 7.46-10 \qquad \log p_1' = 8.26_n-10.$$

Die p-Coefficienten nehmen also nicht unbeträchtlich zu, und für die grösseren Werte von β_1 wird man unter Umständen gut thun, die Reihe nicht zu früh abzubrechen. Schwierigkeiten stellen sich der Berechnung der p-Coefficienten nicht in den Weg. Die letzteren werden noch stärker wachsen für die Planeten

vom Thuletypus, für dieselben habe ich die numerischen Rechnungen nicht ausgeführt.

10. Nachdem β_1 bekannt ist, können wir auch die Funktion W_0 berechnen, was genähert schon durch die Formel 259a) geschehen. Indessen müssen in W_0 auch die Glieder zweiter Ordnung berücksichtigt werden, welche nicht rein erster Ordnung sind. Man erhält leicht aus 185), wenn wir als Beispiel die Planeten vom Hecubatypus wählen,

$$\text{pars}\,\frac{dW}{dv} = -2R_0 + 3R_0^2 = \gamma - 2\beta_1 \cos 2w + \tfrac{3}{2}\beta_1^2 \cos 4w.$$

Wenn wir also setzen

$$\text{pars}\,W_0 = \gamma v + \gamma_1 \cos 2w + W_{4.0.0} \cos 4w,$$

so wird:

$$\gamma_1 = -\frac{\beta_1}{1-\mu_1}, \qquad W_{4.0.0} = \frac{3\beta_1^2}{8(1-\mu_1)},$$

und γ ist aus dem Vorigen bekannt.

11. Die Berechnung derjenigen Glieder nullten Grades, welche rein erster Ordnung sind, also der gewöhnlichen Glieder, bietet offenbar nicht die geringsten Schwierigkeiten; sie erfolgt nach den im vorigen Kapitel gegebenen Formeln, und man kann dabei, nachdem β_1 bekannt ist, auch gleich die wichtigeren Glieder zweiter Ordnung mit berücksichtigen, was indessen meist überflüssig sein dürfte.

§ 2.

Die Glieder ersten Grades.

1. Unter den Gliedern ersten Grades finden sich merkliche bei den charakteristischen Planeten der beiden ersten Klassen. Wir wollen zunächst die der ersten Klasse betrachten und als Beispiel wieder diejenigen vom Hecubatypus wählen.

Die Argumente der Glieder ersten Grades sind die folgenden:

$$nw \pm \mathrm{v} \qquad \text{und} \qquad nw \pm \mathrm{v}_1.$$

Der Faktor von v ist also nahe:

$$n(1-\mu) \pm 1,$$

und für μ nahe gleich $\frac{1}{2}$ werden diese Glieder von der Form C sein für $n = 2$, und von der Form D für $n = 4$ (wie bereits im vorigen Kapitel gezeigt wurde). Die ersteren haben also die Argumente:

$$2w - \mathrm{v} \qquad \text{und} \qquad 2w - \mathrm{v}_1,$$

und die letzteren:

$$4w-\mathrm{v} \qquad \text{und} \qquad 4w-\mathrm{v}_1.$$

Wir merken uns die Beziehungen:

$$2(1-\mu_1) = 1+\delta_1 \qquad 2(1-\mu_1)-1 = \delta_1 \qquad 4(1-\mu_1)-1 = 1+2\delta_1.$$

Die Funktion S_1 wird zwei merkliche Glieder der Form C enthalten, die wir, wie folgt, ansetzen können:

285) $$\text{pars } S_1 = \alpha_2\eta\cos(2w-\mathrm{v})+\alpha_3\eta'\cos(2w-\mathrm{v}_1).$$

In der Funktion R_1 werden sich diese Glieder ebenfalls vorfinden, da S auf der rechten Seite der Gleichung 184) steht, diese rechte Seite also nicht rein erster Ordnung ist; ausserdem enthält R_1 die Glieder von der Form D. Wir schreiben demnach:

286) $$\text{pars } R = \beta_1\cos 2w+\beta_2\eta\cos(2w-\mathrm{v})+\beta_3\eta'\cos(2w-\mathrm{v}_1)$$
$$+\beta_4\eta\cos(4w-\mathrm{v})+\beta_5\eta'\cos(4w-\mathrm{v}_1),$$

wo ich auch des Glied nullten Grades, das aus dem Vorigen bekannt ist, wieder hingeschrieben habe.

Die Gleichung 184) giebt mit Vernachlässigung aller Glieder zweiter und rein erster Ordnung:

$$T_c\left\{\frac{d^2R}{dv^2}+R\right\}_1 = 2T_cS_1 = 2\alpha_2\eta\cos(2w-\mathrm{v})+2\alpha_3\eta'\cos(2w-\mathrm{v}_1).$$

Da aber hier offenbar $\frac{d^2R}{dv^2}$ rein erster Ordnung (oder vielmehr noch kleiner) ist, so wird:

$$T_cR_1 = 2T_cS_1,$$

und wir haben die Beziehungen:

287) $$\alpha_2 = \tfrac{1}{2}\beta_2, \qquad \alpha_3 = \tfrac{1}{2}\beta_3,$$

welche also mit Vernachlässigung der Glieder zweiter und der rein erster Ordnung gelten.

Mit derselben Genauigkeit wird aber 185):

$$\text{pars}\frac{dW}{dv} = -2R_0+S_1-2R_1+6R_0\eta\cos\mathrm{v}$$
$$= -2\beta_1\cos 2w+(\alpha_2-2\beta_2+3\beta_1)\eta\cos(2w-\mathrm{v})+(\alpha_3-2\beta_3)\eta'\cos(2w-\mathrm{v}_1)$$
$$-2\beta_4\eta\cos(4w-\mathrm{v}) \qquad -2\beta_5\eta'\cos(4w-\mathrm{v}_1)$$
$$+3\beta_1\eta\cos(2w+\mathrm{v}).$$

Wir berücksichtigen nun, dass wir (Kapitel V.) W so zerlegen wollen, dass die gewöhnlichen Glieder, sowie die der Form D zu K und die der Form C zu V kommen; ich setze dementsprechend:

288) $\text{pars}(K_0+K_1) = \gamma_1 \sin 2w + \gamma_4\, \eta \sin(4w-\text{v}) + \gamma_5\, \eta' \sin(4w-\text{v}_1) + \gamma_6\, \eta \sin(2w+\text{v})$

289) $\text{pars}\left(\frac{dV}{dv}\right)_1 = \gamma_2\, \eta \cos(2w-\text{v}) + \gamma_3\, \eta' \cos(2w-\text{v}_1).$

Es wird dann offenbar, wenn wir die Integration über die Glieder der Form D ausführen:

$$\gamma_1 = -\frac{2\beta_1}{1+\delta_1}, \qquad \gamma_4 = -\frac{2\beta_4}{1+2\delta_1}, \qquad \gamma_5 = -\frac{2\beta_5}{1+2\delta_1}, \qquad \gamma_6 = \frac{3\beta_6}{2+\delta_1},$$

oder mit ausreichender Genauigkeit:

290) $\gamma_1 = -2\beta_1, \qquad \gamma_4 = -2\beta_4, \qquad \gamma_5 = -2\beta_5, \qquad \gamma_6 = \frac{3}{2}\beta_6,$

und mit Rücksicht auf 287)

290a) $\gamma_2 = -\frac{3}{2}\beta_2 + 3\beta_1, \qquad \gamma_3 = -\frac{3}{2}\beta_3.$

2. Wir haben jetzt die α- und die γ-Coefficienten, also den wesentlichsten Teil der Funktionen S und W ausgedrückt durch die in R vorkommenden β-Coefficienten, und wir können nun zur Integration der Gleichungen 183) und der folgenden übergehen. Mit Fortlassung der Glieder zweiten Grades und derjenigen dritter sowie der rein zweiter Ordnung können wir die Gleichung 183) wie folgt schreiben:

$$\frac{dS}{dv} = -Q_0 - Q_1 - 3S_1 Q_0,$$

und mittels der Entwicklung der Funktion Q haben wir:

291) $$\begin{aligned}\frac{dS}{dv} = & -\Sigma A_{n\cdot0\cdot0} \sin nw - \Sigma A^{1\cdot0}_{n\cdot0\cdot0} R_1 \sin nw + \Sigma n\mu A_{n\cdot0\cdot0} K_1 \cos nw - 3\Sigma A_{n\cdot0\cdot0} S_1 \sin nw \\ & - \Sigma A^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0}\, \eta \sin(nw+\text{v}) - \Sigma A^{+1\cdot1\cdot0}_{n\cdot1\cdot0} R_0\, \eta \sin(nw+\text{v}) + \Sigma n\mu A^{(+1)}_{n\cdot1\cdot0} K_0 \cos(nw+\text{v}) \\ & - \Sigma A^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0}\, \eta \sin(nw-\text{v}) - \Sigma A^{-1\cdot1\cdot0}_{n\cdot1\cdot0} R_0\, \eta \sin(nw-\text{v}) + \Sigma n\mu A^{(-1)}_{n\cdot1\cdot0} K_0 \cos(nw-\text{v}) \\ & - \Sigma A^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1}\, \eta' \sin(nw+\text{v}_1) - \Sigma A^{+1\cdot1\cdot0}_{n\cdot0\cdot1} R_0\, \eta' \sin(nw+\text{v}_1) + \Sigma n\mu A^{(+1)}_{n\cdot0\cdot1} K_0 \cos(nw+\text{v}_1) \\ & - \Sigma A^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1}\, \eta' \sin(nw-\text{v}_1) - \Sigma A^{-1\cdot1\cdot0}_{n\cdot0\cdot1} R_0\, \eta' \sin(nw-\text{v}_1) + \Sigma n\mu A^{(-1)}_{n\cdot0\cdot1} K_0 \cos(nw-\text{v}_1).\end{aligned}$$

Wir integriren diese Gleichung und behalten im Integrale nur die Glieder mit Argumenten einer der charakteristischen Formen:

$$2w-\text{v}, \qquad 2w-\text{v}_1, \qquad 4w-\text{v}, \qquad 4w-\text{v}_1,$$

oder der elementaren Formen

$$\mathrm{v} \quad \text{und} \quad \mathrm{v}_1$$

bei.

Ich habe in der Gleichung 291) die Glieder nullten Grades beibehalten, soweit sie erster Ordnung sind, da durch ihre Integration Glieder ersten Grades entstehen; es ist nämlich nach 190)

$$A_{n\cdot 0\cdot 0}\left(\int \sin nw\, dv\right)_1 = \frac{\mu A_{n\cdot 0\cdot 0}}{1-\mu_1}\int\left(\frac{dV}{dv}\right)_1 \sin nw\, dv\,,$$

und diesen Wert müssen wir für das erste Glied rechter Hand der Gleichung 291) einsetzen; und zwar erhält man mit Rücksicht auf 289) und 290a):

$$\begin{aligned}\text{pars}\,\Sigma A_{n\cdot 0\cdot 0}\int \sin nw\, dv = {} & \tfrac{3}{4}\frac{\mu}{1-\mu_1}A_{2\cdot 0\cdot 0}(2\beta_1-\beta_2)\int \eta \sin \mathrm{v}\, dv - \tfrac{3}{4}\frac{\mu}{1-\mu_1}A_{2\cdot 0\cdot 0}\beta_2\int \eta' \sin \mathrm{v}_1\, dv \\ & + \tfrac{3}{4}\frac{\mu}{1-\mu_1}A_{2\cdot 0\cdot 0}(2\beta_1-\beta_0)\int \eta \sin(4w-\mathrm{v})\, dv - \tfrac{3}{4}\frac{\mu}{1-\mu_1}A_{2\cdot 0\cdot 0}\beta_2\int \eta' \sin(4w-\mathrm{v}_1)\, dv.\end{aligned}$$

Ferner findet man mit Hilfe der Werte von R_1, K_1 und S_1:

$$\begin{aligned}\text{pars}\,\Sigma A^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0} R_1 \sin nw \; = {} & \left\{\tfrac{1}{2}A^{1\cdot 0}_{2\cdot 0\cdot 0}\beta_2 + \tfrac{1}{2}A^{1\cdot 0}_{4\cdot 0\cdot 0}\beta_4\right\}\eta \sin \mathrm{v} + \left\{\tfrac{1}{2}A^{1\cdot 0}_{2\cdot 0\cdot 0}\beta_0 + \tfrac{1}{2}A^{1\cdot 0}_{4\cdot 0\cdot 0}\beta_2\right\}\eta' \sin \mathrm{v}_1 \\ & - \tfrac{1}{2}A^{1\cdot 0}_{2\cdot 0\cdot 0}\beta_4\, \eta \sin(2w-\mathrm{v}) - \tfrac{1}{2}A^{1\cdot 0}_{2\cdot 0\cdot 0}\beta_2\, \eta' \sin(2w-\mathrm{v}_1) \\ & + \tfrac{1}{2}A^{1\cdot 0}_{2\cdot 0\cdot 0}\beta_2\, \eta \sin(4w-\mathrm{v}) + \tfrac{1}{2}A^{1\cdot 0}_{2\cdot 0\cdot 0}\beta_0\, \eta' \sin(4w-\mathrm{v}_1) \\ \text{pars}\,\Sigma n\mu A_{n\cdot 0\cdot 0} K_1 \cos nw = {} & \left\{4\mu A_{4\cdot 0\cdot 0}\beta_4 + \tfrac{3}{2}\mu A_{2\cdot 0\cdot 0}\beta_1\right\}\eta \sin \mathrm{v} + 4\mu A_{4\cdot 0\cdot 0}\beta_0\, \eta' \sin \mathrm{v}_1 \\ & - \left\{2\mu A_{2\cdot 0\cdot 0}\beta_4 + 3\mu A_{4\cdot 0\cdot 0}\beta_1\right\}\eta \sin(2w-\mathrm{v}) - 2\mu A_{2\cdot 0\cdot 0}\beta_2\, \eta' \sin(2w-\mathrm{v}_1) \\ & - \tfrac{3}{2}\mu A_{6\cdot 0\cdot 0}\beta_1\, \eta \sin(4w-\mathrm{v}) \\ \text{pars}\,\Sigma A_{n\cdot 0\cdot 0} S_1 \sin nw \; = {} & \tfrac{1}{4}A_{2\cdot 0\cdot 0}\beta_0\, \eta \sin \mathrm{v} + \tfrac{1}{4}A_{2\cdot 0\cdot 0}\beta_2\, \eta' \sin \mathrm{v}_1 \\ & + \tfrac{1}{4}A_{0\cdot 0\cdot 0}\beta_2\, \eta \sin(4w-\mathrm{v}) + \tfrac{1}{4}A_{2\cdot 0\cdot 0}\beta_2\, \eta' \sin(4w-\mathrm{v}_1).\end{aligned}$$

Weiter haben wir unter den Gliedern erster Ordnung in 291) die folgenden zu berücksichtigen:

$$A^{(+1)}_{0\cdot 0\cdot 1}\eta' \sin \mathrm{v}_1, \qquad A^{(-1)}_{2\cdot 1\cdot 0}\eta \sin(2w-\mathrm{v}), \qquad A^{(-1)}_{2\cdot 0\cdot 1}\eta' \sin(2w-\mathrm{v}_1),$$
$$A^{(-1)}_{6\cdot 1\cdot 0}\eta \sin(4w-\mathrm{v}), \qquad A^{(-1)}_{4\cdot 0\cdot 1}\eta' \sin(4w-\mathrm{v}_1).$$

Endlich geben die mit R_0 multiplicirten Glieder den folgenden Teil:

$$\begin{aligned} & -\left\{\tfrac{1}{2}A^{+1\cdot 1\cdot 0}_{0\cdot 1\cdot 0} - \tfrac{1}{2}A^{-1\cdot 1\cdot 0}_{2\cdot 1\cdot 0}\right\}\beta_1\, \eta \sin \mathrm{v} - \left\{\tfrac{1}{2}A^{+1\cdot 1\cdot 0}_{2\cdot 0\cdot 1} - \tfrac{1}{2}A^{-1\cdot 1\cdot 0}_{2\cdot 0\cdot 1}\right\}\beta_1\, \eta' \sin \mathrm{v}_1 \\ & - \tfrac{1}{2}A^{-1\cdot 1\cdot 0}_{4\cdot 1\cdot 0}\beta_1\, \eta \sin(2w-\mathrm{v}) + \left\{\tfrac{1}{2}A^{+1\cdot 1\cdot 0}_{0\cdot 0\cdot 1} - \tfrac{1}{2}A^{-1\cdot 1\cdot 0}_{4\cdot 0\cdot 1}\right\}\beta_1\, \eta' \sin(2w-\mathrm{v}_1) \\ & - \left\{\tfrac{1}{2}A^{-1\cdot 1\cdot 0}_{2\cdot 1\cdot 0} + \tfrac{1}{2}A^{-1\cdot 1\cdot 0}_{6\cdot 1\cdot 0}\right\}\beta_1\, \eta \sin(4w-\mathrm{v}) - \left\{\tfrac{1}{2}A^{-1\cdot 1\cdot 0}_{2\cdot 0\cdot 1} + \tfrac{1}{2}A^{-1\cdot 1\cdot 0}_{6\cdot 0\cdot 1}\right\}\beta_1\, \eta' \sin(4w-\mathrm{v}_1),\end{aligned}$$

und die mit K_0 multiplicirten den folgenden:

$$+\{2\mu A^{(+1)}_{2\cdot1\cdot0}-2\mu A^{(-1)}_{2\cdot1\cdot0}\}\beta_1\,\eta\sin\mathrm{v}+\{2\mu A^{(+1)}_{2\cdot0\cdot1}-2\mu A^{(-1)}_{2\cdot0\cdot1}\}\beta_1\,\eta'\sin\mathrm{v}_1$$

$$+4\mu A^{(-1)}_{2\cdot1\cdot0}\beta_1\,\eta\sin(2w-\mathrm{v})+4\mu A^{(-1)}_{4\cdot0\cdot1}\beta_1\,\eta'\sin(2w-\mathrm{v}_1)$$

$$-\{2\mu A^{(-1)}_{2\cdot1\cdot0}-6\mu A^{(-1)}_{4\cdot1\cdot0}\}\beta_1\,\eta\sin(4w-\mathrm{v})-\{2\mu A^{(-1)}_{2\cdot0\cdot1}-6\mu A^{(-1)}_{4\cdot0\cdot1}\}\beta_1\,\eta'\sin(4w-\mathrm{v}_1).$$

Wenn wir alle diese Werte einsetzen in 291), so findet sich:

292)
$$\frac{dS_1}{dv} = -a^{(+1)}_{0\cdot1\cdot0}\,\eta\sin\mathrm{v} \qquad -a^{(+1)}_{0\cdot0\cdot1}\,\eta'\sin\mathrm{v}_1$$
$$-a^{(-1)}_{2\cdot1\cdot0}\,\eta\sin(2w-\mathrm{v})-a^{(-1)}_{2\cdot0\cdot1}\,\eta'\sin(2w-\mathrm{v}_1)$$
$$-a^{(-1)}_{4\cdot1\cdot0}\,\eta\sin(4w-\mathrm{v})-a^{(-1)}_{4\cdot0\cdot1}\,\eta'\sin(4w-\mathrm{v}_1),$$

wo

292a)
$$a^{(+1)}_{0\cdot1\cdot0} = q_1^{(1)}\beta_1+q_1^{(2)}\beta_2+q_1^{(3)}\beta_4$$
$$a^{(+1)}_{0\cdot0\cdot1} = A^{(+1)}_{0\cdot0\cdot1}+q_2^{(1)}\beta_1+q_1^{(2)}\beta_3+q_1^{(3)}\beta_5$$
$$a^{(-1)}_{2\cdot1\cdot0} = A^{(-1)}_{2\cdot1\cdot0}+q_3^{(1)}\beta_1+q_3^{(2)}\beta_4$$
$$a^{(-1)}_{2\cdot0\cdot1} = A^{(-1)}_{2\cdot0\cdot1}+q_4^{(1)}\beta_1+q_3^{(2)}\beta_5$$
$$a^{(-1)}_{4\cdot1\cdot0} = A^{(-1)}_{4\cdot1\cdot0}+q_5^{(1)}\beta_1+q_1^{(3)}\beta_2$$
$$a^{(-1)}_{4\cdot0\cdot1} = A^{(-1)}_{4\cdot0\cdot1}+q_6^{(1)}\beta_1+q_1^{(3)}\beta_3,$$

und wo

292b)
$$q_1^{(1)} = \tfrac{3}{2}\mu A_{2\cdot0\cdot0}+\tfrac{1}{2}A^{+1\cdot1\cdot0}_{2\cdot1\cdot0}-\tfrac{1}{2}A^{-1\cdot1\cdot0}_{2\cdot1\cdot0}-2\mu A^{(+1)}_{2\cdot1\cdot0}+2\mu A^{(-1)}_{2\cdot1\cdot0}$$
$$q_1^{(2)} = \tfrac{3}{4}(1-2\mu)A_{2\cdot0\cdot0}+\tfrac{1}{2}A^{1\cdot0}_{2\cdot0\cdot0}$$
$$q_1^{(3)} = \tfrac{1}{2}A^{1\cdot0}_{4\cdot0\cdot0}-4\mu A_{4\cdot0\cdot0}$$
$$q_2^{(1)} = \tfrac{1}{2}A^{+1\cdot1\cdot0}_{2\cdot0\cdot1}-\tfrac{1}{2}A^{-1\cdot1\cdot0}_{2\cdot0\cdot1}-2\mu A^{(+1)}_{2\cdot0\cdot1}+2\mu A^{(-1)}_{2\cdot0\cdot1}$$
$$q_3^{(1)} = \tfrac{1}{2}A^{-1\cdot1\cdot0}_{4\cdot1\cdot0}+3\mu A_{4\cdot0\cdot0}-4\mu A^{(-1)}_{4\cdot1\cdot0}$$
$$q_3^{(2)} = -\tfrac{1}{2}A^{1\cdot0}_{2\cdot0\cdot0}+2\mu A_{2\cdot0\cdot0}$$
$$q_4^{(1)} = -\tfrac{1}{2}A^{+1\cdot1\cdot0}_{4\cdot0\cdot1}+\tfrac{1}{2}A^{-1\cdot1\cdot0}_{4\cdot0\cdot1}-4\mu A^{(-1)}_{4\cdot0\cdot1}$$
$$q_5^{(1)} = \tfrac{1}{2}A^{-1\cdot1\cdot0}_{2\cdot1\cdot0}+\tfrac{1}{2}A^{-1\cdot1\cdot0}_{6\cdot1\cdot0}+3\mu A_{2\cdot0\cdot0}+\tfrac{3}{2}\mu A_{6\cdot0\cdot0}+2\mu A^{(-1)}_{2\cdot1\cdot0}-6\mu A^{(-1)}_{6\cdot1\cdot0}$$
$$q_6^{(1)} = \tfrac{1}{2}A^{-1\cdot1\cdot0}_{2\cdot0\cdot1}+\tfrac{1}{2}A^{-1\cdot1\cdot0}_{6\cdot0\cdot1}+2\mu A^{(-1)}_{2\cdot0\cdot1}-6\mu A^{(-1)}_{6\cdot0\cdot1}.$$

Die A- sowie die q-Coefficienten können berechnet werden und auch β_1 ist aus dem Vorigen bekannt. Ich habe in den vorstehenden Formeln für μ_1 den Bruch $\frac{1}{2}$ gesetzt, da dadurch nur Glieder rein zweiter Ordnung vernachlässigt werden. Wenn man auch $\mu = \frac{1}{2}$ setzt, so würde der Coefficient $A_{2\cdot0\cdot0}$ im Ausdruck von $q_1^{(2)}$ verschwinden. Die Coefficienten β_2, β_3, β_4 und β_5 sind noch unbekannt.

Ich will zunächst denjenigen Teil von S_1 bestimmen, welcher von der Form C ist, also in erster Linie die Coefficienten α_1 und α_2. Es ist

$$T_e S_1 = -a^{(-1)}_{2.1.0} \int \eta \sin(2w - \mathrm{v})\, dv - a^{(-1)}_{2.0.1} \int \eta' \sin(2w - \mathrm{v}_1)\, dv,$$

und die Integrale haben wir nach 214) auszuführen und dabei zu setzen

$$\int \sin(2w - v)\, dv = -\frac{1}{\delta_1} \cos(2w - v)$$

$$\iint \sin(2w - v)\, dv^2 = -\frac{1}{\delta_1^2} \sin(2w - v)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.$$

Wir behalten des kleinen Divisors δ_1 wegen in 214) die beiden ersten Zeilen bei und erhalten:

$$T_e S_1 = \frac{a^{(-1)}_{2\cdot 1\cdot 0}}{\delta_1} \left\{ \eta \cos(2w - \mathrm{v}) - \frac{1}{\delta_1} \frac{d\eta \cos \Pi}{dv} \sin(2w - v) - \frac{1}{\delta_1} \frac{d\eta \sin \Pi}{dv} \cos(2w - v) \right\}$$

$$+ \frac{a^{(-1)}_{2\cdot 0\cdot 1}}{\delta_1} \left\{ \eta' \cos(2w - \mathrm{v}_1) - \frac{1}{\delta_1} \frac{d\eta' \cos \Pi_1}{dv} \sin(2w - v) - \frac{1}{\delta_1} \frac{d\eta' \sin \Pi_1}{dv} \cos(2w - v) \right\}.$$

Für $T_e S_1$ ist also die Gleichung anzusetzen:

293)
$$T_e S_1 = \alpha_2 \eta \cos(2w - \mathrm{v}) + \alpha_3 \eta' \cos(2w - \mathrm{v}_1)$$
$$- \frac{1}{\delta_1} \left\{ \alpha_2 \frac{d\eta \cos \Pi}{dv} + \alpha_3 \frac{d\eta' \cos \Pi_1}{dv} \right\} \sin(2w - v)$$
$$- \frac{1}{\delta_1} \left\{ \alpha_2 \frac{d\eta \sin \Pi}{dv} + \alpha_3 \frac{d\eta' \sin \Pi_1}{dv} \right\} \cos(2w - v),$$

welche strenger ist als 285); α_2 und α_3 bestimmen sich aus den Relationen:

293a)
$$\delta_1 \alpha_2 = A^{(-1)}_{2\cdot 1\cdot 0} + q_3^{(1)} \beta_1 + q_3^{(2)} \beta_4$$
$$\delta_1 \alpha_3 = A^{(-1)}_{2\cdot 0\cdot 1} + q_4^{(1)} \beta_1 + q_3^{(2)} \beta_5,$$

wo β_1 bekannt, aber β_4 und β_5 zunächst unbekannt sind.

Bei der Integration der übrigen Teile von S_1 brauchen wir in 214) nur die ersten Zeilen beizubehalten, da durch die Integration keine kleinen Divisoren entstehen, und es wird:

294)
$$T_b S_1 = a^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 0} \eta \cos \mathrm{v} + a^{(+1)}_{0\cdot 0\cdot 1} \eta' \cos \mathrm{v}_1$$
$$T_d S_1 = \frac{a^{(-1)}_{4\cdot 1\cdot 0}}{1 + 2\delta_1} \eta \cos(4w - \mathrm{v}) + \frac{a^{(-1)}_{4\cdot 0\cdot 1}}{1 + 2\delta_1} \eta' \cos(4w - \mathrm{v}_1).$$

3. Wenn wir in der Gleichung 184) alle Glieder zweiten Grades, alle solchen dritter Ordnung und alle solchen rein zweiter Ordnung fortlassen,

dagegen die Glieder nullten Grades mitnehmen, soweit sie erster Ordnung sind, so kommt:

$$295) \quad \frac{d^2\varrho}{dv^2}+\varrho = 2S_0 - P_0 - Q_0\frac{d(\varrho)}{dv} - Q_0\left(\frac{dR}{dv}\right)_1 - Q_1\left(\frac{dR}{dv}\right)_0 + 2S_1 + 2S_0 S_1 - P_1 - 2S_1 P_0.$$

In diese Gleichnng setzen wir für die dort fungirenden Ausdrücke S_0, Q_0 u. s. w. die früher gefundenen Entwicklungen ein, wobei ich nur an die folgenden:

$$\frac{d(\varrho)}{dv} = -\eta \sin \mathrm{v}$$

$$\left(\frac{dR}{dv}\right)_0 = -(1+\delta_1)\beta_1 \sin 2w$$

$$\left(\frac{dR}{dv}\right)_1 = -(1+2\delta_1)\beta_4\, \eta \sin(4w-\mathrm{v}) - (1+2\delta_1)\beta_5\, \eta' \sin(4w-\mathrm{v}_1),$$

sowie an die Ausdrücke 293) und 294) für S_1 erinnere. So ergiebt sich:

$$296) \quad \begin{aligned} \frac{d^2\varrho}{dv^2}+\varrho = {} & b_{2\cdot0\cdot0}\cos 2w \\ & + b^{(+1)}_{0\cdot1\cdot0}\,\eta\cos\mathrm{v} + b^{(+1)}_{0\cdot0\cdot1}\,\eta'\cos\mathrm{v}_1 \\ & + \left\{2\alpha_2 + b^{(-1)}_{2\cdot1\cdot0}\right\}\eta\cos(2w-\mathrm{v}) + \left\{2\alpha_3 + b^{(-1)}_{2\cdot0\cdot1}\right\}\eta'\cos(2w-\mathrm{v}_1) \\ & + b^{(-1)}_{4\cdot1\cdot0}\,\eta\cos(4w-\mathrm{v}) + b^{(-1)}_{4\cdot0\cdot1}\,\eta'\cos(4w-\mathrm{v}_1) \\ & - \frac{2}{\delta_1}\left\{\alpha_2\frac{d\eta\cos\Pi}{dv} + \alpha_3\frac{d\eta'\cos\Pi_1}{dv}\right\}\sin(2w-v) \\ & - \frac{2}{\delta_1}\left\{\alpha_2\frac{d\eta\sin\Pi}{dv} + \alpha_3\frac{d\eta'\sin\Pi_1}{dv}\right\}\cos(2w-v), \end{aligned}$$

wo $b_{2\cdot0\cdot0}$ aus dem § 1 bekannt ist und wo:

$$296\text{a}) \quad \begin{aligned} b^{(+1)}_{0\cdot1\cdot0} &= p_1^{(0)} + p_1^{(1)}\beta_1 + p_1^{(2)}\beta_2 + p_1^{(3)}\beta_4 \\ b^{(+1)}_{0\cdot0\cdot1} &= p_2^{(0)} + p_2^{(1)}\beta_1 + p_2^{(2)}\beta_3 + p_2^{(3)}\beta_5 \\ b^{(-1)}_{2\cdot1\cdot0} &= p_3^{(0)} + p_3^{(1)}\beta_1 + p_3^{(2)}\beta_2 + p_3^{(3)}\beta_4 \\ b^{(-1)}_{2\cdot0\cdot1} &= p_4^{(0)} + p_4^{(1)}\beta_1 + p_4^{(2)}\beta_3 + p_4^{(3)}\beta_5 \\ b^{(-1)}_{4\cdot1\cdot0} &= p_5^{(0)} + p_5^{(1)}\beta_1 + p_5^{(2)}\beta_2 + p_5^{(3)}\beta_4 \\ b^{(-1)}_{4\cdot0\cdot1} &= p_6^{(0)} + p_6^{(1)}\beta_1 + p_6^{(2)}\beta_3 + p_6^{(3)}\beta_5. \end{aligned}$$

Die p-Coefficienten können berechnet werden, da sie nur von den A- und B-Coefficienten abhängen; sie sind sämmtlich rein erster Ordnung. Ihre Ausdrücke will ich hier nicht ableiten, da uns dies zu weit in die Details führen

würde und da sie überdies in der pag. 117 citirten Dissertation des Herrn Ludendorff sich vorfinden, auf welche ich überhaupt betreffs verschiedener Einzelheiten verweise.

Die Gleichung 296) integriren wir nach 197) bis 199), zu denen man noch den Ausdruck 220a) ziehen kann; ausserdem ermitteln wir den aus dem Gliede nullten Grades entstehenden Teil nach der Formel 201).

Wenn wir demnach setzen

297) $$\text{pars}\,\varrho_1 = g_1 \sin v - g_2 \cos v,$$

so wird:

298) $$\left.\begin{matrix}\dfrac{dg_1}{dv}\\[2ex]\dfrac{dg_2}{dv}\end{matrix}\right\} = \frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}}{2+\delta_1}\left(\frac{dV}{dv}\right)_1 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w+v) \pm \frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}}{\delta_1}\left(\frac{dV}{dv}\right)_1 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w-v)$$

$$+\tfrac{1}{2}b^{(+1)}_{0\cdot1\cdot0}\left\{\eta \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(\mathrm{v}+v) \pm \eta \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(\mathrm{v}-v)\right\}$$

$$+\tfrac{1}{2}b^{(+1)}_{0\cdot0\cdot1}\left\{\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(\mathrm{v}_1+v) \pm \eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(\mathrm{v}_1-v)\right\}$$

$$+\left\{\alpha_2+\tfrac{1}{2}b^{(-1)}_{2\cdot1\cdot0}\right\}\left\{\eta \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w-\mathrm{v}+v) \pm \eta \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w-\mathrm{v}-v)\right\}$$

$$+\left\{\alpha_3+\tfrac{1}{2}b^{(-1)}_{2\cdot0\cdot1}\right\}\left\{\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w-\mathrm{v}_1+v) \pm \eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w-\mathrm{v}_1-v)\right\}$$

$$-\frac{1}{\delta_1}\left\{\alpha_2\frac{d\eta\cos\Pi}{dv}+\alpha_3\frac{d\eta'\cos\Pi_1}{dv}\right\}\left\{\pm\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}2w+\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(2w-2v)\right\}$$

$$-\frac{1}{\delta_2}\left\{\alpha_2\frac{d\eta\sin\Pi}{dv}+\alpha_3\frac{d\eta'\sin\Pi_1}{dv}\right\}\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}2w\pm\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w-2v)\right\}$$

$$+\tfrac{1}{2}b^{(-1)}_{4\cdot1\cdot0}\left\{\eta \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(4w-\mathrm{v}+v) \pm \eta \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(4w-\mathrm{v}-v)\right\}$$

$$+\tfrac{1}{2}b^{(-1)}_{4\cdot0\cdot1}\left\{\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(4w-\mathrm{v}_1+v) \pm \eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(4w-\mathrm{v}_1-v)\right\}.$$

In den beiden ersten Gliedern setzt man nach 289):

$$\left(\frac{dV}{dv}\right)_1 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w+v) = \frac{\gamma_2}{2}\left\{\eta \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(\mathrm{v}+v)+\eta \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(4w-\mathrm{v}+v)\right\}$$

$$+\frac{\gamma_3}{2}\left\{\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(\mathrm{v}_1+v)+\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(4w-\mathrm{v}_1+v)\right\}$$

$$\left(\frac{dV}{dv}\right)_1 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2w-v) = \frac{\gamma_2}{2}\left\{\eta \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(\mathrm{v}-v)+\eta \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(4w-\mathrm{v}-v)\right\}$$

$$+\frac{\gamma_3}{2}\left\{\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(\mathrm{v}_1-v)+\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(4w-\mathrm{v}_1-v)\right\},$$

und dann integrirt man den Ausdruck nach 221) und 222); indessen führen wir die Integration derjenigen Glieder nicht aus, in denen das Argument w nicht auftritt; und bei Ausführung der Integrationen $\int \eta \cos(4w - \mathrm{v} - v)dv$ und $\int \eta' \cos(4w - \mathrm{v}_1 - v)dv$ nach 221) müssen wir die Glieder mitberücksichtigen, welche die Differentialquotienten $\frac{d\eta \cos \Pi}{dv}$, $\frac{d\eta \sin \Pi}{dv}$ u. s. w. enthalten.

Dann wird:

299)
$$
\begin{aligned}
\left.\begin{matrix} g_1 \\ g_2 \end{matrix}\right\} = {} & \tfrac{1}{2}\left\{b^{(+1)}_{0\cdot1\cdot0} + \frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}}{2+\delta_1}\gamma_1\right\}\int \eta \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(\mathrm{v}+v)\,dv \pm \tfrac{1}{2}\left\{b^{(+1)}_{0\cdot1\cdot0} + \frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}}{\delta_1}\gamma_2\right\}\int \eta \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(\mathrm{v}-v)\,dv \\
& + \tfrac{1}{2}\left\{b^{(+1)}_{0\cdot0\cdot1} + \frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}}{2+\delta_1}\gamma_2\right\}\int \eta' \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(\mathrm{v}_1+v)\,dv \pm \tfrac{1}{2}\left\{b^{(+1)}_{0\cdot0\cdot1} + \frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}}{\delta_1}\gamma_2\right\}\int \eta' \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(\mathrm{v}_1-v)\,dv \\
& + \left\{\alpha_2 + \tfrac{1}{2}b^{(-1)}_{2\cdot1\cdot0}\right\}\left\{\pm \frac{1}{1+\delta_1}\eta \genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}(2w-\mathrm{v}+v) - \frac{1}{1-\delta_1}\eta \genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}(2w-\mathrm{v}-v)\right\} \\
& + \left\{\alpha_3 + \tfrac{1}{2}b^{(-1)}_{2\cdot0\cdot1}\right\}\left\{\pm \frac{1}{1+\delta_1}\eta' \genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}(2w-\mathrm{v}_1+v) - \frac{1}{1-\delta_1}\eta' \genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}(2w-\mathrm{v}_1-v)\right\} \\
& + \frac{1}{\delta_1}\left\{\alpha_2 \frac{d\eta \cos \Pi}{dv} + \alpha_3 \frac{d\eta' \cos \Pi_1}{dv}\right\}\left\{\frac{1}{1+\delta_1}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}2w \mp \frac{1}{1-\delta_1}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(2w-2v)\right\} \\
& + \frac{1}{\delta_1}\left\{\alpha_2 \frac{d\eta \sin \Pi}{dv} + \alpha_3 \frac{d\eta' \sin \Pi_1}{dv}\right\}\left\{\mp \frac{1}{1+\delta_1}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}2w + \frac{1}{1-\delta_1}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}(2w-2v)\right\} \\
& + \frac{1}{4(1+\delta)}\left\{b^{(-1)}_{4\cdot1\cdot0} + \frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}}{2+\delta_1}\gamma_2\right\}\left\{\pm \eta \genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}(4w-\mathrm{v}+v) + \frac{1}{2(1+\delta_1)}\frac{d\eta \cos \Pi}{dv}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}4w \mp \frac{1}{2(1+\delta_1)}\frac{d\eta \sin \Pi}{dv}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}4w\right\} \\
& + \frac{1}{4\delta_1}\left\{b^{(-1)}_{4\cdot1\cdot0} + \frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}}{\delta_1}\gamma_2\right\}\left\{+ \eta \genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}(4w-\mathrm{v}-v) \pm \frac{1}{2\delta_1}\frac{d\eta \cos \Pi}{dv}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(4w-2v) - \frac{1}{2\delta_1}\frac{d\eta \sin \Pi}{dv}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}(4w-2v)\right\} \\
& + \frac{1}{4(1+\delta_1)}\left\{b^{(-1)}_{4\cdot0\cdot1} + \frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}}{2+\delta_1}\gamma_2\right\}\left\{\pm \eta' \genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}(4w-\mathrm{v}_1+v) + \frac{1}{2(1+\delta_1)}\frac{d\eta' \cos \Pi_1}{dv}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}4w \mp \frac{1}{2(1+\delta_1)}\frac{d\eta' \sin \Pi_1}{dv}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}4w\right\} \\
& + \frac{1}{4\delta_1}\left\{b^{(-1)}_{4\cdot0\cdot1} + \frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}}{\delta_1}\gamma_2\right\}\left\{+ \eta' \genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}(4w-\mathrm{v}_1-v) \pm \frac{1}{2\delta_1}\frac{d\eta' \cos \Pi_1}{dv}\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(4w-2v) - \frac{1}{2\delta_1}\frac{d\eta' \sin \Pi_1}{dv}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}(4w-2v)\right\}.
\end{aligned}
$$

Die in den beiden ersten Zeilen stehenden Glieder führen in ϱ zu Gliedern der Form B; wir wollen zunächst R_1 bestimmen und sie deshalb einstweilen bei Seite lassen.

Wenn wir jetzt mit Hilfe der Ausdrücke 299) und 297) R_1 bilden und uns zugleich erinnern, dass wir es in der Form 286) darstellen wollen, so wird offenbar der Ansatz für diese Funktion in ihrer vollständigen Form, wie folgt, zu machen sein:

300)
$$
\begin{aligned}
R_1 = {} & \beta_2 \eta \cos(2w - \mathrm{v}) + \beta_3 \eta' \cos(2w - \mathrm{v}_1) \\
& + \beta_4 \eta \cos(4w - \mathrm{v}) + \beta_5 \eta' \cos(4w - \mathrm{v}_1) \\
& - \frac{2}{\delta_1(1-\delta_1^2)} \left\{ \alpha_2 \frac{d\eta \cos \Pi}{dv} + \alpha_3 \frac{d\eta' \cos \Pi_1}{dv} \right\} \sin(2w - v) \\
& - \frac{2}{\delta_1(1-\delta_1^2)} \left\{ \alpha_2 \frac{d\eta \sin \Pi}{dv} + \alpha_3 \frac{d\eta' \sin \Pi_1}{dv} \right\} \cos(2w - v) \\
& - \frac{1}{2\delta_1} \left\{ \beta_4 \frac{d\eta \cos \Pi}{dv} + \beta_5 \frac{d\eta' \cos \Pi_1}{dv} \right\} \sin(4w - v) \\
& - \frac{1}{2\delta_1} \left\{ \beta_4 \frac{d\eta \sin \Pi}{dv} + \beta_5 \frac{d\eta' \sin \Pi_1}{dv} \right\} \cos(4w - v),
\end{aligned}
$$

und für die β-Coefficienten gelten die Gleichungen:

300a)
$$
\beta_2 = \frac{2\alpha_2 + b^{(-1)}_{2\cdot 1\cdot 0}}{1-\delta_1^2}, \qquad \beta_3 = \frac{2\alpha_3 + b^{(-1)}_{2\cdot 0\cdot 1}}{1-\delta_1^2},
$$
$$
\beta_4 = - \frac{b^{(-1)}_{4\cdot 1\cdot 0}}{4\delta_1(1+\delta_1)} - \frac{(2+3\delta_1)\mu b_{2\cdot 0\cdot 0}\gamma_2}{4\delta_1^2(1+\delta_1)(2+\delta_1)}, \quad \beta_5 = - \frac{b^{(-1)}_{4\cdot 0\cdot 1}}{4\delta_1(1+\delta_1)} - \frac{(2+3\delta_1)\mu b_{2\cdot 0\cdot 0}\gamma_3}{4\delta_1^2(1+\delta_1)(2+\delta_1)}.
$$

Die Grösse δ_1 kann hier mehrfach vernachlässigt werden, z. B. in den Faktoren $(1-\delta_1^2)$, $(1+\delta_1)$ u. s. w. Wir haben nun die nötigen Gleichungen abgeleitet zur Berechnung der α- und der β-Coefficienten; es bleibt nur noch übrig, sie arithmetisch zu lösen. Ich stelle dazu die Gleichungen 293a) und 300a) zusammen in der folgenden Form, indem ich zugleich auf die Relationen 296a) Rücksicht nehme:

301)
$$
\begin{aligned}
\delta_1 \alpha_2 &= A^{(-1)}_{2\cdot 1\cdot 0} + q_3^{(1)} \beta_1 + q_3^{(2)} \beta_4 \\
\delta_1 \alpha_3 &= A^{(-1)}_{2\cdot 0\cdot 1} + q_4^{(1)} \beta_1 + q_5^{(2)} \beta_5 \\
(1-\delta_1^2)\beta_2 &= 2\alpha_2 + p_3^{(0)} + p_3^{(1)} \beta_1 + p_5^{(2)} \beta_5 + p_3^{(3)} \beta_4 \\
(1-\delta_1^2)\beta_3 &= 2\alpha_3 + p_4^{(0)} + p_4^{(1)} \beta_1 + p_3^{(2)} \beta_3 + p_3^{(3)} \beta_3 \\
4\delta_1(1+\delta_1)\beta_4 &= -p_3^{(0)} - p_3^{(1)} \beta_1 - p_3^{(2)} \beta_5 - p_3^{(3)} \beta_4 - \frac{(2+3\delta_1)\mu b_{2\cdot 0\cdot 0}\gamma_2}{\delta_1(2+\delta_1)} \\
4\delta_1(1+\delta_1)\beta_5 &= -p_4^{(0)} - p_4^{(1)} \beta_1 - p_3^{(2)} \beta_3 - p_3^{(3)} \beta_5 - \frac{(2+3\delta_1)\mu b_{2\cdot 0\cdot 0}\gamma_3}{\delta_1(2+\delta_1)}.
\end{aligned}
$$

Man könnte in den letzten beiden Gleichungen die Coefficienten γ_2 und γ_3 durch ihre Ausdrücke 290a) ersetzen. Indessen wollen wir darauf Rücksicht nehmen, dass die beiden Glieder, welche diese Coefficienten enthalten, sehr gross sind und bei den kritischen Planeten im Allgemeinen sogar grösser sind als die vorhergehenden. Deshalb wollen wir uns einen strengeren Ausdruck für dieselben beschaffen, was mit Hilfe der Gleichung 185) nicht schwer ist. Ich

habe in § 1 gezeigt, dass der Coefficient β_1 im Maximum von der Grössenordnung der Kubikwurzel aus der störenden Masse ist; ob dies nun auch von den übrigen Coefficienten der charakteristischen Glieder gilt, lässt sich nicht ohne Weiteres sagen; nimmt man es an, so könnte man die dritten Potenzen aller dieser Coefficienten mit der störenden Masse vergleichen und zugleich mit den Gliedern rein erster Ordnung vernachlässigen. Wir wollen demnach aus 185) γ_2 und γ_3 bestimmen mit Fortlassung aller Glieder dritter und aller rein erster Ordnung, aber mit Berücksichtigung der Quadrate der β-Coefficienten. Die letzteren entstehen aus dem Gliede $3R^2$, denn es ist:

$$\text{pars}\, 3R^2 = 3\beta_1\beta_4\eta\cos(2w-\text{v}) + 3\beta_1\beta_3\eta'\cos(2w-\text{v}_1).$$

Danach wird also:

302)
$$\begin{aligned}\gamma_2 &= -\tfrac{4}{3}\beta_2 + 3\beta_1 + 3\beta_1\beta_4\\ \gamma_3 &= -\tfrac{4}{3}\beta_3 + 3\beta_1\beta_3.\end{aligned}$$

Wenn wir nun zwischen den ersten vier der Gleichungen 301) die beiden Coefficienten α_2 und α_3 eliminiren und in die beiden letzten die eben für γ_2 und γ_3 gefundenen Werte einsetzen, sowie berücksichtigen, dass β_1 bekannt ist, so erhalten wir vier Gleichungen von der folgenden Form:

303)
$$\begin{aligned}a_1\beta_2 &= a_2 + a_3\beta_4\\ b_1\beta_4 &= b_2 + b_3\beta_2\\ a'_1\beta_3 &= a'_2 + a'_3\beta_5\\ b'_1\beta_5 &= b'_2 + b'_3\beta_3.\end{aligned}$$

In denselben sind nur die vier β-Coefficienten unbekannt. Die Bezeichnungen a_1, b_1 u. s. w. für die numerisch bekannten Faktoren will ich hier nur ganz vorübergehend gebrauchen; es ist zu bemerken, dass einige von ihnen von der Grösse δ_1 abhängen, also nicht endgiltig berechnet werden können, ehe dieselbe bekannt ist. Es wird sich darum empfehlen, auch hier, wie bei β_1 eine kleine Tafel zu berechnen, die die β-Coefficienten für verschiedene Werte von δ_1 giebt. Aus derselben wird man später nicht nur die richtigen Werte der β entnehmen können, sondern man wird auch eine Uebersicht haben, wie dieselben sich mit δ_1 ändern, also ihren Verlauf ähnlich studiren können, wie wir es mit β_1 mit Hilfe der Tafel auf pag. 128 gethan haben.

Sobald die β gefunden sind, lassen sich auch α_2 und α_3 nach 300a) sowie die γ berechnen; die letzteren zunächst wenigstens genähert.

4. Es bleibt nun noch die Funktion (ϱ) zu bestimmen und hierzu müssen wir auf die Gleichung 299) zurückgreifen. Wir haben:

$$(\varrho) = g_2\sin v - g_3\cos v,$$

wenn wir in g_1 und g_2 nur diejenigen Glieder aufnehmen, welche zu Gliedern der Form B führen.

Ich bezeichne der Kürze wegen in 299):

304)
$$b_1 = b^{(+1)}_{0\cdot1\cdot0} + \frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}}{\delta_1}\gamma_2 \qquad b_3 = b^{(+1)}_{0\cdot1\cdot0} + \frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}}{2+\delta_1}\gamma_1$$
$$b_2 = b^{(+1)}_{0\cdot0\cdot1} + \frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}}{\delta_1}\gamma_2 \qquad b_4 = b^{(+1)}_{0\cdot0\cdot1} + \frac{\mu b_{2\cdot0\cdot0}}{2+\delta_1}\gamma_2,$$

und diese Coefficienten sind bekannt. Wir haben dann zu setzen:

$$g_1 = \frac{b_1}{2}\int \eta\cos\Pi\, dv + \frac{b_2}{2}\int \eta'\cos\Pi_1\, dv + \frac{b_3}{2}\int \eta\cos(2v-\Pi)\, dv + \frac{b_4}{2}\int \eta'\cos(2v-\Pi_1)\, dv$$
$$g_2 = \frac{b_1}{2}\int \eta\sin\Pi\, dv + \frac{b_2}{2}\int \eta'\sin\Pi_1\, dv + \frac{b_3}{2}\int \eta\sin(2v-\Pi)\, dv + \frac{b_4}{2}\int \eta'\sin(2v-\Pi_1)\, dv.$$

Der Integration dieser Ausdrücke stellen sich keine Schwierigkeiten entgegen, wenn man die Relationen 10) und 154b), sowie die daraus folgenden:

$$\eta \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(2v-\Pi) = \varkappa \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(2v-\varpi) + \sum \varkappa_n \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(2v-\varpi_n)$$
$$\eta' \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(2v-\Pi_1) = \sum \varkappa'_n \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(2v-\varpi_n)$$

bedenkt. Es ist:

$$\int \eta \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}\Pi\, dv = \pm\frac{\varkappa}{\varsigma}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}\varpi \pm \sum\frac{\varkappa_n}{\varsigma_n}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}\varpi_n$$
$$\int \eta \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(2v-\Pi)\, dv = \pm\frac{\varkappa}{2-\varsigma}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}(2v-\varpi) \pm \sum\frac{\varkappa_n}{2-\varsigma_n}\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}(2v-\varpi_n)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

und hiernach erhalten wir für (ϱ) den Ausdruck:

305) $$(\varrho) = \frac{\varkappa}{2}\left[\frac{b_1}{\varsigma} + \frac{b_3}{2-\varsigma}\right]\cos(v-\varpi) + \sum\left\{\frac{\varkappa_n}{2}\left[\frac{b_1}{\varsigma_n} + \frac{b_3}{2-\varsigma_n}\right] + \frac{\varkappa'_n}{2}\left[\frac{b_2}{\varsigma_n} + \frac{b_4}{2-\varsigma_n}\right]\right\}\cos(v-\varpi_n),$$

und da derselbe mit dem folgenden identisch sein soll:

$$(\varrho) = \varkappa\cos(v-\varpi) + \sum \varkappa_n\cos(v-\varpi_n),$$

so erhält man zur Bestimmung von ς die folgende Gleichung:

305a) $$2\varsigma = b_1 + \frac{\varsigma b_3}{2-\varsigma},$$

und zur Bestimmung der $\varkappa_n$ die folgenden:

305b) $$\left[2\varsigma_n - b_1 - \frac{\varsigma_n b_3}{2-\varsigma_n}\right]\varkappa_n = \left[b_2 + \frac{\varsigma_n b_4}{2-\varsigma_n}\right]\varkappa_n'.$$

Man kann indessen wohl stets mit ausreichender Gonauigkeit setzen:

$$\varsigma = \frac{b_1}{2}$$

$$\varkappa_n = \frac{b_2 \varkappa_n'}{2(\varsigma_n - \varsigma)}.$$

Nichts hindert übrigens, die Gleichungen 305a) und 305b) numerisch so streng zu lösen, wie man will.

5. Zuletzt ist die Funktion W_1 resp. ihre Teile K_1 und V_1 zu bestimmen, denn durch die Werte der γ, die wir im Vorigen abgeleitet haben, ist sie nur genähert bekannt.

Ich will indessen darauf hier nicht näher eingehen, da die Operationen den Vorigen ganz analog sind und da Herr Ludendorff in seiner genannten Dissertation die betreffenden Entwicklungen giebt. Man hat erstens alle Glieder mitzunehmen, welche bereits auf der rechten Seite der Gleichung 185) einen merklichen Betrag haben, und zweitens die der Form C, da die letzteren durch die Integration der genannten Gleichung vergrössert werden. Der grösste Teil von W_1 wird offenhar der folgende sein:

306) $$\text{pars } W_1 = \text{pars } V_1 = \frac{\gamma_7}{\delta_1}\eta \sin(2w - \mathrm{v}) + \frac{\gamma_8}{\delta_1}\eta' \sin(2w - \mathrm{v}_1).$$

6. Nachdem die charakteristischen und die elementaren Glieder hestimmt sind, lassen sich die gewöhnlichen Glieder ohne Weiteres nach den Formeln des vorigen Kapitels berechnen, und zwar wenn man will, gleich mit Berücksichtigung derjenigen Glieder zweiter Ordnung, welche nicht rein zweiter Ordnung sind.

7. Auch die Bestimmung der Funktion $\mathfrak{z}$ kann ich übergehen; der charakteristische Teil derselben stellt sich in der Form

307) $$\text{pars } \mathfrak{Z}_1 = \zeta_4 \sin j \sin(4w - \mathfrak{v}) + \zeta_5 \sin j' \sin(4w - \mathfrak{v}_1)$$

dar; denn $\mathfrak{z}$ enthält keine merklichen Glieder der Form C und überhaupt keine Glieder nullten Grades; allerdings sind noch die Glieder hinzuzufügen, welche die Differentialquotienten $\frac{d \sin j \cos\sigma}{dv}$, $\frac{d \sin j \sin\sigma}{dv}$ u. s. w. enthalten.

8. Die Planeten vom Hilda- und Thuletypus werden sich in derselben Weise behandeln lassen, wie die vom Hecubatypus und ich brauche auf sie hier nicht einzugehen. Ueber den Planeten Hilda habe ich einige Rechnungen angestellt; die Zunahme der A- und der B-Coefficienten mit der Ordnung der Glieder ist hier schon merklich stark, und sie wird bei denen vom Thuletypus noch erheblich stärker sein; es scheint, dass bei diesen Planeten die Lücken in den Werten von n_1 bei 450″ und bei 400″ sehr gross sind, sobald die Excentricitätsmoduln einigermaassen merkliche Werte haben, so dass δ_1 hier beträchtlich grösser bliebe als beim Hecubatypus. Dagegen scheint es, als ob die osculirende elliptische mittlere Bewegung sich sehr der strengen Commensurabilität nähern, vielleicht sogar durch sie hindurchgehen kann.

9. Es bliebe nun noch von den charakteristischen Planeten der zweiten Klasse zu sprechen. Für diejenigen vom Hestiatypus (μ nahe gleich $\frac{1}{3}$) habe ich die nötigen Ableitungen in meiner pag. 7 citirten Abhandlung gegeben; die Bezeichnungen sind dort von den oben gebrauchten allerdings etwas verschieden. Die Glieder der Form D haben hier die Argumente

$$3w - \mathrm{v} \quad \text{und} \quad 3w - \mathrm{v}_1,$$

und Glieder der Form C kommen unter denen ersten Grades nicht vor, wodurch die Entwicklungen erheblich einfacher werden, als bei den charakteristischen Planeten der ersten Klasse. Da die Funktion V nur Glieder der Formen A oder C enthält, so ist also hier $V_1 = 0$. Ferner sind S_1, R_0 und W_0 rein erster Ordnung. Man würde also den Ansatz für den wichtigsten Teil der Funktion R_1, wie folgt, zu machen haben

308) $$\text{pars } R_1 = \beta_1 \eta \cos(3w - \mathrm{v}) + \beta_2 \eta' \cos(3w - \mathrm{v}_1),$$

und für die Funktionen W_1 und K_1

308a) $$\text{pars } W_1 = \text{pars } K_1 = \gamma_1 \eta \sin(3w - \mathrm{v}) + \gamma_2 \eta' \sin(3w - \mathrm{v}_1).$$

Für die Coefficienten γ_1 und γ_2 hat man:

308b) $$\gamma_1 = -2\beta_1 \qquad \gamma_1 = -2\beta_2.$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke ist man im Stande, die rechten Seiten der Gleichungen 183) bis 185) mit Berücksichtigung der wichtigen Glieder zweiter Ordnung zu ermitteln, indem man ähnlich verfährt wie oben. Die Coefficienten β_1 und β_2 bleiben zunächst unbekannt, bestimmen sich aber sehr bald durch sehr einfache Gleichungen. Auch auf diese Planeten brauche ich hier nicht des Näheren einzugehen, da unsere am vorigen Beispiel gezeigte Integrationsmethode allgemein giltig ist.

§ 3.

Die Glieder zweiten Grades.

1. Bei der Integration der Glieder zweiten Grades haben wir zu bemerken, dass hier die Glieder der Form A zum ersten Mal auftreten. Wir werden dieselben jedoch, gerade wie bei den gewöhnlichen Planeten, von den übrigen Gliedern trennen und gesondert berechnen. Es lassen sich dann die charakteristischen wie die gewöhnlichen Glieder nach ganz denselben Methoden herstellen, die ich im Vorigen angewandt habe; es werden selbstverständlich die Entwicklungen hier umfangreicher. Für die Planeten der ersten Klasse verweise ich zunächst auf die pag. 117 citirte Abhandlung des Herrn Ludendorff, und für die der zweiten Klasse auf die pag. 7 citirte schwedische von mir.

Nur über die Glieder der Form A will ich einige Bemerkungen machen; diese Glieder sind bei den charakteristischen Planeten wesentlich grösser als bei den gewöhnlichen und können hier nicht immer vernachlässigt werden. Die Methode zu ihrer Ermittlung ist dieselbe wie im vorigen Kapitel. Es ist zunächst die Gleichung 183) mit alleiniger Berücksichtigung dieser Glieder anfzustellen:

309) $$T_0\left(\frac{dS}{dv}\right)_2 = -T_0\{Q_2+3S_0Q_2+3S_2Q_0+3S_1Q_1\}-\frac{1+S_{0,0,0}}{2}\frac{d\eta^2}{dv}.$$

Schon bei der Besprechung der gewöhnlichen Planeten ist gezeigt worden, dass die Glieder erster Ordnung auf der rechten Seite dieser Gleichung sich aufheben. Wir müssen auch hier $\frac{d\eta^2}{dv}$ ersetzen durch einen Ausdruck, der auf dieselbe Weise herzuleiten ist, wie 247); nur wird man bei den charakteristischen Planeten Glieder mitzunehmen haben, welche dort vernachlässigt worden sind.

Wenn man in W_2 alle elementaren Glieder erhalten will, so muss man in $\frac{dS}{dv}$ alle Glieder rein zweiter Ordnung der Form A berücksichtigen, wie schon oben bemerkt wurde. Die Zahl derselben ist aber auch hier unendlich und ihre Berechnung bis zu einer gewissen Genauigkeitsgrenze ist äusserst umständlich, wenn sich ihr auch keine principiellen Schwierigkeiten in den Weg stellen. Nun aber sind diese Glieder der Form A, welche in $\frac{dW}{dv}$ rein erster Ordnung sind, in W auch bei den charakteristischen Planeten so klein, dass man sie gänzlich fortlassen kann. Das Hauptaugenmerk bei Aufstellung der Gleichung 309) hat man also auf diejenigen Glieder zu richten, welche zweiter (und höherer) Ordnung, aber rein nur erster Ordnung sind.

Ich will mit m eine Grösse bezeichnen, welche ihrem Betrage nach direkt mit der störenden Masse zu vergleichen ist. Ausserdem will ich mit k eine Grösse bezeichnen, die mit den Coefficienten β resp. γ an Grösse verglichen werden kann, die also erster Ordnung ist, aber den kleinen Divisor δ_1 enthält. Es

werden demnach die Glieder von den Ordnungen mk und mk^2 sein, die man bei der Aufstellung der Gleichung 309) zu berücksichtigen hat. Da also die rechte Seite dieser Gleichung Glieder der Ordnung mk enthält, so könnte man daraus schliessen, dass die Funktion S Glieder der Ordnung k enthielte, die dann in W und V von der Ordnung $\frac{k}{m} = \frac{1}{\delta_1}$ würden.

2. Ich habe bei Gelegenheit der Berechnung des Planeten Hestia sehr eingehende Untersuchungen über diese Glieder gemacht und gefunden, dass sich bei den Planeten vom Hestiatypus die Glieder von der Ordnung mk im Ausdruck von $\frac{dT_0S_2}{dv}$ in ähnlicher Weise gegenseitig aufheben, wie die Glieder erster Ordnung, so dass die rechte Seite der Gleichung 309) in der That nur von der Grössenordnung mk^2 ist, wenn ich absehe von den Gliedern rein zweiter Ordnung, die unerheblich sind, wie oben bemerkt. Für die Planeten vom Hestiatypus gilt die Relation

309a) $$T_0\left(\frac{dS}{dv}\right)_2 = 2\beta_1\beta_2\frac{d\eta\eta'\cos(\Pi-\Pi_1)}{dv},$$

die ich hier ohne Beweis anführe, und wo β_1 und β_2 die durch die Gleichung 308) definirten Coefficienten sind. Der vorige Ausdruck kann im Allgemeinen nicht ohne Weiteres integrirt werden, da $\left(\frac{dS}{dv}\right)_2$ nicht gleich $\frac{dS_2}{dv}$ ist wegen des Vorkommens der Funktion V in den Argumenten. Man hat streng genommen

$$\left(\frac{dS}{dv}\right)_2 = \left(\frac{dS_0}{dv}\right)_2 + \left(\frac{dS_1}{dv}\right)_2 + \left(\frac{dS_2}{dv}\right)_2.$$

Für die charakteristischen Planeten der zweiten Klasse ist aber die Funktion V zweiten Grades und infolgedessen $\left(\frac{dS_1}{dv}\right)_2$ gleich Null und $\left(\frac{dS_0}{dv}\right)_2$ enthält keine Glieder der Form A, so dass also:

$$\frac{dT_0S_2}{dv} = T_0\left(\frac{dS}{dv}\right)_2,$$

und

310) $$T_0S_2 = 2\beta_1\beta_2\,\eta\eta'\cos(\Pi-\Pi_1).$$

Weiter habe ich für T_0R_2 den Ausdruck hergeleitet:

310a) $$T_0R_2 = \beta_1^2\eta^2 + 6\beta_1\beta_2\,\eta\eta'\cos(\Pi-\Pi_1) + \beta_2^2\eta'^2,$$

wo, übereinstimmend mit dem Vorigen, die Glieder rein erster Ordnung fortge-

lassen sind. Endlich folgt:

$$\text{310b)} \qquad \frac{d\,T_e W_2}{dv} = T_2\left(\frac{dW}{dv}\right)_2 = \tfrac{3}{2}\beta_1^2\eta^2 - 3\beta_1\beta_2\eta\eta'\cos(\Pi-\Pi_1) + \tfrac{3}{2}\beta_2^2\eta'^2.$$

Die Integration dieses Ausdrucks geschieht nach den Formeln 255); der numerische Betrag von $T_e W_2$ kann hiernach immerhin ein recht beträchtlicher sein; die Rechnung für Hestia hat gezeigt, dass er die grössten überhaupt vorkommenden Störungsglieder enthält; da sie indessen von sehr langer Periode sind, so sind sie von geringerer Bedeutung, was sich am besten übersehen lässt, wenn man sie in secularer Form darstellt (vgl. Kapitel VIII und pag. 85).

3. Für die Planeten vom Hecubatypus ist Herr Ludendorff (vgl. pag. 117) zu sehr interessanten Resultaten gelangt, die mit den eben besprochenen in Uebereinstimmung sind. Bei diesen Planeten treten auf der rechten Seite der Gleichung 309) ebenfalls Glieder der Ordnungen mk, mk^2 u. s. w. auf; es ist aber hier nicht, wie oben $\frac{d\,T_e S_2}{dv} = T_e\left(\frac{dS}{dv}\right)_2$ zu setzen. Vielmehr hat man

$$\frac{d\,T_e S_2}{dv} = T_e\frac{dS_2}{dv} = T_e\left\{\left(\frac{dS}{dv}\right)_2 - \left(\frac{dS_0}{dv}\right)_2 - \left(\frac{dS_1}{dv}\right)_2\right\}.$$

$\left(\frac{dS_0}{dv}\right)_2$ enthält auch hier keine Glieder der Form A, aber $\left(\frac{dS_1}{dv}\right)_2$ enthält solche und zwar von der Ordnung k^2. Demnach würde die Funktion $T_e S_2$ Glieder der Ordnungen $\frac{k^2}{m}$, $\frac{k^3}{m}$, $\frac{k^4}{m^2}$, k, k^2 u. s. w. enthalten. Herr Ludendorff hat nun bewiesen, dass sich die Glieder der Ordnungen $\frac{k^2}{m}$ und k gänzlich, sowie die der Ordnungen $\frac{k^3}{m}$ und $\frac{k^4}{m^2}$ mit gewissen Modifikationen gegenseitig aufheben. Es steht darum zu vermuten, dass auch bei den charakteristischen Planeten der ersten Klasse die Funktion S von der Ordnung k^2 ist, wenn auch der Beweis hierfür noch nicht in aller Vollständigkeit gegeben ist.

Die grössten Glieder der Form A, welche in W_2 auftreten können, hat Herr Ludendorff in seiner Abhandlung pag. 34 gegeben; dieselben können eine gewisse obere Grenze nicht überschreiten, da δ_2, das eigentlich an Stelle von δ in den Ausdrücken Herrn Ludendorffs stehen muss, nicht beliebig klein werden kann.

§ 4.

Die Glieder höheren als zweiten Grades und allgemeine Bemerkungen über die charakteristischen Planeten.

1. Bei den gewöhnlichen Planeten war gezeigt worden, dass die Mitnahme des einen oder des anderen Gliedes dritten Grades nur in Ausnahmefällen ge-

boten ist. Handelt es sich jedoch um charakteristische Planeten, so kann die Mitnahme solcher Glieder ernstlich in Frage kommen und namentlich bei den kritischen Planeten ist sie geboten, wenn man Resultate von ausreichender Genauigkeit erhalten will. Es handelt sich dabei nicht um die Glieder höheren als zweiten Grades in der Entwicklung der Störungsfunktion, d. h. in den Ausdrücken für Q, P und Z, welche wir oben vernachlässigt haben; denn die A-, B- und C-Coefficienten, welche dort vorkommen, sind sämmtlich rein erster Ordnung. Die Glieder in diesen Ausdrücken fallen bei den charakteristischen Planeten durchaus in ähnlicher Weise wie bei den gewöhnlichen und zwar nach den Potenzen der Excentricitäts- und Neigungsmoduln.

Die Formeln 190), 201) u. s. w. zeigen aber, dass bei Integration eines Gliedes n-ten Grades auch Glieder von höherem als n-ten Grade entstehen, da die Funktion V in den Argumenten vorkommt, worauf wir oben schon Rücksicht genommen haben. Es wird sich zeigen, dass bei den kritischen Planeten solche Glieder höheren Grades mitzunehmen sind, welche aus den mit $\frac{dV}{dv}$ multiplicirten Gliedern in den genannten Formeln entstehen.

Nehmen wir z. B. die Formel 190), welche bei Integration der Glieder nullten Grades in S und W anzuwenden ist:

$$\int \frac{\sin}{\cos} nw\,dv = \mp \frac{1}{n(1-\mu_1)} \frac{\cos}{\sin} nw + \frac{\mu}{1-\mu_1} \int \frac{dV}{dv} \frac{\sin}{\cos} nw\,dv.$$

Die aus dem zweiten Glied rechter Hand entstehenden Glieder will ich nach Gyldén's Vorgang „exargumentale Glieder" nennen; man erhält sie, indem man für $\frac{dV}{dv}$ seinen Wert einsetzt; da die Funktion V bei uns nur langperiodische Glieder der Formen A und C enthält, so erzeugt ihr Produkt mit gewöhnlichen Gliedern nur wieder gewöhnliche Glieder; und diese erzeugen ihrerseits bei ihrer Integration wieder neue exargumentale Glieder, so dass man eine Reihe erhält, welche einmal nach positiven Potenzen von $\frac{dV}{dv}$ und ausserdem nach negativen Potenzen des zu dem Gliede gehörigen Divisors fortschreitet. Wir wollen uns dieses Verhältniss klar machen, indem wir annehmen, die Integration

$$311)\qquad \int \frac{\sin}{\cos} (\lambda_n v - nV)\,dv$$

sei auszuführen. Die Reihe der exargumentalen Glieder schreitet dann fort nach positiven Potenzen von $n\frac{dV}{dv}$ und nach negativen von λ_n (oder wenigstens von Grössen, die sich von λ_n nur um Grössen der Ordnung δ_1 unterscheiden). Auch die Faktoren von v in den exargumentalen Gliedern können sich von λ_n nur um Grössen dieser Ordnung unterscheiden. Ist also das Glied 311) ein ge-

wöhnliches, so sind die zugehörigen exargumentalen Glieder auch gewöhnliche, und die Reihe schreitet nach Potenzen von $\frac{dV}{dv}$ fort, fällt also in derselben Weise, wie die nach Potenzen von R oder S fortschreitenden Reihen; da aber V mindestens ersten Grades ist, so fallen diese exargumentalen Glieder auch noch nach den Potenzen der Excentricitätsmoduln; man wird übereinstimmend mit dem Vorigen auch hier die Glieder dritten Grades vernachlässigen.

Ist das Glied 311) ein elementares, so ist der Faktor n von V stets gleich Null; es treten dann überhaupt keine exargumentalen Glieder auf; darum ist auch z. B. stets

$$\frac{d\,T_n S_n}{dv} = \left(\frac{d\,T_n S}{dv}\right)_n.$$

Wir müssen aber den Fall besonders beachten, in dem das Glied 311) von der Form C also charakteristisch ist, denn um ihn dreht sich in erster Linie die Frage nach der Brauchbarkeit unserer Methode. Die Reihe der exargumentalen Glieder schreitet hier nach Potenzen der Grösse $\frac{1}{\delta_1}\frac{dV}{dv}$ fort und es fragt sich, ob δ_1 klein genug werden kann, um diese Reihe zur Divergenz zu bringen. Ich habe bereits in den Astronomischen Nachrichten No. 3346 gezeigt, dass dies nicht der Fall ist, will aber hier diese Frage etwas specialisiren und mich zunächst wieder an die Planeten vom Hecubatypus halten. Wir hatten oben die Gleichung

$$\left(\frac{dV}{dv}\right)_\varrho = \gamma_2\,\eta\cos(2w - \mathrm{v}) + \gamma_3\,\eta'\cos(2w - \mathrm{v}_1)$$

abgeleitet und die Coefficienten γ_2 und γ_3 von der Ordnung k d. h. $\frac{m}{\delta_1}$ gefunden. Wir nehmen zunächst an, dass δ_1 nicht sehr klein ist, so werden die besprochenen Reihen, welche nach Potenzen von Grössen der Ordnung $\frac{m}{\delta_1^2}\varkappa_n$ fortschreiten, offenbar stark genug fallen. Lassen wir δ_1 aber abnehmen bis zu einem Wert von der Ordnung

$$\sqrt{m},$$

so wird die Reihe weniger stark fallen, für diesen Wert von δ_1 aber immer noch ebenso stark, wie eine Reihe, welche nach den Potenzen der $\varkappa_n$ fortschreitet, also im Wesentlichen ebenso wie die Entwicklung der Störungsfunktion. In diesem Falle bietet die Integration keine Schwierigkeiten und man wird die Glieder dritten Grades im Allgemeinen fortlassen.

2. Anders stellt sich die Sache, wenn δ_1 kleiner wird als eine Grösse von der Ordnung $\sqrt{m}$; dann fällt die Reihe schwächer, und man ist gezwungen, die

exargumentalen (und nur diese) Glieder höheren als zweiten Grades mitzunehmen, so weit wie es ihre numerischen Beträge erfordern. Die Planeten, welche unter die letztere Klasse fallen, sind es, welche ich kritische nenne. Es ist noch die Frage, ob es überhaupt solche in unserem Sonnensysteme giebt; vielleicht gehören Hilda und Ismene zu ihnen. Indessen kann δ_1 niemals so klein werden, dass unser Verfahren unbrauchbar wird, was ich jetzt zeigen will.

Dieser Beweis ist in ganz analoger Weise zu führen, wie ich ihn für die Glieder nullten Grades bereits gegeben habe. Greifen wir zurück zur Gleichung 262), indem wir uns dort sämmtliche Glieder der höheren Ordnungen hingeschrieben denken, soweit sie nicht rein zweiter Ordnung sind:

$$\text{pars}\left(\frac{d^2R}{dv^2}+R\right)_0 = (p_1+p_1'\beta_1+p_1''\beta_1^2+\cdots\cdots)\cos 2w.$$

Die Convergenz der Reihe rechter Hand wurde pag. 132 bewiesen. Integriren wir die vorige Gleichung, so wird der Teil des Integrals, welcher nullten Grades ist,

$$\text{pars}\, R_0 = \beta_1 \cos 2w.$$

Ausserdem treten aber exargumentale Glieder auf, welche von den Formen D und B sind; die der Form B führen wir zu (ϱ) hinüber, so dass der betreffende Teil von R durch eine Reihe der Form

312) $$\text{pars}\, R = \sum_1^\infty \frac{a_n m^n}{\delta_1^{2n-1}} \varkappa^{n-1} \cos[(1-\delta_n)v + D_n]$$

sich darstellt, wo die a_n Coefficienten bedeuten, welche von der Ordnung Eins sind, wenn sie sich auch von der Einheit numerisch erheblich unterscheiden können. Streng genommen fallen sie nach Potenzen des Verhältnisses $\alpha = \frac{a}{a'}$; diese Abnahme ist jedoch vollkommen illusorisch, da sehr grosse Zahlenfaktoren hinzutreten. $\varkappa$ soll eine Grösse von der Ordnung der Excentricitätsmoduln bezeichnen, und die δ_n sind Grössen von der Ordnung δ_1 resp. δ_2.

Wenn wir nun in ähnlicher Weise die charakteristischen Glieder ersten Grades in der Gleichung 184), also den Ausdruck $\left(\frac{d^2R}{dv^2}+R\right)_1$ integriren, so erhalten wir den hieraus entspringenden Teil von R in der Form:

312a) $$\text{pars}\, R = \sum_1^\infty \frac{a_n' m^n}{\delta_1^{2n-1}} \varkappa^n \cos[(1-\delta_n')v + D_n'],$$

wo ich a_n' und δ_n' schreibe, da diese Grössen mit den in 312) figurirenden nicht identisch sind; indessen sind sie von derselben Ordnung.

Wenn wir ebenso mit den Gliedern zweiten und höheren Grades verfahren, so erhalten wir ähnliche Gleichungen und wenn man dieselben alle zusammenfasst, so stellt sich der Teil von R, welcher r-ten Grades ist, durch die Reihe

313) $$R_r = \sum_{n=1}^{n=r+1} \frac{a_n m^n}{\delta_1^{2n-1}} x^r \cos[(1-\delta_n)v - D_n]$$

dar, welche Gleichung mit der allgemeineren Gleichung 21) in den Astronomischen Nachrichten 3346 verglichen werden kann. Da wir hier nnr von den kritischen Planeten handeln wollen, also δ_1 seiner Grössenordnung nach kleiner als $\sqrt{m}$ annehmen wollen, so werden die Glieder der Reihe 313) *anwachsen*; da die Reihe aber *endlich* ist, so kommt ihre Convergenz überhaupt nicht in Frage, ihr letztes Glied ist das grösste, und damit rechtfertigt sich das Fortlassen der Glieder höherer Grade in der Entwicklung der Störungsfnnktion gegen die entsprechenden exargumentalen.

Wenn wir das eben Gesagte bedenken, so können wir für den absolnten Betrag von R, allerdings nur mit Berücksichtigung der grössten Glieder, wie folgt, schreiben:

314) $$\text{pars}\,|R| = \sum_1^\infty \frac{b_n m^n}{\delta_1^{2n-1}} x^{n-1}.$$

Es sind dies dieselben Glieder, dic in 312) anftreten, indessen müssen sie hier sämmtlich positiv genommen werden, so dass die b_n positive Constanten von der Ordnung Eins sind. Die Convergenz der Reihe 314) ist zn untersnchen.

Hierzn wollen wir die Relation zwischen δ_1 und δ entwickeln, d. h. die Relation 265):

$$\delta_1 = \delta - 2\mu\gamma.$$

γ ist der constante Teil der Fnnktion $\frac{dW}{dv}$ soweit er nicht rein erster Ordnung ist. Der Hanptteil von γ entsteht also ans dem Gliede $3R^2$ in der Gleichung 185), und man findet demnach, wenn man die Reihe 314) bedenkt, für γ im Wesentlichen eine Reihe folgender Art:

315) $$\gamma = \sum_1^\infty \frac{c_n m^{2n}}{\delta_1^{4n-2}} x^{2n-2},$$

wonach

315a) $$\delta_1 = \delta - 2\mu \sum \frac{c_n m^{2n}}{\delta_1^{4n-2}} x^{2n-2}.$$

Diese beiden Gleichnngen sind wieder cin Specialfall der Gleichungen 26) und 27) in den Astronomischen Nachrichten No. 3346; die c_n sind Grössen von derselben Ordnung wie die a_n und b_n, aber stets positiv.

Aus der Gleichung 315a) folgt aber für jeden beliebigen Wert von δ, die Null eingeschlossen, ein solcher Wert von δ_1^2, für den alle hier angeführten Reihen, also auch 314) und 312) unbedingt convergiren, nnd man sieht unmittelbar, dass δ_1 nicht beliebig klein werden kann, dass sich also im Systeme der kleinen Planeten Lücken zeigen müssen, die sich um die Commensurabilitätsstellen grnppiren.

Hiermit ist die Branchbarkeit unserer Integrationsmethode bewiesen für jeden möglichen Wert der mittleren Bewegung, natürlich unter der Voraussetzung der in der Einleitung hervorgehobenen Bedingungen. Wie stark die nnmerische Convergenz der ersten Glieder der Reihe 312) und der analogen ist, lässt sich freilich nicht ohne Weiteres sagen; es scheint, als ob es kritische Planeten geben könnne, für welche sie ziemlich weit fortgesetzt werden müssen. Man kann übrigens aus dem Vorhergehenden schliessen, dass für die charakteristischen Planeten der ersten Klasse δ_1 jedenfalls nicht unter die Grenze $\sqrt{m\varkappa}$ sinken kann.

Achtes Kapitel.

Ueber die bei den Rechnungen zu beobachtende Genauigkeit und über die Bedeutung der elementaren Glieder für die Praxis, sowie über ihre Darstellung in secularer Form.

1. Wir wollen uns jetzt Rechenschaft darüber geben, bis zu welchem Betrage wir Störungsglieder vernachlässigen können, wenn wir die Coordinaten des gestörten Körpers innerhalb der gewünschten Genauigkeitsgrenze darstellen wollen. Sei ε' eine kleine Grösse, welche die ungefähre obere Grenze bedenten soll, bis zu welcher Fehler in der Darstellung der geocentrischen Coordinaten gestattet sein sollen, so haben wir die Bedingungen

$$\cos\delta\, d\alpha < \varepsilon', \qquad d\delta < \varepsilon'$$

zu erfüllen, wo α und δ die geocentrische Rectascension nnd Declination bezeichnen und unter $d\alpha$ nnd $d\delta$ natürlich die absoluten Beträge dieser Grössen zu verstehen sind. Da nun aber

$$\cos\delta \frac{\partial\alpha}{dr} \leqq \frac{1}{\varDelta}, \qquad \cos\delta \frac{\partial\alpha}{dv} \leqq \frac{r}{\varDelta}, \qquad \cos\delta \frac{\partial\alpha}{d\mathfrak{z}} < \frac{r}{\varDelta},$$

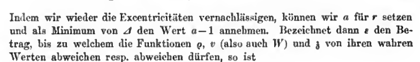
$$\frac{\partial\delta}{dr} < \frac{1}{\varDelta}, \qquad \frac{\partial\delta}{dv} < \frac{r}{\varDelta}, \qquad \frac{\partial\delta}{d\mathfrak{z}} \leqq \frac{r}{\varDelta},$$

wo r, v und $\mathfrak{z}$, wie im Vorigen, Radiusvektor, Länge in der Bahn und Sinus der Breite des Planeten, sowie $\varDelta$ sein Abstand von der Erde ist; und da ferner mit Vernachlässigung der Excentricität (Gleichung 2)

$$d\varrho = \frac{dr}{r},$$

so erhalten wir die Bedingungen

$$\frac{r}{\varDelta} d\varrho < \varepsilon', \qquad \frac{r}{\varDelta} dv < \varepsilon', \qquad \frac{r}{\varDelta} d\mathfrak{z} < \varepsilon'.$$



Indem wir wieder die Excentricitäten vernachlässigen, können wir a für r setzen und als Minimum von $\varDelta$ den Wert $a-1$ annehmen. Bezeichnet dann ε den Betrag, bis zu welchem die Funktionen ϱ, v (also auch W) und $\mathfrak{z}$ von ihren wahren Werten abweichen resp. abweichen dürfen, so ist

$$\varepsilon = \frac{a-1}{a} \varepsilon'.$$

In der folgenden kleinen Tabelle gebe ich für n und a als Argumente den Wert von $\frac{a-1}{a}$, sowie den Betrag von ε in Bogenmaass und von $\log \varepsilon$ in absolutem Maass, wenn ε' gleich einer Bogenminute angenommen wird:

Tabelle III.

n	$\log a$	$\log \frac{a-1}{a}$	für $\varepsilon' = 1'$ $\log \varepsilon$	ε
400″	0.632	9.88	6.34	45″
600″	0.515	9.84	6.30	41″
800″	0.431	9.80	6.26	37″
1000″	0.367	9.76	6.22	34″
1200″	0.314	9.72	6.18	31″

Den Werten der dritten und vierten Columne ist selbstverständlich -10 hinzuzufügen.

Diese Tafel ist sehr lehrreich: sie zeigt namentlich, dass die absolute Bahn, welche von der wahren nur um Beträge von der störenden Masse abweicht, nicht ausreichend ist, um die Coordinaten der Planeten innerhalb einer Bogenminute darzustellen. Dies ist der Grund, warum ich auf die Entwicklungen des sechsten Kapitels für die gewöhnlichen Glieder einen gewissen Wert gelegt habe. Es wird sich gleich zeigen, dass ihre Berücksichtigung in praktischer Hinsicht wichtiger ist als die der elementaren Glieder.

Wenn wir in den Funktionen ϱ, W und $\mathfrak{z}$ alle Störungsglieder fortlassen, deren absolnter Betrag kleiner als ε ist, so können wir natürlich nicht erwarten, dass die Fehler $d\varrho$, dv und $d\mathfrak{z}$ auch unterhalb dieser Grösse bleiben. Es lässt sich überhaupt nicht leicht ein Schluss ziehen, bis zu welcher Grösse man Störungsglieder fortlassen kann, wenn man ε' einen gewissen Betrag erteilt; denn es wären noch weitere Untersuchungen nötig, um festzustellen, welchen Betrag

die Summe der fortgelassenen Glieder erreichen kann. Wir werden uns damit begnügen, eine gewisse Grenze für die Grösse der fortzulassenden Störungsglieder anzunehmen, welche ein gewisser Bruchteil von ε und willkürlich zn wählen ist. Wenn man die Störnngsglieder fortlässt, welche kleiner als etwa $\frac{\varepsilon}{3}$ sind, so wird man erwarten dürfen, dass ε die in obiger Tabelle gegebenen Werte nicht erheblich übersteigen wird, und also die Coordinaten im Allgemeinen bis auf die gewünschte Genauigkeit von 1' dargestellt sein werden; natürlich vorausgesetzt, dass die Bahnelemente genau genug bekannt sind; diese müssen wir eben dementsprechend bestimmen.

Es wird im Allgemeinen keine Schwierigkeit machen, die gewöhnlichen Glieder innerhalb der festgesetzten Genauigkeitsgrenze zn berechnen, nnd es wird anch gerechtfertigt sein, wenn wir die Saturnsstörungen bei Seite lassen, da sie in der Regel nnterhalb dieser Grenze liegen.

2. Indessen würde die Auswertnng der elementaren Glieder mit der gleichen Schärfe so gut wie unausführbar sein, und es würde anch den Zwecken der praktischen Rechnung durchans nicht entsprechen, wenn man sie, absolut genommen, ebenso genau berechnen wollte, wie die gewöhnlichen; denn sie ändern ihre Werte mit der Zeit so langsam, dass sie zum grössten Teile mit den Integrationsconstanten vereinigt, d. h. bei der Rechnung fortgelassen werden können.

Betrachten wir zunächst die elementaren Glieder in der Funktien ϱ, und nehmen wir an:

$$316)\quad (\varrho) = \varkappa_a \cos[(1-\varsigma)v - \Gamma_a] + \Sigma\varkappa_n \cos[(1-\varsigma_n)v - \Gamma_n] + \Sigma\varkappa_r \cos[(1-\varsigma_r)v - \Gamma_r]$$

sei der strenge[1]) Ausdrnck von (ϱ), sowie $\varkappa_a$ nnd Γ_a die wahren Werte der beiden Integratiensconstanten, also dieselben Grössen, welche Gyldén „absolnte Elemente" nennt. Die $\varkappa_n$ seien diejenigen der $\varkappa$-Coefficienten, welche bei der Störnngsrechnung berücksichtigt worden sind resp. berücksichtigt werden müssen und die $\varkappa_r$ diejenigen, welche vernachlässigt werden können. Wir wollen sehen, wie gress die $\varkappa_r$ sein dürfen. Wenn man die letzteren bei Seite lässt nnd die Resnltate der Rechnnng mit den Beobachtungen vergleicht, se wird man bei der Elementenbestimmung offenbar nicht die wahren Werte ven $\varkappa_a$ und Γ_a finden; ich will vielmehr die aus den Beobachtungen bestimmten Werte dieser Constanten mit $\varkappa$ und Γ bezeichnen, se dass der aus der Rechnnng resultirende Wert ven (ϱ) der folgende ist:

$$(\varrho) = \varkappa \cos[(1-\varsigma)v - \Gamma] + \Sigma\varkappa_n \cos[(1-\varsigma_n)v - \Gamma_n].$$

---

1) Dies gilt eigentiich nur', wenn die Summen rechter Hand convergiren; ist dies nicht der Faii, so ist 316) nur ein genäherter Ausdruck, jedenfalls aber ein so weit genähertar, wie es mit Rücksicht auf unsere Anfgabe erforderlich ist. Ueber die absolnten Beträge der $\varkappa_r$ brauchen wir keine Voraussetzung zu machen.

Von letzterem nehme ich an, dass er um $\Delta\varrho$ fehlerhaft ist und erhalte dann aus der Vergleichung mit obigem strengen Ausdruck:

$$\begin{aligned}\Delta\varrho &= \varkappa_0 \cos[(1-\varsigma)v-\Gamma_0]-\varkappa\cos[(1-\varsigma)v-\Gamma]+\Sigma\varkappa_r\cos[(1-\varsigma_r)v-\Gamma_r]\\ &= \cos(1-\varsigma)v\{\varkappa_0\cos\Gamma_0-\varkappa\cos\Gamma+\Sigma\varkappa_r\cos[(\varsigma_r-\varsigma)v+\Gamma_r]\}\\ &\quad+\sin(1-\varsigma)v\{\varkappa_0\sin\Gamma_0-\varkappa\sin\Gamma+\Sigma\varkappa_r\sin[(\varsigma_r-\varsigma)v+\Gamma_r]\}.\end{aligned}$$

Sei nun v_0 derjenige Wert, den die Länge v in der Mitte des Zeitraums annimmt, auf den man die Rechnungen ausdehnen will; es darf nicht vergessen werden, dass wir hier v nicht wie in der elliptischen Theorie in Perioden von 360^0 zählen dürfen, sondern von $-\infty$ bis $+\infty$, da es an Stelle von t als unabhängige Veränderliche auftritt. In der Regel wird man es so einrichten, dass v_0 möglichst nahe der Null liegt, dass man also in der ersten Hälfte des in Betracht kommenden Zeitraums mit negativem v operirt.

Wir können nun in den Klammern der vorigen Gleichung die Glieder, welche $(\varsigma_r-\varsigma)v$ im Argument enthalten, nach Potenzen von $(\varsigma_r-\varsigma)(v-v_0)$ entwickeln und schon die zweiten Potenzen dieser Grössen fortlassen, da sie während eines Zeitraums von 100 Jahren sehr klein bleiben. Dann wird:

317) $$\begin{aligned}\Delta\varrho &= \cos(1-\varsigma)v\{\varkappa_0\cos\Gamma_0-\varkappa\cos\Gamma+\Sigma\varkappa_r\cos[(\varsigma_r-\varsigma)v_0+\Gamma_r]-\Sigma(\varsigma_r-\varsigma)\varkappa_r(v-v_0)\sin[(\varsigma_r-\varsigma)v_0+\Gamma_r)\}\\ &\quad+\sin(1-\varsigma)v\{\varkappa_0\sin\Gamma_0-\varkappa\sin\Gamma+\Sigma\varkappa_r\sin[(\varsigma_r-\varsigma)v_0+\Gamma_r]+\Sigma(\varsigma_r-\varsigma)\varkappa_r(v-v_0)\cos[(\varsigma_r-\varsigma)v_0+\Gamma_r]\}.\end{aligned}$$

Die ersten drei Glieder in den Klammern sind Constanten, und da man die Bestimmung der Constanten aus den Beobachtungen naturgemäss so vornimmt, dass die letzteren möglichst gut dargestellt werden, so erhalten $\varkappa$ und Γ offenbar die Werte, welche durch die beiden Gleichungen:

318) $$\begin{aligned}\varkappa\cos\Gamma &= \varkappa_0\cos\Gamma_0+\Sigma\varkappa_r\cos[(\varsigma_r-\varsigma)v_0+\Gamma_r]\\ \varkappa\sin\Gamma &= \varkappa_0\sin\Gamma_0+\Sigma\varkappa_r\sin[(\varsigma_r-\varsigma)v_0+\Gamma_r]\end{aligned}$$

definirt sind, und der Fehler in (ϱ) wird folgenden Wert haben:

318a) $$\Delta\varrho = \Sigma(\varsigma_r-\varsigma)\varkappa_r(v-v_0)\sin[(1-\varsigma_r)v-(\varsigma_r-\varsigma)v_0-\Gamma_r].$$

Dieser Betrag soll nun nach dem Vorigen kleiner als ε sein. Wie bei den gewöhnlichen Gliedern, so wird es auch hier schwierig sein, sich einen Begriff von der Summe der Reihe in voriger Gleichung zu machen, und wir stellen wieder die Bedingung auf, dass jedes einzelne vernachlässigte Glied kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$ sein soll. Wir haben also die Bedingung

$$(\varsigma_r-\varsigma)\varkappa_r(v-v_0) < \frac{\varepsilon}{3}$$

zu erfüllen.

Sei nun

$$\text{pars}\left\{\frac{d^2\varrho}{dv^2}+\varrho\right\} = b_r \cos[(1-\varsigma_r)v-\Gamma_r]$$

ein Glied in der Differentialgleichung für (ϱ), aus dem ein Glied mit dem Coefficienten $\varkappa_r$ in (ϱ) entsteht, so ist nach den Ausführungen pag. 101

$$\varkappa_r = \frac{b_r}{2(\varsigma_r-\varsigma)},$$

und die obige Bedingung geht in die folgende über:

$$b_r < \frac{2\varepsilon}{3(v-v_0)}.$$

Bezeichne ich

319) $$\varepsilon_1 = \frac{2\varepsilon}{v-v_0},$$

so ist also $\frac{\varepsilon_1}{3}$ die Grenze, bis zu welcher Störungsglieder von der Form B in der **Differentialgleichung** für ϱ mitzunehmen sind. Wir können hier unbedenklich $v-v_0 = n(t-t_0)$ setzen, wo t_0 die Mitte des betrachteten Zeitraums, also im Maximum $t-t_0 = \pm 50$ Jahre anzunehmen ist. Die folgende Tabelle giebt für n als Argument die Werte von ε_1, wenn ε die in Tabelle III gegebenen Werte hat; $t-t_0$ ist auf 50 Jahre berechnet, $n(t-t_0)$ in Graden und $\log n(t-t_0)$ in absoluter Zahl angegeben.

Tabelle IV.

n	$n(t-t_0)$	$\log n(t-t_0)$	für $\varepsilon' = 1'$ $\log \varepsilon_1$
400″	2030°	1.549	5.09–10
600″	3040°	1.725	4.88–10
800″	4060°	1.850	4.71–10
1000″	5070°	1.947	4.57–10
1200″	6090°	2.026	4.45–10

Die b_r sind vom ersten, dritten u. s. w., überhaupt immer von einem ungeraden Grade (siehe pag. 120) und ausserdem mit irgend einer Potenz der störenden Masse multiplicirt; aus dem Gesagten geht also hervor, dass die elementaren Glieder ersten Grades fortgelassen werden können, wenn sie in der Differentialgleichung für ϱ rein zweiter Ordnung sind, und dass die Glieder dritten Grades im Allgemeinen schon fortgelassen werden können, wenn sie dort rein erster Ordnung sind, d. h. bei allen Planeten mit Ausnahme der kritischen, und auch

hier wären nur die exargumentalen Glieder zu berücksichtigen. Bei sehr grossen Excentricitäten wird man eventuell noch das eine oder das andere Glied dritten Grades in der Entwicklung der Störungsfunktion mit Vorteil mitnehmen; darauf will ich aber hier nicht eingehen. Die obige Tafel zeigt, wie weit man in jedem einzelnen Falle mit der Genauigkeit zu gehen hat.

Auch über die Bestimmung der Grösse ς müssen wir einige Bemerkungen machen, um zu sehen, mit welcher Genauigkeit ihre Kenntniss erforderlich ist. Wir hätten in Gleichung 316) statt ς eigentlich auch ς_a schreiben müssen, wo ς_a den wahren Wert dieser Grösse bezeichnet; man überzeugt sich jedoch unschwer durch Untersuchungen, die den eben gemachten ganz ähnlich sind, dass wir auch bei ihrer Bestimmung in der Differentialgleichung für ϱ Glieder fortlassen können, deren Betrag kleiner als $\frac{\varepsilon_1}{3}$ ist.

3. Es ist aber aus dem Gesagten noch eine wichtige Thatsache zu folgern, die oft nicht genügend gewürdigt wird. Nämlich bei der Berechnung der Bewegung eines Planeten während eines beschränkten Zeitraums spielen die sogenannten kleinen Integrationsdivisoren von der Ordnung der ς_n überhaupt gar keine Rolle. Es ist ganz gleichgiltig, wie klein sie sind, und wie gross der dementsprechende Coefficient $\varkappa_n$ in der Funktion (ϱ) werden würde. Es kommt nur auf die Grösse der entsprechenden Glieder in der **Differentialgleichung** an, und die Brauchbarkeit unseres Integrationsverfahrens während eines beschränkten Zeitraums hängt lediglich von der Erfüllung der Bedingungen pag. 12 ab.

4. Ich habe schon in der Einleitung gesagt, dass wir uns damit begnügen können, die Bahn Jupiters als elliptisch anzusehen; dennoch habe ich für die Funktion (ϱ') den vollständigen Ausdruck

$$(\varrho') = \Sigma\varkappa'_n \cos[(1-\varsigma'_n)v' - \Gamma'_n]$$

eingeführt. Ich habe dies lediglich gethan, um meinen Ausführungen eine grössere Allgemeinheit zu geben, und um zu erreichen, dass die in dieser Abhandlung gemachten Untersuchungen auch bei eingehenderen Arbeiten als Ausgangspunkt dienen können.

Für unsere gegenwärtigen Zwecke können wir den Ausdruck kürzen, indem wir den elliptischen dafür setzen und einfach schreiben:

$$(\varrho') = \eta' \cos(v' - \Pi'),$$

wo η' und Π' als constant anzusehen sind.

Da es von Interesse ist, zu sehen, wie gross der Fehler sein kann, der dadurch in unseren Rechnungen entsteht, so wollen wir ihn feststellen durch eine Betrachtung, die der Obigen ganz analog ist. Nach Gyldén ist (ϱ') im Wesentlichen durch den Ausdruck

320) $(\varrho') = \varkappa' \cos[(1-\varsigma')v' - \Gamma'] + \varkappa'_2 \cos[(1-\varsigma'_2)v' - \Gamma'_2] + \varkappa'_3 \cos[(1-\varsigma'_3)v' - \Gamma'_3]$

gegeben, wo $\varkappa'$ und Γ' die Integrationsconstanten für Jupiter sind, und wo das Glied mit dem Faktor $\varkappa'_2$ von der Einwirkung Saturns und das folgende von der Einwirkung des Uranus herrührt. $\varkappa'_2$ enthält also als Faktor den Excentricitätsmodul Saturns und $\varkappa'_3$ den des Uranus. Die Glieder dritten Grades sind hier bei Seite gelassen, und die numerischen Werte sind nach Gyldén:

$$\left.\begin{array}{lll} \log \varkappa' = 8.6252_{-10} & \log \varsigma' = 5.5175_{-10} & \Gamma' = 27^\circ.49 \\ -\varkappa'_2 = 8.1777_n{}_{-10} & -\varsigma'_2 = 6.4021_{-10} & \Gamma'_2 = 132^\circ.14 \\ -\varkappa'_3 = 7.2242_{-10} & -\varsigma'_3 = 5.3673_{-10} & \Gamma'_3 = 101^\circ.16. \end{array}\right\} 1850.0$$

Die Differenz dieser Werte gegen die Leverrier'schen ist für uns natürlich ganz bedeutungslos. Es darf nicht vergessen werden, dass stets angegeben werden muss, von welcher Epoche an v' in der obigen Gleichung gezählt ist, da davon die Werte der Γ'_n abhängen; es ist bei den Gyldén'schen Werten, wenn ich nicht irre, so gezählt, dass es zu Anfang des Jahres 1850 zwischen 0° und 360° liegt. In Analogie mit der für ϱ gegebenen Entwicklung (Gleichung 317) haben wir also zu setzen:

$$\eta' \frac{\cos}{\sin} \Pi' = \varkappa' \frac{\cos}{\sin} \Gamma' + \varkappa'_2 \frac{\cos}{\sin} [(\varsigma'_2 - \varsigma')v'_0 + \Gamma'_2] + \varkappa'_3 \frac{\cos}{\sin} [(\varsigma'_3 - \varsigma')v'_0 + \Gamma'_3],$$

wo v'_0 der Wert ist, den v' in der Mitte des Zeitraums erreicht, für den unsere Rechnung gelten soll. Da die gegenwärtigen Berechnungen der kleinen Planeten sich auf Jahrhundert 1850—1950 beziehen werden, so wird es sich empfehlen, v' vom Januar 1904 ab zu zählen, in welchem Monat die mittlere Länge Jupiters durch den Nullwert hindurch geht; mit Rücksicht darauf müssten die obigen Werte der Γ'_n reducirt werden und ebenso wird man sie auf das mittlere Aequinoctium 1900.0 beziehen. Ich unterlasse indessen hier diese Reduction, da ich im zweiten Teile doch noch auf die numerischen Grundlagen unserer Rechnungen zurückkommen muss. Die numerische Rechnung ergiebt nun für die Epoche 1850, wenn v'_0 klein ist:

$$\begin{array}{ll} \log \eta' \cos \Pi' = 8.6740_{-10} & \log \eta' = 8.6834_{-10} \\ -\eta' \sin \Pi' = 7.9981_{-10} & \Pi' = 11^\circ.91 \quad (1850.0), \end{array}$$

fast genau übereinstimmend mit Leverrier's Werten.

Der Fehler, den wir infolge der genannten Kürzung in ϱ' begehen, ist also (vgl. Gleichung 317) und 318) nahezu:

$$\begin{aligned} \varDelta\varrho' = {} & \cos(1-\varsigma')v' \{(\varsigma' - \varsigma'_2)(v' - v'_0)\varkappa'_2 \sin \Gamma'_2 + (\varsigma' - \varsigma'_3)(v' - v'_0)\varkappa'_3 \sin \Gamma'_3\} \\ & - \sin(1-\varsigma')v' \{(\varsigma' - \varsigma'_2)(v' - v'_0)\varkappa'_2 \cos \Gamma'_2 + (\varsigma' - \varsigma'_3)(v' - v'_0)\varkappa'_3 \cos \Gamma'_3\}. \end{aligned}$$

Wenn ich also für den Augenblick bezeichne:

$$\left.\begin{array}{l} c_1 \\ c_2 \end{array}\right\} = (\varsigma' - \varsigma_1') \varkappa_1' \begin{array}{c}\sin\\ \cos\end{array} \Gamma_1 + (\varsigma' - \varsigma_2') \varkappa_2' \begin{array}{c}\sin\\ \cos\end{array} \Gamma_2 ,$$

so wird

$$\Delta \varrho' = c_1 (v' - v_0') \cos(1 - \varsigma') v' - c_2 (v' - v_0') \sin(1 - \varsigma') v' ,$$

und der absolute Betrag von $\Delta \varrho'$ ist:

$$| \Delta \varrho' | = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\, (v' - v_0') ,$$

d. h. mit Annahme der numerischen Werte

$$| \Delta \varrho' | = [4.521_{-10}] (v' - v_0').$$

Da $v' - v_0'$ in 50 Jahren den Maximalbetrag von ungefähr 1520° erreicht, so wird also:

$$\log | \Delta \varrho' | = 5.944_{-10}$$

werden können.

Ein Blick auf die Tabelle III in diesem Kapitel zeigt, dass demnach der geocentrische Ort Jupiters kaum um 1′ geändert wird, und dass der Einfluss unserer Kürzung auf die Bewegung der kleinen Planeten für unsere Zwecke ganz verschwindend ist; denn das aus $\Delta \varrho'$ entspringende Glied auf der rechten Seite der Differentialgleichung für ϱ wird nach § 3 des sechsten Kapitels nur den Betrag $b_2 \Delta \varrho'$ haben. Es ist ja auch von vornherein selbstverständlich, dass die direkten Saturnstörungen grösser sein müssen.

5. In bezug auf die Funktion $\mathfrak{z}$ lassen sich genau dieselben Betrachtungen anstellen: wir werden auf der rechten Seite der Differentialgleichung für $(\mathfrak{z})$ ebenfalls Glieder fortlassen können, deren absoluter Betrag kleiner als $\frac{\varepsilon_1}{3}$ ist und wir setzen für Jupiter:

$$(\mathfrak{z}') = \sin j' \sin (v' - \sigma') ,$$

und sehen j' und σ' als Constanten an, nämlich als die mittleren Werte der Neigung und der Knotenlänge in der Mitte des in Frage kommenden Zeitraums.

6. Ich gehe nun zur Betrachtung der Glieder der Form A über. Dieselben treten in erster Linie in der Funktion W auf, und über sie habe ich bereits einige Bemerkungen in den Astronomischen Nachrichten No. 3315 gemacht. Wir wollen annehmen, dass der vernachlässigte resp. zu vernachlässigende Teil von W, der die Form A hat, durch die Gleichung:

$$W_a = \Sigma f_r \sin(\sigma_r v + A_r)$$

dargestellt ist. Auch diese Gleichung können wir, wie 316), eigentlich nur aufstellen, wenn ihre rechte Seite convergirt, was erst zu beweisen wäre; immerhin können wir annehmen, dass sie, wie 316), genähert gilt; über den Betrag der f_r machen wir keine Voraussetzung, sie können sehr gross sein. Wenn wir den letzteren Ausdruck wieder nach Potenzen von $v-v_0$ entwickeln, so wird:

321) $$W_a = \Sigma f_r \sin(\sigma_r v_0 + A_r) + \Sigma \sigma_r f_r (v-v_0) \cos(\sigma_r v_0 + A_r) - \tfrac{1}{2} \Sigma \sigma_r^2 f_r (v-v_0)^2 \sin(\sigma_r v_0 + A_r) \pm \cdots.$$

Da aber die Bahnelemente n und A wieder aus den Beobachtungen bestimmt werden, so ist der Fehler, der sich in W (also auch in v) zeigen wird, nicht gleich dem ganzen W_a; vielmehr wird der constante Teil in die Constante A und der Teil, der proportional v ist, in die mittlere Bewegung eingehen, so dass der Fehler, der sich in v zeigen wird, ist:

$$\Delta v = \tfrac{1}{2} (v-v_0)^2 \Sigma \sigma_r^2 f_r \sin(\sigma_r v_0 + A_r) \pm \cdots.$$

Δv soll nun kleiner als ε sein, so dass wir, da $\sigma_r (v-v_0)$ klein ist, die Bedingung

$$\frac{(v-v_0)^2}{2} \Sigma \sigma_r^2 f_r < \varepsilon$$

zu erfüllen haben. Ich bezeichne jetzt:

322) $$\varepsilon_2 = \frac{2\varepsilon}{(v-v_0)^2} = \frac{\varepsilon_1}{v-v_0},$$

wo wir wieder $v-v_0$ durch $n(t-t_0)$ ersetzen können nnd ich gebo in der folgenden Tabelle den Wert von ε_2 für n als Argument, wobei ich wieder $t-t_0$ zu 50 Jahren annehme:

Tabelle V.

n	für $\varepsilon' = 1'$ $\log \varepsilon_2$
400"	3.54–10
600"	3.15–10
800"	2.86–10
1000"	2.62–10
1200"	2.42–10

Wir können dann in W die Glieder fortlassen, deren absoluter Betrag

$$|f_r| < \frac{\varepsilon_2}{3\sigma_r^2}$$

ist. Wenn wir setzen

323) $$\frac{dW_a}{dv} = \Sigma \gamma_r \cos(\sigma_r v + A_r),$$

so ist offenbar nach Kapitel VI

$$\gamma_r = \sigma_r f_r,$$

und unsere Bedingung geht über in

324) $$\sigma_r \gamma_r < \frac{\varepsilon_2}{3}.$$

Wir können also in der Differentialgleichung für W im Allgemeinen die Glieder vernachlässigen, deren Betrag kleiner als $\frac{\varepsilon_2}{3\sigma_r}$ ist, und hieraus kann man schon schliessen, dass die Glieder rein erster Ordnung der Form A in $\frac{dW}{dv}$ fortzulassen sind, denn sie sind sämmtlich noch mit dem Quadrat des Excentricitätsmoduls multiplicirt.

Wir müssen aber besonders achten auf diejenigen Glieder der Form A in W, die dort durch die Funktion S eingeführt werden. In bezug auf diesen Teil ist nach Gleichung 59)

$$\text{pars}\,\frac{dW_*}{dv} = S_* - 2R_*,$$

also mit Berücksichtigung von Gleichung 251b):

$$\text{pars}\,\frac{dW_*}{dv} = -3S_*,$$

wenn S_* und R_* die entsprechenden vernachlässigten Teile dieser Funktionen bedeuten. Nach 323) ist also:

$$S_* = -\tfrac{1}{3}\Sigma\gamma_r\cos(\sigma_r v + A_r).$$

Ist nun der vernachlässigte Teil von S in der Differentialgleichung für diese Funktion:

$$\frac{dS_*}{dv} = \Sigma a_r \sin(\sigma_r v + A_r),$$

so ist zu setzen:

$$\sigma_r \gamma_r = 3a_r,$$

und die Bedingung

325) $$a_r < \frac{\varepsilon_2}{9}$$

bleibt zu erfüllen. Wir können in der Differentialgleichung für S also alle Glieder der Form A fortlassen, deren absoluter Betrag kleiner als $\frac{\varepsilon_2}{9}$ ist. Die ϱ_r sind aus

unserer Bedingungsgleichung ebenso gänzlich verschwunden, wie es oben bei den Auseinandersetzungen für die Funktion ϱ der Fall war; wir haben wieder einen direkten Ueberblick, wie weit wir bei Aufstellung der Differentialgleichungen für S und W gehen müssen, um die Glieder der Form A mit genügender Schärfe zu finden; wie gross ihre Coefficienten f_r in der Funktion W sind, ist dabei von gar keinem Einfluss. Freilich scheint die Grenze $\frac{\varepsilon_2}{9}$ etwas niedrig zu sein; indessen sind diese Glieder mindestens zweiten Grades und bei der numerischen Rechnung gewinnt man die Ueberzeugung, dass die Glieder rein zweiter Ordnung in $\frac{dS}{dv}$ fast durchgängig unter dieser Grenze liegen, womit also gezeigt ist, dass die elementaren Glieder in W für die Praxis von untergeordneter Bedeutung sind.

In jedem einzelnen Falle hat man an den oben gegebenen Werten von ε, ε_1 und ε_2 einen Maassstab wie weit die numerische Genauigkeit zu treiben ist.

7. Die Hauptschwierigkeit macht es natürlich, die charakteristischen Glieder mit der erforderlichen Schärfe zu berechnen. Zunächst will ich einige Worte sagen über die charakteristischen Planeten der höheren Klassen, zu denen, streng genommen, jeder Planet gehört. Es ist einleuchtend, dass die charakteristischen Glieder der höheren Klassen nur dann merklich werden, wenn der Divisor δ_1 ausserordentlich klein ist, wenn also die Perioden dieser Glieder mit denen der elementaren auf eine Stufe zu stellen sind, und in diesem Falle gilt das eben für die elementaren Glieder Gesagte auch hier. Ob die charakteristischen Glieder höherer Klassen während eines beschränkten Zeitraums für die praktische Störungsrechnung merklich werden, hängt nicht von ihrem absoluten Betrage ab, sondern vom Betrage der ihnen entsprechenden Glieder in den **Differentialgleichungen** und da diese sicher sehr klein sind, so werden auch sie fortzulassen sein.

Die charakteristischen Glieder der niederen Klassen sind indessen mit derselben Schärfe zu berechnen, wie die gewöhnlichen, d. h. bis zum Betrage $\frac{\varepsilon}{3}$.

Es bleibt nun noch die eine wichtige Frage zu beantworten, welche Klassen von charakteristischen Planeten zu den höheren und welche zu den niederen Klassen zu zählen sind. Diese Grenze ist nicht leicht zu ziehen; sie bestimmt sich durch die Genauigkeit, mit der man die Beobachtungen während eines gewissen Zeitraums darstellen will. Ich habe die Glieder dritten Grades in der Entwicklung der Störungsfunktion vernachlässigt und damit eigentlich schon die charakteristischen Planeten der dritten Klasse zu den höheren gezählt. Ob dies gerechtfertigt ist, ist zweifelhaft und kann sich erst bei Ausführung einiger weiteren Rechnungen zeigen. Sollte es nicht der Fall sein, so ist man freilich gezwungen, für diese Planeten einige Glieder dritten und eventuell vierten Grades in der Entwicklung der Störungsfunktion zu berücksichtigen. Es werden

dies aber in allen Fällen nur wenige Glieder sein, und es erschien nicht lohnend, deswegen in der gegenwärtigen Arbeit die Entwicklungen über die Glieder zweiten Grades hinaus fortzusetzen. Wenn also auch für die äusserst wenigen Planeten, welche diesen Klassen angehören, unsere Formeln vielleicht nicht vollständig ausreichen, um ihre Coordinaten innerhalb 1' darzustellen, so ist es doch nicht schwierig, behufs genauerer Berechnung die wenigen nötigen Glieder höheren Grades hinzuzufügen.

8. Ich will nun noch einige Worte sagen über die Darstellung der elementaren Glieder in secularer Form, namentlich, um festzustellen, welche der beiden Darstellungsarten die vorteilhaftere sein dürfte. Ich habe schon pag. 85 einige Bemerkungen über diese Frage gemacht. Kürzen wir die Ausdrücke der elementaren Glieder in der Weise, dass wir die Bewegung Jupiters als elliptisch annehmen, so sind die Funktionen η und Π durch die Relationen:

$$\eta \cos \Pi = \varkappa \cos(\varsigma v + \Gamma) + \varkappa_1 \cos \Gamma_1$$

$$\eta \sin \Pi = \varkappa \sin(\varsigma v + \Gamma) + \varkappa_1 \sin \Gamma_1,$$

ausgedrückt, die an Einfachheit nichts zu wünschen übrig lassen. Die seculare Form ist sehr einfach hieraus herzustellen; es wird:

$$\eta \cos \Pi = \varkappa \cos(\varsigma v_0 + \Gamma) + \varkappa_1 \cos \Gamma_1\, v - \varsigma\varkappa (v - v_0) \sin(\varsigma v_0 + \Gamma) - \frac{\varsigma^2 \varkappa}{2}(v - v_0)^2 \cos(\varsigma v_0 + \Gamma) \pm \cdots\cdots$$

$$\eta \sin \Pi = \varkappa \sin(\varsigma v_0 + \Gamma) + \varkappa_1 \sin \Gamma_1 + \varsigma\varkappa (v - v_0) \cos(\varsigma v_0 + \Gamma) - \frac{\varsigma^2 \varkappa}{2}(v - v_0)^2 \sin(\varsigma v_0 + \Gamma) \pm \cdots\cdots,$$

wo man, wenn man will, auch die Zeit als unabhängige Veränderliche einführen kann. Das mit dem Quadrat von v multiplicirte Glied erreicht allerdings in einem Zeitraum von 100 Jahren nicht den von uns als Genauigkeitsgrenze angenommenen Betrag, kann also bei Seite gelassen werden.

Wie sich die Integrationen des sechsten und siebenten Kapitels stellen werden, wenn man die elementaren Glieder in secularer Form giebt, ist ohne Schwierigkeit einzusehen, und gerade hier bietet die Darstellung in periodischer Form einen Vorteil.

Auch die Glieder der Form A in der Funktion W stellen sich in ihrer periodischen Form so einfach dar, dass ich dieser letzteren entschieden den Vorzug geben möchte; es wird nämlich:

$$\eta^2 = \varkappa^2 + \varkappa_1^2 + 2\varkappa\varkappa_1 \cos(\varsigma v + \Gamma - \Gamma_1)$$

$$\eta\eta' \cos(\Pi - \Pi_1) = \varkappa_1 \varkappa' + \varkappa\varkappa' \cos(\varsigma v + \Gamma - \Gamma_1)$$

$$\eta'^2 = \varkappa'^2.$$

Demnach tritt hier ausser den constanten Gliedern überhaupt nur ein einziges Argument auf, und die Rechnung kann auch durch das Auftreten aussergewöhnlich kleiner Divisoren nicht erschwert werden. Will man die Glieder dennoch in secularer Form darstellen, so wird auch dies keine Schwierigkeiten machen. Sie sind hier um einen Grad kleiner als in ϱ; indessen sind sie in der Funktion W numerisch in vielen Fällen grösser, namentlich wenn es sich um charakteristische Planeten handelt, so dass dann das mit v^2 multiplicirte Glied berücksichtigt werden muss; und nur dieses, da die vorhergehenden sich mit den Integrationsconstanten vereinigen.

Dies sind die Gründe, die mich bewogen haben, die sogenannten Secularstörungen in periodischer Form zu geben.

Greifswald 1897, November. Martin Brendel.

Inhaltsverzeichniss.

Einleitung.

Seite

1. Vorbemerkungen 3
2. Bemerkungen über die Entwicklungen nach den Potenzen der Excentricitäten und Neigungen 5
3. Bemerkungen über die Entwicklungen nach den Potenzen der störenden Masse . 6
4. Allgemeine Bemerkungen über die angewandte Methode 6
5. Bemerkungen über die angewandte unabhängige Veränderliche 7
6. Disposition der vorliegenden Arbeit 8
7. Bemerkungen über die Convergenzfrage 9
8. Persönliche Bemerkungen 10

Erstes Kapitel.

Die Grundprincipien der Gyldén'schen Störungstheorie. — Die allgemeine Form der Differentialgleichungen und ihrer Integrale. — Die Gyldén'schen Coordinaten ρ, η und S.

1. Vorbedingungen 11
2. Die Grundlagen der älteren Methoden 13
3. Die Grundlagen der Gyldén'schen Methoden 14
4. Die Grundlagen unserer Methode. — Die Gyldén'schen Coordinaten ρ, η und S 15
5. Allgemeine Form der Differentialgleichungen und ihrer Integrale 17
6. Definition der Gyldén'schen Coordinaten η und Π 19
7. Weiteres über die Beträge und Formen der Glieder 20

Zweites Kapitel.

Ableitung der Differentialgleichungen für die Gyldén'schen Coordinaten. — Formeln für die Bewegung des Planeten in seiner momentanen Bahnebene.

1. Definition der momentanen Bahnebene 22
2. Beziehungen zwischen den rechtwinkligen Coordinaten einerseits im Raum und andererseits in der momentanen Bahnebene 24

Seite
3. Die Differentialgleichungen für die rechtwinkligen Coordinaten in der momentanen Bahnebene 25
4. Die Differentialgleichungen für die Polarcoordinaten in der momentanen Bahnebene 26
5. Die Differentialgleichungen für die Gyldén'schen Coordinaten 27
6. Einführung des Gyldén'schen absoluten Radiusvektors (r), der excentrischen Anomalie ε und der mittleren Anomalie M 29
7. Einführung der reducirten Zeit (t) und der Hilfscoordinaten W und Ξ. Die Differentialgleichung für W 31
8. Ueber die Berechnung der Funktion Ξ 33
9. Zusammenstellung der Formeln zur Berechnung der Polarcoordinaten r und v als Funktionen der Zeit und Vergleich mit Hansen's Formeln 34

Drittes Kapitel.

Formeln für die heliocentrische Bewegung des Planeten. — Lage der momentanen Bahnebene zu der als Fundamentalebene gewählten Ekliptik.

1. Formeln für die heliocentrische Länge und Breite 35
2. Die Differentialgleichung für den Sinus der Breite oder die Funktion $\mathfrak{z}$ 36
3. Ueber die Form der Funktion $\mathfrak{z}$ 38
4. Die Differentialgleichung für die heliocentrische Länge 39
5. Integration der vorigen Differentialgleichung 41
6. Bestimmung der Funktionen i, Ω und Σ, welche die Lage der momentanen Bahnebene definiren 43

Viertes Kapitel.

Entwicklung der Störungsfunktion Ω und ihrer partiellen Ableitungen Q, P, und Z.

1. Entwicklung nach der Neigung 45
2. Entwicklung von $a(\Omega)$ 47
3. Entwicklung von $a\dfrac{d(\Omega)}{d\cos H_1}$ 53
4. Entwicklung von Q 56
5. Entwicklung von P 57
6. Entwicklung von Z 58

Fünftes Kapitel.

Transformation der für die Funktionen Q, P und Z gefundenen Ausdrücke.

1. Darstellung von ρ' und η' als Funktionen von v 59
2. Darstellung von v' und von $\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} nH_1$ als Funktionen von v 62

Seite

3. Darstellung der Produkte $\rho^{s}\rho'^{s'}\eta^{2\nu}\eta'^{2\nu'}\frac{\cos}{\sin}nH_1$ als Funktionen von v 64
4. Weitere Transformation der trigonometrischen Argumente; über den secularen Teil der Funktion W 67
5. Definitive Form der Funktion Q 70
6 Darstellung von $\mathfrak{z}'$ und h als Funktionen von v 72
7. Definitive Form des Teils von Q, der von den Neigungen abhängt 76
8. Definitive Form der Funktion P 78
9. Definitive Form der Funktion Z 80
10. Bemerkung zu den vorigen Entwicklungen 82

Sechstes Kapitel.

Integration der Differentialgleichungen für die Gyldén'schen Coordinaten. — Die gewöhnlichen Planeten.

§ 1. Vorbemerkungen.
1. Die Gesichtspunkte, unter denen die vorliegende Aufgabe gelöst werden soll 83
2. Ueber die Secularstörungen 85
3. Ueber die Giltigkeitsdauer unserer Formeln und über die seculare Variation der Constanten 86
4. Ueber die Darstellung der Coordinaten durch trigonometrische Reihen . 86
5. Definition der Excentricitäts- und Neigungsmoduln; Zerlegung der Funktionen nach dem Grade ihrer Glieder 87

§ 2. Die Glieder nullten Grades.
1. Herstellung der Funktion S_0 88
2. Herstellung der Funktion $\rho_0 = R_0$ 90
3. Herstellung der Funktion W_0 92
4. Ueber die Integrationsconstanten a und n und über die überzählige Integrationsconstante a_0 93

§ 3. Die Glieder ersten Grades.
1. Herstellung der Funktion S_1 95
2. Herstellung der Funktion R_1 97
3. Herstellung der Funktion (ρ) 101
4. Herstellung der Funktion W_1 102
5. Herstellung der Funktion $\mathfrak{Z}_1$ 103
6. Herstellung der Funktion $(\mathfrak{z})$ 105
7. Bemerkungen über die Herstellung der Funktionen i, Ω und Σ . . . 106

§ 4. Die Glieder zweiten Grades.
1. Herstellung der Funktion S_2 106
2. Ueber die Glieder der Form A in S 109
3. Herstellung der Funktion $\rho_2 = R_2$ 111
4. Herstellung der Funktion W_2 113

Seite
5. Ueber die Glieder der Form A in W 115
6. Herstellung der Funktion $\mathfrak{z}_2 = \mathfrak{Z}_2$ 118

§ 5. Die Glieder höherer Grade.
1. Die Gesetze für das Vorkommen der elementaren und charakteristischen Glieder 119
2. Ueber Berücksichtigung von Gliedern höheren als zweiten Grades . . 120

Siebentes Kapitel.

Die charakteristischen Planeten.

§ 1. Die Glieder nullten Grades.
1. Formale Darstellung der Funktionen nullten Grades 121
2. Herstellung der Funktion S_0 122
3. Herstellung der Funktion R_0 123
4. Ueber die verschiedenen Arten der mittleren Bewegung: wahre mittlere Bewegung, Bewegungsconstante und mittlere Bewegung in Länge . . 124
5. Ueber den Maximalwert des Hauptstörungsgliedes in R_0 und über die Lücke im System der kleinen Planeten bei $n = 600''$ 126
6. Bemerkungen über den Specialfall, in welchem die ungestörte Bahn des Planeten eine Kreisbahn ist 129
7. Definition der kritischen Planeten 129
8. Die Planeten vom Hildatypus und die Lücke bei $n = 450''$ 129
9. Der strenge Ausdruck für das Hauptstörungsglied nullten Grades . . . 132
10. Herstellung der Funktion W_0 133
11. Bemerkungen über die gewöhnlichen Glieder nullten Grades 133

§ 2. Die Glieder ersten Grades.
1. Formale Darstellung der Funktionen ersten Grades 133
2. Herstellung der Funktion S_1 135
3. Herstellung der Funktion R_1 138
4. Herstellung der Funktion (ρ) 143
5. Herstellung der Funktion W_1 145
6. Bemerkung über die gewöhnlichen Glieder ersten Grades 145
7. Herstellung der Funktion $\mathfrak{z}_1$ 145
8. Bemerkungen über die Planeten vom Hilda- und Thuletypus 146
9. Ueber die charakteristischen Planeten der zweiten Klasse 146

§ 3. Die Glieder zweiten Grades.
1. Allgemeine Bemerkungen 147
2. Die Planeten vom Hestiatypus 148
3. Die Planeten vom Hecubatypus 149

§ 4. Die Glieder höheren als zweiten Grades und allgemeine Bemerkungen über die charakteristischen Planeten.
1. Die Bedeutung der exargumentalen Glieder 149

Seite

2. Die kritischen Planeten und die Convergenz der Reihe der exargumentalen Glieder. — Beweis des Vorhandenseins von Lücken bei den Commensurabilitätsstellen der mittleren Bewegungen 151

Achtes Kapitel.

Ueber die bei den numerischen Rechnungen zu beobachtende Genauigkeit und über die Bedeutung der elementaren Glieder für die Praxis, sowie über ihre Darstellung in secularer Form.

1. Ueber die erforderliche Genauigkeit bei der numerischen Berechnung der gewöhnlichen Glieder 154
2. Ueber die erforderliche Genauigkeit bei der numerischen Berechnung der elementaren Glieder der Form B 156
3. Bemerkungen über die sogenannten kleinen Integrationsdivisoren . . . 159
4. Ueber die Unsicherheit in der Darstellung der Coordinaten, welche entsteht, wenn man die Bewegung Jupiters als elliptisch annimmt . . . 159
5. Ueber die erforderliche Genauigkeit bei der numerischen Berechnung der elementaren Glieder in $\mathfrak{z}$ 161
6. Ueber die erforderliche Genauigkeit bei der numerischen Berechnung der elementaren Glieder der Form A 161
7. Ueber die erforderliche Genauigkeit bei der numerischen Berechnung der charakteristischen Glieder 164
8. Ueber die Darstellung der elementaren Glieder in secularer Form . . 165

Göttingen, Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

ABHANDLUNGEN
DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.
MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE.
NEUE FOLGE BAND 1. Nro. 3.

Ableitung

relativer Oerter des Mondes gegen die Sonne

aus heliometrischen Messungen von Sehnenlängen ausgeführt auf der Sternwarte zu Göttingen während der partiellen Sonnenfinsternisse von 1890 Juni 16/17 (Beobachter: Schur, Ambronn und Hayn) und von 1891 Juni 6 (Beobachter: Schur).

Von

Dr. Wilhelm Schur,
Professor der Astronomie und Director der Sternwarte.

Mit drei Plänen der Sternwarte nebst Verzeichniss der grösseren Instrumente.

Berlin.
Weidmannsche Buchhandlung.
1898.

Ableitung relativer Oerter des Mondes gegen die Sonne

aus heliometrischen Messungen von Sehnenlängen ausgeführt auf der Sternwarte zu Göttingen während der partiellen Sonnenfinsternisse von 1890 Juni 16/17 (Beobachter: Schur, Ambronn und Hayn) und von 1891 Juni 6 (Beobachter: Schur).

Von

Wilhelm Schur.

Mit drei Plänen der Sternwarte nebst Verzeichniss der grösseren Instrumente.

Vorgelegt in der Sitzung am 14. Mai 1898.

Die Berechnung der Beobachtungen dieser beiden Finsternisse an den Heliometern von Repsold und Fraunhofer war der Hauptsache nach schon damals erledigt; nur konnten die Beobachtungen am Repsold'schen Heliometer nicht in endgültige Form gebracht werden, weil die Theilungsfehler der Objectiv-Scalen noch nicht bestimmt waren. Nachdem letztere Untersuchung und deren Berechnung in den Jahren 1889 bis 1891 ausgeführt waren, hätten die Resultate bekannt gemacht werden können, jedoch war ich in der nächsten Zeit hauptsächlich mit der Ausarbeitung meiner umfangreichen Abhandlung über die Praesepe und der Darstellung aller am Repsold'schen sechszölligen Heliometer angestellten Unsersuchungen beschäftigt und erst in letzter Zeit habe ich Gelegenheit gefunden, diese Finsternissbeobachtungen wieder vorzunehmen.

Die Ableitung der Verbesserungen der den Ephemeriden entnommenen relativen Oerter des Mondes gegen die Sonne fand nach den bekannten und mehrfach angewandten Formeln statt, welche in dem Aufsatze „M. Wichmann, Beobachtung der totalen Sonnenfinsterniss am 28. Juli 1851 am Königsberger Heliometer", Astronomische Nachrichten, Bd. 33 gegeben sind.



A. Partielle Sonnenfinsterniss 1890 Juni 16/17.

Diese Finsterniss begann in Göttingen um $21^h 3^m$ und endigte um $23^h 31^m$ mittlere Ortszeit. Bei Beginn der Finsterniss war der Himmel bewölkt und die Beobachtung des Eintritts misslang deshalb. Einige Zeit später gingen die Wolken auseinander und es konnte an beiden Heliometern um etwa $21^h 14^m$ mit Sehnenmessungen begonnen werden. Um etwa $21^h 43^m$ wurde der Himmel dann wieder auf längere Zeit trübe und erst kurz vor dem Ende der Finsterniss um etwa 23^h wurde es noch einmal wieder auf eine viertel Stunde hell; die Beobachtung des Austritts wurde jedoch abermals durch Bewölkung vereitelt.

Die Berechnung der Sehnenlängen gestaltet sich nun folgendermassen. Es bedeuten in nachstehender Tabelle

Spalt I die in mittlere Zeit Greenwich umgesetzten Beobachtungszeiten,

II die dem Nautical Almanac entnommenen geocentrischen Oerter des Mondes,

III die auf Göttingen wegen Parallaxe nach strengen Formeln reducirten Mondörter,

IV die geocentrischen Oerter der Sonne,

V dieselben für Göttingen wegen Parallaxe reducirt,

VI die dem Nautical Almanac für die Beobachtungszeiten entnommenen Werthe der Horizontal-Parallaxen und Halbmesser von Mond und Sonne, $\Pi\pi\ r_{☾}\ r_{\odot}$,

VII die Halbmesser von Mond und Sonne für die Zeiten der Columne I, gültig für Göttingen und bereits verbessert nach den weiter unten folgenden Abänderungen der im Nautical Almanac angenommenen Werthe, $r'_{☾}\ r'_{\odot}$.

Sind dann $\alpha_{☾}\ \delta_{☾}\ \alpha_{\odot}\ \delta_{\odot}$ die auf Göttingen bezüglichen Rectascensionen und Declinationen von Mond und Sonne, so sind die relativen Coordinaten des Mondes gegen die Sonne

$$x = (\alpha_{☾} - \alpha_{\odot}) \cos \tfrac{1}{2} (\delta_{☾} + \delta_{\odot})$$
$$y = (\delta_{☾} - \delta_{\odot}),$$

die in Spalt VIII enthalten sind.

Auf diese Weise erhält man nachstehende Tabelle:

I M.Z.Grw.	II Geoc. Oerter d. Mondes		III Mondörter f. Göttingen		IV Geoc. Oerter d. Sonne		V Sonnenörter f. Göttingen	
h m	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
20 20	84 51 9.3	+ 23 29 54.2	85 17 24.0	+ 23 0 6.4	85 41 6.2	+ 23 23 39.4	85 41 10.4	+ 23 23 34.7
40	85 2 9.5	31 11.7	85 26 4.0	2 11.0	41 58.2	41.0	42 2.0	36.4
21 0	85 13 9.6	32 28.4	85 34 33.5	4 10.5	42 50.3	42.5	42 53 7	38.0
20	85 24 9.9	33 44.3	85 42 53.8	6 4.5	43 42.3	43.9	43 45.3	39.5
40	85 35 10 4	34 59.4	85 51 6.0	7 52.7	44 34.2	45.4	44 36.7	41.1
22 0	85 46 10.8	36 13.8	85 59 11.2	9 34.9	45 26.3	46.8	45 28.4	42.6
20	85 57 11.4	37 27.4	86 7 10.8	11 11.0	46 18.3	48.2	46 19.9	44.1
40	86 8 12.2	38 40.1	86 15 6.1	12 40 4	47 10.4	49.5	47 11.4	45.4
23 0	86 19 12.9	39 52.1	86 22 58.4	14 3.5	48 2.3	50.9	48 2.8	46.8

I M.Z.Grw.	VI Π	$r☾$	π	$r☉$	VII $r'☾$	$r'☉$	VIII $\alpha☾ - \alpha☉$	x	y
h m	′ ″	″	″	″	″	″	″	″	″
20 20	54 47.4	897.4	8.71	946.5	906.7	944.2	− 1426.4	− 1311.1	− 1408.3
40	47.1	97.3			7.1		− 958.0	− 880.4	− 1285.4
21 0	46 8	97.2			7.4		− 500.2	− 459.6	− 1167.5
20	46.5	97.1			7.7		− 51 5	− 47.3	− 1055.0
40	46.2	97.0			7.9		+ 389.2	+ 357.5	− 948.4
22 0	45.9	96.9			8.1		+ 822.9	+ 755.9	− 847.5
20	45.6	96.8			8.2		+ 1250.9	+ 1149 0	− 753.1
40	45.4	96.6			8.2		+ 1674.7	+ 1538.1	− 664.9
23 0	45.1	96.5			8.2		+ 2095.6	+ 1924.5	− 583.3

Hieraus wurden die relativen Coordinaten der Mittelpnnkte von Mond und Sonne für jede einzelne Minnte Greenwich Zeit für die Daner der Beobachtungen interpolirt. Die im Nautical Almanac angegebenen Halbmesser von Mond und Sonne sind in Spalt VII in nachstehender Weise durch andere Annahmen ersetzt worden.

Mondhalbmesser nach Hansen's Mondtafeln	$R☾$	933″.36
Correction nach Oudemans (Astr. Nachr. 1202 n. 2670)		− 1.09
angenommen		932.27

Für 1890 Juni 16/17 ist die Correction des scheinbaren Halbmessers entsprechend der Entfernung des Mondes = − 1″.06.

Mittlerer Sonnenhalbmesser im Nantical Almanac	$R☉$ =	961″.82
dagegen nach Anwers (Astr. Nachr. 2670)		959 .56
also Correction des Nautical Almanac		− 2,26
oder Correction für den Beobachtnngstag		− 2,22

Auf diese Weise ergeben sich die in obiger Tabelle enthaltenen Werthe für die der Rechnnng zn Grunde gelegten Radien.

Für die in M.Z.Greenwich verwandelten Beobachtungszeiten wurden dann die Grössen x y $r☾$ und $r☉$ interpolirt nnd damit nach den Wichmann'schen Formeln die Längen der Sehnen und die Differential-Quotienten zur Verbesserung dieser vier Unbekannten berechnet. Da sich aber die Coëfficienten von $dr☾$ und $dr☉$ zu wenig von einander unterscheiden, um eine Verbesserung der Radien berech-

nen zu können, so wurden diese Grössen mit umgekehrten Zeichen auf die Seite der absoluten Glieder der Gleichungen gebracht, um auf die Weise die Verbesserungen *dx* und *dy* als Function der an die angewandten Radien noch anzubringenden Verbesserungen auszudrücken.

Die Sehnenlängen sind mit Rücksicht auf alle erforderlichen Verbesserungen, nämlich Theilungsfehler der Objectivscalen, Gang des Mikroskops, Reduction auf die der Temperatur entsprechende Ocularstellung, ferner für Temperaturcorrection und für Refraction verbessert worden.

a) Beobachtungen am Repsold'schen Heliometer (162^{mm} Oeffnung).

Diese Beobachtungen wurden von mir ausgeführt und der damalige Assistent Dr. Buschbaum unterstützte mich durch Aufschreiben der Uhrzeiten und der Nummern der Theilstriche der Objectivscalen. Durch die Registrirung der Trommelablesungen bei den Einstellungen auf die Theilstriche wurde die Messung sehr beschleunigt und es konnten in der ersten Periode hellen Himmels 27 Einstellungen der Hörnerspitzen vorgenommen werden; als es aber gegen Ende der Finsterniss wieder auf kurze Zeit hell wurde, ereignete sich eine Störung am Registrirmikrometer, da der Papierstreifen in Unordnung gerieth, so dass leider nur noch drei Einstellungen gelangen.

Die neuen Heliometer besitzen die Einrichtung, auch Positionswinkel mit grosser Schärfe zu messen. Da aber das Ablesen des Positionskreises erheblich grössere Zeit als die Registrirung der Distanzmessungen erfordert und die Positionswinkel-Messungen den Distanzmessungen gegenüber eine geringere Genauigkeit besitzen, so sind nur letztere gemessen worden. Sollte ich jedoch einmal wieder Gelegenheit haben, derartige Messungen anzustellen, so würde ich nicht unterlassen, beide Coordinaten zu messen.

Die Reduction der Beobachtungen am Repsold'schen Heliometer nach dem in meiner Abhandlung über die Praesepe auseinandergesetzten Verfahren (siehe Die Oerter der hellen Sterne der Praesepe, Astronomische Mittheilungen von der Kgl. Sternwarte zu Göttingen. Vierter Theil. Göttingen 1895) gestaltet sich folgendermassen:

Lfde. Nr.	Sternzeit Göttingen	Messung	Oc.-Stell.	Temperatur	Refract.	Reducirte Messung
	h m s	s				s
1	2 56 53.8	21.1629	−1	−25	+101	21.1704
2	59 35.3	23.2786	−1	−28	+110	23.2867
3	3 1 2.8	24.3235	−1	−29	+114	24.3319
4	1 40.8	24.7764	−1	−30	+115	24.7848
5	2 37.3	25.3477	−1	−31	+118	25.3563
6	3 29.8	25.9744	−1	−31	+119	25.9831
7	5 18.8	26.9314	−1	−33	+120	26.9400
8	6 9.8	27.4368	−1	−33	+123	27.4457
9	7 25.8	28.1867	−1	−34	+125	28.1957
10	8 6.8	28.4447	−1	−35	+126	28.4537

Lfde. Nr.	Sternzeit Göttingen	Messung	Oc.-Stell.	Temperatur	Refract.	Reducirte Messung
	h m s	s				s
11	3 8 53.3	28.8734	— 1	— 35	+ 127	28.8825
12	9 26.3	29.1747	— 1	— 36	+ 128	29.1838
13	10 24.8	29.6165	— 1	— 36	+ 129	29.6257
14	11 10.3	29.9777	— 1	— 37	+ 130	29.9869
15	12 11.8	30.4400	— 1	— 37	+ 130	30.4492
16	12 50.8	30.6627	— 1	— 38	+ 131	30.6719
17	13 28.8	30.9933	— 1	— 38	+ 132	31.0026
18	14 3.3	31.1733	— 1	— 39	+ 132	31.1825
19	14 45.8	31.4832	— 1	— 39	+ 132	31.4924
20	15 17.8	31.7169	— 1	— 39	+ 133	31.7262
21	15 59.8	31.9827	— 1	— 40	+ 133	31.9919
22	16 29.8	32.2033	— 1	— 40	+ 133	32.2125
23	17 35.3	32.5456	— 1	— 41	+ 133	32.5547
24	18 3.8	32.6846	— 1	— 41	+ 133	32.6937
25	18 40.8	32.9133	— 1	— 41	+ 134	32.9225
26	24 45.8	34.7292	0	— 44	+ 133	34.7381
27	25 33.3	34.9962	0	— 45	+ 133	35.0050
28	4 51 17.8	27.0043	+ 4	— 38	+ 89	27.0098
29	52 45.8	26.2277	+ 4	— 37	+ 86	26.2330
30	53 50.8	25.6631	+ 4	— 36	+ 83	25.6682

Die meteorologischen Ablesungen waren

Sternzeit	Barom.	Luft-Temperatur	Temp. d. Instruments
h m	mm		
2 52	749.2	+ 17°.6 C.	+ 16°.8 C.
3 47	49.1	16.9	16.6
5 16	48.6	18.4	18.0

Die Verwandlung der in Theilen der Objectivscalen ausgedrückten Sehnenlängen in Bogensecunden erfolgt durch Multiplication mit dem Bogenwerthe eines Skalentheils, nämlich 40".0167 = [1.602242], der aus der Messung der Bogen grössten Kreises mit Berücksichtigung der systematischen Correctionen der Distanzmessungen abgeleitet ist. (Siehe darüber Astr. Nachr. Bd. 142 Seite 347.)

Die Vergleichung der Beobachtung und Rechnung sowie die daraus hervorgehenden Bedingungsgleichungen zur Verbesserung von x, y und einer constanten Grösse c gestalten sich dann folgendermassen:

	Mittl. Zt. Greenw.	Sehne Beob.	Sehne Rechn.	Beob.-Rechn. n							Darstellung Beob.-Rechn. v
	h m s	"	"	"							"
1	20 34 55.0	847.17	846.56	+ 0.6	— 2.17 $dr_\odot$	— 2.19 $dr_{☾}$	=	+ 1.11 dx	+ 1.47 dy	+ 1 c	— 1.9
2	37 36.1	931.86	932.44	— 0.6	— 1.97	— 2.00		+ 0.95	+ 1.32	+ 1	+ 0.6
3	39 3.4	973.68	974.02	— 0.3	— 1.88	— 1.91		+ 0.87	+ 1.25	— 1	+ 0.1
4	39 41.3	991.81	991.67	+ 0.1	— 1.85	— 1.88		+ 0.85	+ 1.23	— 1	+ 0.4
5	40 37.6	1014.68	1016.12	— 1.4	— 1.80	— 1.84		+ 0.81	+ 1.19	— 1	— 1.1
6	41 29.9	1039.76	1038.11	+ 1.6	— 1.76	— 1.80		+ 0.77	+ 1.16	— 1	+ 1.9
7	43 18.7	1078.05	1081.19	— 3.1	— 1.69	— 1.73		+ 0.70	+ 1.10	+ 1	— 2.1
8	44 9.5	1098.29	1100.24	— 2.0	— 1.66	— 1.70		+ 0.68	+ 1.07	+ 1	— 1.0
9	45 25.3	1128.30	1127.30	+ 1.0	— 1.62	— 1.66		+ 0.64	+ 1.04	+ 1	+ 1.9

	Mittl. Zt. Greenw.	Sehne Beob.	Sehne Rechn.	Beob.-Rechn. n							Darstellung Beob.-Rechn. v
	h m s	″	″	″							″
10	20 46 6.2	1198.88	1141.64	− 3.0	− 1.60 $dr_\odot$	− 1.64 $dr_☾$	=	+ 0.62 dx	+ 1.02 dy	+ 1 c	− 2.1
11	46 52.8	1155.79	1157.16	− 1.4	− 1.58	− 1.62		+ 0.59	+ 1.00	− 1	− 1.2
12	47 25.5	1167.84	1167.95	− 0.1	− 1.56	− 1.60		+ 0.58	+ 0.99	− 1	0.0
13	48 23.8	1185.53	1186.44	− 0.9	− 1.54	− 1.58		+ 0.55	+ 0.97	− 1	− 0.8
14	49 9.2	1199.98	1200.23	− 0.3	− 1.52	− 1.56		+ 0.53	+ 0.96	− 1	− 0.2
15	50 10.5	1218.48	1218.32	+ 0.2	− 1.50	− 1.54		+ 0.51	+ 0.94	+ 1	+ 1.1
16	50 49.4	1227.39	1229.66	− 2.3	− 1.48	− 1.53		+ 0.49	+ 0.92	+ 1	− 1.5
17	51 27.3	1240.62	1240.24	+ 0.4	− 1.47	− 1.52		+ 0.48	+ 0.91	+ 1	+ 1.2
18	52 1.7	1247.82	1249.65	− 1.8	− 1.46	− 1.51		+ 0.47	+ 0.90	+ 1	− 1.0
19	52 44.1	1260.22	1260.90	− 0.7	− 1.44	− 1.49		+ 0.45	+ 0.89	− 1	− 0.6
20	53 18.0	1269.58	1269.16	+ 0.4	− 1.43	− 1.48		+ 0.44	+ 0.88	− 1	+ 0.4
21	53 57.9	1280.22	1279.95	+ 0.3	− 1.42	− 1.47		+ 0.42	+ 0.87	− 1	+ 0.3
22	54 27.8	1289.04	1287.30	+ 1.7	− 1.41	− 1.48		+ 0.41	+ 0.86	− 1	+ 1.7
23	55 33.1	1302.73	1302.97	− 0.2	− 1.39	− 1.45		+ 0.39	+ 0.85	+ 1	+ 0.6
24	56 1.6	1308.30	1309.70	− 1.4	− 1.38	− 1.44		+ 0.38	+ 0.84	+ 1	− 0.6
25	56 38.5	1317.45	1318.20	− 0.8	− 1.37	− 1.43		+ 0.37	+ 0.83	+ 1	0.0
26	21 2 42.5	1390.11	1391.87	− 1.8	− 1.29	− 1.36		+ 0.28	+ 0.75	+ 1	− 1.1
27	3 29.8	1400.79	1400.67	+ 0.1	− 1.29	− 1.36		+ 0.26	+ 0.75	− 1	0.0
28	22 29 0.3	1080.85	1080.84	0.0	− 1.70	− 1.73		− 1.23	+ 0.66	− 1	− 0.9
29	30 28.0	1049.76	1049.50	+ 0.3	− 1.75	− 1.78		− 1.29	+ 0.67	− 1	− 0.6
30	31 32.9	1027.16	1025.24	+ 1.9	− 1.79	− 1.82		− 1.34	+ 0.68	+ 1	+ 1.7

Hier bedeutet c die von Wichmann eingeführte Constante, die dadurch entsteht, dass man bei der Berechnung der einzelnen Einstellungen eine vorläufige und noch zu verbessernde Annahme für eine Zahl zu machen hat, die der Coïncidenz der beiden Objectivscalen entspricht und je nach der Stellung der letzteren positiv oder negativ anzusetzen ist. Die letzte Spalte enthält die nach Einsetzung von dx, dy und c noch übrigbleibenden Fehler, aus denen die wahrscheinlichen Fehler des Resultats berechnet sind.

Aus vorstehenden 30 Gleichungen ergeben sich nach der Methode der kleinsten Quadrate die Endgleichungen

$$\begin{aligned}
-11''.56 - 19.00\,dr_\odot - 19.55\,dr_☾ &= +15.10\,dx + 13.95\,dy + 1.70\,c \\
-13\,.74 - 46.96 \qquad -48.20 \qquad &= +13.95 \qquad +29.07 \qquad +0.31 \\
-12\,.30 + 0.03 \qquad +0.04 \qquad &= +1.70 \qquad +0.31 \qquad +30.00
\end{aligned}$$

Die Auflösung der Gleichungen giebt

$$\begin{aligned}
dx &= -0''.520 + 0.422\,dr_\odot + 0.427\,dr_☾ && \text{w.F.}\ \pm 0''.284 \\
dy &= -0\,.220 - 1.818 \qquad -1.863 && \pm 0\,.204 \\
c &= -0\,.378 - 0.004 \qquad -0.004 && \pm 0\,.150
\end{aligned}$$

w.F. einer Einstellung $\pm 0''.82$.

Hierbei ist noch des Umstandes zu erwähnen, dass bei der Berechnung der Mondparallaxe der im Berliner Jahrbuche enthaltene Werth $\log \varrho = 9.999112$

angewandt worden ist. Da aber das grosse Heliometer in einer Seehöhe von 172 Meter aufgestellt ist, so werden die Werthe der Parallaxe dadurch etwas vergrössert und es bedarf das Resultat der Ausgleichung für die Mitte der Finsterniss noch einer nachträglichen Verbesserung, nämlich

$$d(\alpha_☾ - \alpha_\odot) = +0''.027 \qquad d(\delta_☾ - \delta_\odot) = +0''.046$$

oder

$$dx = +0''.025 \qquad dy = +0''.046.$$

b) Beobachtungen am Fraunhofer'schen Heliometer (76mm Oeffnung).

An diesem Instrumente gelang bei dem Mangel der zweckmässigen Einrichtungen zur Ablesung der Scalen, wie sie die neueren Heliometer von Repsold besitzen, nur eine kleinere Anzahl von Beobachtungen, aber dieselben besitzen den meinigen gegenüber den grossen Vortheil der mehr symmetrischen Vertheilung, die am grossen Heliometer durch die eingetretene Unordnung an dem Registrirapparat verloren ging.

Bei Nr. 1—10 war Dr. Ambronn am Ocular, Dr. Hayn am Ablesemikroskop am Objectivende,
„ 11—17 „ Dr. Hayn „ Dr. Ambronn „

Auch diese Beobachtungen sind mit Rücksicht auf sämmtliche Instrumental-Constanten und Refraction reducirt, worüber sich das Nähere in der Schrift findet L. Ambronn, Triangulation zwischen sechszehn Sternen der Plejadengruppe. Astronomische Mittheilungen von der Königl. Sternwarte zu Göttingen. Dritter Theil. Göttingen 1894.

Die Messungen und ihre Reductionen in Einheiten der vierten Decimale eines Scalentheils gestalten sich folgendermassen:

Nr.	M.Z. Göttingen	Messung	Oc.-Stellg.	Temperatur	Refract.	Reducirte Messung
	h m s	s				s
1	21 15 22.5	48.3295	0	— 58	+ 232	48.3469
2	18 1.5	52.9970	0	— 64	+ 249	53.0155
3	20 30.5	56.7848	+ 4	— 71	+ 260	56.8042
4	23 48.5	61.2050	+ 5	— 76	+ 275	61.2254
5	26 48.5	64.5414	+ 5	— 80	+ 284	64.5623
6	29 34.5	67.4839	+ 6	— 84	+ 289	67.5050
7	32 16.5	70.1199	+ 6	— 89	+ 295	70.1411
8	36 30.5	73.7180	+ 12	— 93	+ 297	73.7396
9	42 21.5	77.5504	+ 13	— 101	+ 296	77.5712
10	22 59 57.5	69.4871	— 108	— 81	+ 212	69.4894
11	23 1 52.5	67.5368	— 105	— 81	+ 208	67.5390
12	4 12.5	65.3228	— 97	— 82	+ 202	65.3251
13	5 55.5	63.5905	— 88	— 81	+ 197	53.5938
14	7 27.5	62.0200	— 86	— 81	+ 193	62.0226
15	8 51.5	60.3191	— 84	— 78	+ 189	60.3218
16	11 54.5	56.6223	— 79	— 74	+ 179	56.6249
17	14 13.5	58.2599	— 74	— 70	+ 169	58.2624

Die meteorologischen Daten in Millimeter und Celsiusgraden waren

M.Z.	Barom.	Lufttemperatur	Temp. d. Instr.
h m	mm	°	°
21 15	750.0	+ 18.0	+ 18.5
21 42	49.5	19.5	20.0
23 0	49.5	19.5	18.0
23 14	49.0	20.0	20.3

Die Reduction für Ocularstellung wurde für Dr. Hayn nach dessen Focussirungen auf Doppelsterne angenommen. Zur Verwandlung in Bogensecunden ist der Scalenwert angewandt worden 17".9118 = [1.253140] nach der erwähnten Abhandlung Ambronn, Plejadengruppe. Damit erhält man nachfolgende Greenwich M.Z., beobachtete und berechnete Sehnenlängen und die daraus hervorgehenden Bedingungsgleichungen:

	Mittl. Zt. Greenw.	Sehne Beob.	Sehne Rechn.	Beob.-Rechn. n							v
	h m s	"	"	"							"
1	20 35 36.0	865.98	869.66	−3.7	$-2.11\,dr_\odot$	$-2.14\,dr_☾$	=	$+1.12\,dx$	$+1.51\,dy$	$+1\,c$	−1.5
2	38 15.0	949.59	951.42	−1.8	−1.98	−1.96		+0.96	+1.36	+1	0.0
3	40 44.0	1017.47	1018.82	−1.4	−1.80	−1.83		+0.85	+1.25	−1	+0.7
4	44 2.0	1096.66	1097.50	−0.8	−1.67	−1.70		+0.72	+1.15	−1	+1.0
5	47 2.0	1158.22	1160.20	−2.0	−1.57	−1.61		+0.63	+1.07	−1	−0.4
6	49 48.0	1209.14	1211.80	−2.7	−1.50	−1.55		+0.55	+1.01	−1	−1.2
7	52 30.0	1256.36	1257.10	−0.7	−1.45	−1.50		+0.49	+0.96	+1	+0.2
8	56 44.0	1320.81	1319.46	+1.4	−1.37	−1.43		+0.40	+0.90	+1	+2.1
9	21 2 35.0	1389.44	1390.58	−1.1	−1.30	−1.36		+0.29	+0.83	+1	−0.6
10	22 20 11.0	1244.68	1239.40	+5.3	−1.47	−1.52		−0.93	+0.61	+1	+3.6
11	22 6.0	1209.75	1208.96	+0.8	−1.51	−1.55		−0.98	+0.61	+1	−0.9
12	24 26.0	1170.09	1169.12	+1.0	−1.56	−1.60		−1.06	+0.63	−1	−0.4
13	26 9.0	1139.07	1137.64	+1.4	−1.61	−1.65		−1.11	+0.64	−1	−0.1
14	27 41.0	1110.94	1107.80	+3.1	−1.65	−1.69		−1.17	+0.65	−1	+1.5
15	29 5.0	1080.48	1079.24	+1.2	−1.70	−1.73		−1.23	+0.66	−1	−0.5
16	32 8.0	1014.25	1011.42	+2.8	−1.82	−1.85		−1.37	+0.69	+1	+0.4
17	34 27.0	954.03	954.27	−0.2	−1.93	−1.95		−1.50	+0.72	+1	−2.8

Aus vorstehenden Gleichungen ergeben sich die Endgleichungen:

$$\begin{array}{rrrcrrr} -27''.46 & +\ 5.30\,dr_\odot & +\ 5.39\,dr_☾ & = & +15.77\,dx & +\ 1.04\,dy & +\ 0.30\,c \\ -\ 6\ .05 & -25.55 & -26.17 & = & +\ 1.04 & +15.00 & +\ 1.13 \\ +\ 3\ .00 & -\ 1.83 & -\ 1.90 & = & +\ 0.30 & +\ 1.13 & +17.00 \end{array}$$

Die Auflösung der Gleichungen giebt:

$$\begin{array}{rclll} dx & = & -1''.726 + 0.449\,dr_\odot + 0.459\,dr_☾ & \text{w. F.} & \pm 0''.268 \\ dy & = & -0\ .301 - 1.735 \quad -1.777 & & \pm 0\ .275 \\ c & = & +0.\ 227 \quad 0.000 \quad -0.002 & & \pm 0\ .258 \end{array}$$

w. F. einer Einstellung ± 1".03.

Entsprechend der Seehöhe $162^m,5$ des Fraunhofer'schen Heliometers ist hierzu nachträglich noch hinzuzufügen:

$$d(\alpha_☾ - \alpha_\odot) = +0''.026 \qquad d(\delta_☾ - \delta_\odot) = +0''.043$$

oder

$$dx = +0.024 \qquad dy = +0.043$$

Das Resultat der Messungen an beiden Heliometern ist also mit Hinweglassung der für diesen Zweck gleichgültigen Ergebnisse für die Grössen c:

Schur. Repsold'sches Heliometer

$$dx = d(\alpha_☾ - \alpha_\odot)\cos\tfrac{1}{2}(\delta_☾ + \delta_\odot) = -0''.495 + 0.422\,dr_\odot + 0.427\,dr_☾ \quad \text{w.F.} \pm 0''.284$$

$$dy = d(\delta_☾ - \delta_\odot) = -0.174 - 1.818 \quad -1.863 \quad \pm 0.204$$

w.F. einer Einstellung $\pm 0''.82$.

Ambronn und Hayn

$$dx = \quad -1.702 + 0.449\,dr_\odot + 0.459\,dr_☾ \quad \pm 0.268$$

$$dy = \quad -0.258 - 1.735 \quad -1.777 \quad \pm 0.275$$

± 1.03,

wobei wie bemerkt als Halbmesser in mittlerer Entfernung angenommen sind:

Sonne $R_\odot = 961''.82$ (Naut. Alm.) $- 2''.26$ (Auwers) $= 959''.56$

Mond $R_☾ = 933.36$ (Naut. Alm.) $- 1.09$ (Oudemans) $= 932.27$

Nun haben meine Beobachtungen des Sonnenhalbmessers am Repsold'schen Heliometer in Göttingen ohne Anwendung des Ocular-Prisma ergeben (Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft Bd. 29, Jahrg. 1894, S. 285): In mittlerer Entfernung $R_\odot = 960''.25$, mithin ist, um auf meine eigenen Beobachtungen Rücksicht zu nehmen, $dR_\odot = +0''.69$, also für diese Finsterniss $dr_\odot = +0''.69\,\frac{944.22}{959.56} = +0''.68$ zu setzen und damit werden die Verbesserungen

$$\text{Schur} \quad dx = -0''.208 + 0.427\,dr_☾ \quad \text{für } R_\odot = 960''.25 \text{ in mittl. Entf.}$$

$$dy = -1.410 - 1.863\,dr_☾$$

Für Ambronn haben neuere Beobachtungen am Fraunhofer'schen Heliometer ergeben (V.J.S. der Astron. Ges. 1894) $R_\odot = 959''.63$, also Verbesserung des Auwers'schen Halbmessers $dR_\odot = +0''.07$ und für diese Finsterniss ist $dr_\odot = +0''.07\,\frac{944.24}{959.56} = +0''.07$ zu setzen, und damit hat man

$$\text{Ambronn} \quad dx = -1''.671 + 0.459\,dr_☾ \quad \text{für } R_\odot = 959''.63$$

$$dy = -0.379 - 1.777\,dr_☾$$

In der kürzlich erschienenen Abhandlung von Dr. Kobold „Resultate aus den an der Kaiserl. Univ.-Sternwarte zu Strassburg angestellten Heliometer- und Refractormessungen der partiellen Sonnenfinsternisse 1890 Juni 16/17, 1891 Juni 6 und 1893 April 16 u. s. w. Separatabdruck aus den Annalen der Kaiserl. Univ.-

Sternwarte zu Strassburg, zweiter Band" findet man aus den Beobachtungen am dortigen Fraunhofer'schen Heliometer auf S. 39

$$\text{Kobold} \quad d(\alpha_☾ - \alpha_\odot) = -1''.20 \qquad d(\delta_☾ - \delta_\odot) = -0''.43.$$

Dabei ist von Kobold nach Seite 5 angenommen: Mittlerer Mondradius $R_☾ =$ 932''.85 nach Küstner, L. Struve und Battermann, und nach Seite 16 für die Sonne $R_\odot = 959''.71$.

Reducirt man die Resultate der Göttinger Beobachtungen ebenfalls auf den von Kobold angenommenen Mondradius, so hat man in mittlerer Entfernung die Aenderung $dR_☾ = 932''.85 - 932''.27 = +0''.58$ oder am Beobachtungstage für die Mitte der Finsterniss

$$d_☾ = +0''.58 \frac{907.\ 9}{932.27} = +0''.56.$$

Behält man für die drei Beobachter die aus ihren eigenen Beobachtungen hervorgehenden Sonnendurchmesser bei und reducirt die Mondhalbmesser auf den von Kobold angenommenen Werth, so erhält man zunächst für die Göttinger Beobachter

$$\text{Schur} \quad dx = -0''.208 + 0.427 \times 0''.56 = -0''.208 + 0''.239 = +0''.03$$
$$dy = -1.410 - 1.863 \times 0.56 = -1.410 - 1.042 = -2.45$$

$$\left.\begin{matrix}\text{Ambronn}\\ \text{Hayn}\end{matrix}\right\} \begin{matrix} dx = -1.671 + 0.459 \times 0.56 = -1.671 + 0.257 = -1.41 \\ dy = -0.379 - 1.777 \times 0.56 = -0.379 - 0.995 = -1.37\end{matrix}$$

und da

$$dx = d\alpha \cos\delta \quad \text{und} \quad \cos\delta = 1.088$$

so hat man schliesslich

	$d(\alpha_☾ - \alpha_\odot)$	$d(\delta_☾ - \delta_\odot)$	berechnet mit $R_\odot$	berechnet mit $R_☾$
Schur	+0''.03	−2''.45	960''.25	932''.85
Ambronn und Hayn	−1 .53	−1 .37	959 .63	"
Kobold	−1 .20	−0 .43	959 .71	"
Kobold Gesammtresultat	−0 .86	−0 .55		

Von Kobold sind ausser seinen Sehnenbeobachtungen am Heliometer noch die Refractorbeobachtungen von Professor Becker und Dr. Zwink, sowie die an verschiedenen Orten angestellten Contactbeobachtungen verwandt worden, deren Resultat ich der Kürze halber mit dem Namen: „Kobold Gesammtresultat" bezeichne.

Die hier auftretenden Unterschiede überschreiten in erheblicher Weise die aus der inneren Uebereinstimmung der Messungen folgenden und nur 2 bis 3zehntel Secunden betragenden wahrscheinlichen Fehler für die einzelnen Beobachter und die Annahme verschiedener Werthe für die Radien von Mond und Sonne

bringt besonders in der Declination bedeutende Aenderungen hervor. Will man von den oben angenommenen Werthen zu anderen übergehen, so sind die entsprechenden Aenderungen der relativen Coordinaten nach dem Obigen

Schur	$d\alpha = +0.459\, d\odot$	$+0.464\, d☾$	$d\delta = -1.818\, d\odot$	$-1.863\, d☾$
Ambronn und Hayn	$+0.489$	$+0.500$	-1.735	-1.777
Kobold	$+0.573$	$+0.573$	-1.878	-1.980

Die Zahlen für Kobold finden sich in seiner Abhandlung Seite 11 und die Coefficienten in $d\alpha$ entstehen aus denen von dx durch Multiplication mit $\sec\delta = 1.088$.

Wollte man z. B. für den Sonnendurchmesser überall den Werth annehmen, der sich aus Beobachtungen an den kleinen Fraunhofer'schen Heliometern ergiebt und dann für mich das Resultat meiner Beobachtungen am Göttinger Heliometer während der Jahre 1892—94 nehmen (siehe V.J.S. 1894) und darnach setzen

$$dR_\odot = (959''.82 - 960''.25) = -0''.43,$$

so hätte man

$$\text{Schur} \quad d(\alpha_☾ - \alpha_\odot) = +0''.03 + 0.459 \times -0''.43 = -0''.17$$
$$d(\delta_☾ - \delta_\odot) = -2\,.45 - 1.818 \times -0\,.43 = -1\,.67$$

Dadurch würde eine bessere Uebereinstimmung mit den Ergebnissen der Beobachtungen an den Fraunhofer'schen Heliometern in Göttingen und Strassburg erzielt, aber dass sich der Sonnendurchmesser aus den Beobachtungen am grossen Göttinger Heliometer um etwa 0''.9, also der Halbmesser um etwa 0''.45 grösser ergiebt als am Fraunhofer'schen Heliometer, darüber lassen die an genanntem Orte (V.J.S. 1894) mitgetheilten Zahlen für Schur und für Ambronn nicht den geringsten Zweifel.

Es würde von Werth sein auch in Bezug der Mondhalbmesser nicht von Bestimmungen an anderen Instrumenten abhängig zu sein, sondern denselben aus selbstständigen Beobachtungen an den hier in Frage kommenden Instrumenten benutzen zu können.

Will man aus den oben mitgetheilten Zahlen ein Endresultat ziehen und die Gewichte etwa so ansetzen, dass man den Heliometerbeobachtungen in Göttingen einzeln das Gewicht 1 und dem Gesammtresultat der Kobold'schen Untersuchung aus Heliometer-Refractor- und Control-Beobachtungen das Gewicht 3 ertheilt, so hat man

	$d(\alpha_☾ - \alpha_\odot)$	$d(\delta_☾ - \delta_\odot)$	Gewicht	Annahme für mittl. Entf.	
Schur	$+0''.03$	$-2''.45$	1	$R_\odot$ 960''.25	$r_☾$ 932''.85
Ambronn und Hayn	$-1\,.53$	$-1\,.37$	1	959 .63	932 .85
Kobold Gesammtresultat	$-0\,.86$	$-0\,.55$	3	959 .71	932 .85

und somit das Endresultat aller Beobachtungen der Sonnenfinsterniss von 1890 Juni 16/17

$$d(\alpha_☾ - \alpha_\odot) = -0''.82 \qquad d(\delta_☾ - \delta_\odot) = -1''.09.$$



B. Partielle Sonnenfinsterniss 1891 Juni 6.

Die bei dieser Gelegenheit von Schur, Ambronn, Buschbaum, Clemens, Grossmann, Martin, Schwassmann, Kniesche, Engelhardt nnd Zeissig auf der Göttinger Sternwarte angestellten Beobachtungen des Ein- und Austritts sind bald darauf von mir in den Astr. Nachr. Bd. 128 bekannt gemacht worden, und es findet sich dort anch eine Schilderung der Bewölkungsverhältnisse und der Luftbeschaffenheit, die nichts weniger als günstig lautet.

Ich konnte mit Unterstützung von Dr. Buschbaum im Laufe von $1^1/_4$ Stunden 100 Einstellungen der Hörnerspitzen zur Messung der Sehnenlängen anführen, deren Genauigkeit nach den groben Unregelmässigkeiten in der weiter unten stehenden Columne Beobachtung - Rechnung sehr unter der grossen Unruhe der Luft gelitten hat. Für das auf der Terrasse stehende kleine Fraunhofer'sche Heliometer war die Sonne während des grössten Theils der Finsterniss durch das Sternwartengebäude verdeckt.

Die Resultate der Göttinger Contactbeobachtungen sind bereits in der erwähnten Abhandlung von Dr. Kobold abgeleitet worden, wobei er die sehr zweifelhaften Beobachtungen des Eintritts ausgeschlossen hat.

Es bleibt hier nur noch übrig, die Resultate der am grossen Göttinger Heliometer ausgeführten Sehnenbeobachtungen mitzutheilen.

In Göttingen ereignete sich der Anfang der Finsterniss nm

$5^h 39^m$ mittl. Ortszeit = $10^h 38^m$ Sternzeit,

das Ende um 7 6 12 5

Die Daten für die Rechnung werden hier wiedor in derselben Weise mitgetheilt wie bei der Finsterniss vom Jahre vorher.

I M.Z.Grw.	II Geoc. Oerter d. Mondes		III Mondörter f. Göttingen		IV Geoc. Oerter d. Sonne		V Sonnenörter f. Göttingen	
h m	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
4 40	74 25 33.8	+ 23 38 11.2	73 46 54.0	+ 22 59 11.3	74 24 27.0	+ 22 40 48.0	74 24 21.3	+ 22 40 42.1
5 0	37 33.6	40 22.7	58 30.7	23 0 13.5	25 18.6	40 53.1	25 12.7	40 47.0
20	49 33.8	42 33.2	74 10 24.3	1 14.0	26 10.2	40 58.2	26 4.3	40 52.0
40	75 1 34.2	44 42.8	22 34.8	2 13.7	27 1.7	41 8.3	26 55.8	40 56.9
6 0	13 34.5	46 51.4	35 1.8	3 12.8	27 53.3	41 8.5	27 47.5	41 1.9
20	25 35.4	48 59.0	47 45.2	4 11.9	28 44.9	41 13.6	28 39.2	41 6.8
40	37 36.2	51 5.7	75 0 44.6	5 11.6	29 36.3	41 18.7	29 30.8	41 11.2

I M.Z.Grw.	VI Π	VI r☾	VI π	VI r⊙	VII r′☾	VII r′⊙	VIII α☾−α⊙	VIII x	VIII y
h m	′ ″	″	″	″	″	″	″	″	″
4 40	57 32.0	942.2	8.71	947.5	947.5	945.3	− 2247.4	− 2071.3	+ 1109.2
5 0	31.5	42.1			46.6		− 1602.1	− 1476.5	+ 1166.5
20	31.0	42.0			45.8		− 940.1	− 866.3	+ 1222.1
40	30.5	41.8			44.8		− 261.1	− 240.6	+ 1276.8
6 0	30.0	41.7			43.9		+ 434.3	+ 400.1	+ 1330.9
20	29.5	41.6			43.1		+ 1146.0	+ 1055.8	+ 1385.1
40	29.0	41.4			42.2		+ 1873.7	+ 1726.2	+ 1439.9

Die im Nautical Almanac angesetzten Halbmesser von Mond und Sonne sind in obiger Tabelle Columne VII wieder in nachstehender Weise durch andere Annahmen ersetzt worden:

Mondhalbmesser nach Hansen	$R☾ = 933''.36$
Correction nach Oudemans	-1.09
corrigirter Halbmesser	932.27

Für 1891 Juni 6 ist die entsprechende Correction des scheinbaren Mondhalbmessers im Nautical Almanac -1.10

Mittlerer Sonnenhalbmesser im Nautical Almanac	$R_{\odot} = 961''.82$
dagegen nach Auwers Astr. Nachr. 2670	959.56
also Correction des Nautical Almanac	-2.26
oder für den scheinbaren Sonnenhalbmesser 1891 Juni 6	-2.23

Reduction der Sehnenlängen.

Nr.	Sternzeit Göttingen	Messung	Oc.-Stellung	Temperatur	Refract.	Reducirte Messung
	h m	s				s
1	10 47 37.4	20.4301	−23	−33	+494	20.4739
2	49 48.9	22.5027	−26	−36	+559	22.5524
3	50 39.2	23.0101	−27	−37	+578	23.0615
4	51 19.4	23.7372	−27	−38	+604	23.7911
5	52 25.9	24.6019	−28	−40	+634	24.6585
6	52 54.4	24.8503	−28	−40	+640	24.9075
7	53 48.2	25.6192	−29	−41	+667	25.6789
8	54 17.9	25.8126	−30	−41	+674	25.8729
9	54 50.4	26.4256	−31	−42	+695	26.4878
10	55 32.9	26.6434	−31	−43	+705	26.7065
11	56 14.9	27.0133	−31	−43	+723	27.0782
12	56 45.9	27.4415	−31	−44	+733	27.5073
13	57 25.6	27.7192	−33	−44	+746	27.7861
14	58 11.9	28.2321	−34	−45	+764	28.3006
15	11 3 30.7	30.7173	−35	−49	+857	30.7946
16	4 13.4	30.9244	−36	−50	+864	31.0022
17	5 1.9	31.1750	−36	−50	+878	31.2542
18	5 43.9	31.3539	−36	−50	+881	31.4334
19	6 26.9	31.6313	−37	−51	+888	31.7113
20	6 56.4	31.8636	−37	−51	+894	31.9442
21	7 30.4	32.0401	−37	−51	+899	32.1212
22	7 56.9	32.1350	−37	−51	+900	32.2162
23	8 34.2	32.4196	−37	−52	+907	32.5014
24	9 5.9	32.4875	−37	−52	+908	32.5694
25	9 36.1	32.6218	−38	−52	+910	32.7038
26	10 2.9	32.6843	−38	−52	+910	32.7663
27	10 51.4	32.8872	−38	−52	+910	32.9692
28	11 33.4	33.0268	−38	−53	+914	33.1091

Nr.	Sternzeit Göttingen	Messung	Oc.-Stellung	Temperatur	Refract.	Reducirte Messung
	h m	s				s
29	11 12 4.9	33.1585	−39	−53	+913	33.2406
30	12 31.9	33.2833	−39	−53	+913	33.3654
31	13 19.2	33.4593	−39	−53	+913	33.5414
32	13 46.9	33.5535	−39	−53	+913	33.6356
33	14 58.9	33.7547	−40	−54	+905	33.8358
34	15 31.0	33.7875	−40	−54	+899	33.8680
35	16 3.9	33.8425	−40	−54	+899	33.9225
36	16 30.9	33.8951	−40	−54	+890	33.9745
37	17 0.6	33.9530	−40	−54	+885	34.0321
38	17 28.9	33.9797	−40	−54	+877	34.0580
39	18 10.4	34.1813	−40	−54	+872	34.2591
40	18 38.4	34.1301	−40	−54	+871	34.2078
41	19 11.9	34.2324	−40	−54	+857	34.3087
42	19 29.4	34.2756	−40	−55	+854	34.3515
43	20 14.6	34.3179	−40	−55	+841	34.3925
44	20 42.4	34.3119	−40	−55	+832	34.3856
45	21 16.4	34.3353	−41	−55	+816	34.4073
46	21 41.4	34.3089	−41	−55	+813	34.3806
47	22 27.0	34.4580	−41	−55	+800	34.5284
48	23 0.9	34.3540	−41	−55	+788	34.4232
49	23 43.9	34.3897	−41	−55	+771	34.4572
50	24 5.9	34.3912	−41	−55	+762	34.4578
51	24 35.4	34.3219	−41	−55	+755	34.3878
52	25 22.8	34.2754	−41	−55	+729	34.3387
53	25 49.9	34.3202	−41	−54	+718	34.3825
54	26 20.4	34.2288	−41	−54	+703	34.2896
55	26 59.8	34.2634	−41	−54	+687	34.3226
56	27 26.2	34.1978	−41	−54	+674	34.2557
57	27 58.4	34.1765	−41	−54	+661	34.2331
58	28 22.4	34.0840	−41	−54	+648	34.1393
59	28 51.9	34.0478	−41	−54	+635	34.1018
60	29 16.9	33.9655	−41	−54	+622	34.0182
61	29 52.9	33.9450	−41	−54	+606	33.9961
62	30 15.9	33.9063	−41	−54	+594	33.9562
63	30 51.9	33.9128	−41	−54	+579	33.9612
64	31 16.4	33.7725	−41	−54	+564	33.8194
65	32 2.9	33.6863	−41	−53	+543	33.7312
66	32 27.4	33.6038	−41	−53	+531	33.6475
67	33 0.6	33.4503	−41	−53	+513	33.4922
68	33 29.9	33.3747	−41	−53	+499	33.4152
69	33 56.4	33.3589	−40	−53	+487	33.3983
70	34 29.9	33.1948	−40	−52	+470	33.2326
71	35 19.9	33.0807	−40	−52	+447	33.1162
72	35 46.4	32.9184	−40	−52	+433	32.9525
73	36 42.4	32.7479	−39	−51	+407	32.7796
74	37 8.4	32.6658	−39	−51	+395	32.6963
75	37 47.9	32.3197	−39	−51	+374	32.3481
76	38 33.6	32.1957	−39	−51	+355	32.2222

Nr.	Sternzeit Göttingen	Messung	Oc.-Stellung	Temperatur	Refract.	Reducirte Messung
	h m s	s				s
77	11 48 9.8	27.9396	— 33	— 44	+ 142	27.9461
78	48 40.9	27.7207	— 33	— 44	+ 134	27.7264
79	49 21.9	27.3461	— 33	— 44	+ 124	27.3508
80	49 49.3	27.0369	— 33	— 43	+ 117	27.0410
81	50 21.9	26.6644	— 32	— 42	+ 110	26.6680
82	50 46.2	26.3130	— 32	— 42	+ 105	26.3161
83	51 19.4	25.8987	— 31	— 41	+ 100	25.9015
84	51 45.9	25.5654	— 31	— 40	+ 93	25.5676
85	52 19.4	25.1689	— 30	— 40	+ 87	25.1706
86	52 58.4	24.7735	— 30	— 39	+ 81	24.7747
87	53 36.4	24.2677	— 30	— 38	+ 75	24.2684
88	54 3.9	23.7653	— 30	— 37	+ 71	23.7657
89	54 43.9	23.2529	— 28	— 37	+ 66	23.2531
90	55 9.9	22.7810	— 28	— 36	+ 64	22.7810
91	55 49.4	22.2132	— 27	— 35	+ 58	22.2128
92	56 28.4	21.5995	— 27	— 34	+ 56	21.5990
93	56 52.4	21.1079	— 26	— 33	+ 53	21.1073
94	57 36.2	20.4076	— 25	— 32	+ 50	20.4069
95	58 16.9	19.6482	— 24	— 31	+ 46	19.6475
96	58 44.2	18.9199	— 23	— 30	+ 44	18.9190
97	59 51.4	17.6266	— 22	— 28	+ 41	17.6257
98	12 0 14.9	16.8940	— 21	— 27	+ 39	16.8931
99	0 51.8	15.8578	— 20	— 25	+ 38	15.8566
100	1 19.9	15.3680	— 19	— 24	+ 37	15.3674

Die meteorologischen Daten waren:

Sternzeit	Barom.	Luft-Temperatur	Temp. d. Instruments
h m	mm	°	°
10 50	744.1	+ 17.5	+ 18.5
11 40		+ 16.8	+ 19.8
11 47	44.1		
12 8	44.0	+ 16.4	+ 19.5

Die Vergleichung der Beobachtung und Rechnung, sowie die daraus hervorgehenden Bedingungsgleichungen für die Verbesserung von x, y und die Bestimmung der Constanten c sind in folgender Tabelle enthalten.

	Mittl. Zt. Greenw.	Sehne Beob.	Sehne Rechn.	Beob.-Rechn. "						
	h m s	"	"	"						
1	5 8 34	819.30	824.43	— 5.1	— 2.295 $dr_\odot$	— 2.294 $dr_☾$	=	+ 1.476 dx	— 1.444 dy	+ 1 c
2	10 45	902.47	906.77	— 4.3	— 2.086	— 2.086		+ 1.269	— 1.319	+ 1
3	11 35	922.85	935.01	— 12.2	— 2.023	— 2.023		+ 1.203	— 1.282	— 1
4	12 15	952.04	956.89	— 4.8	— 1.977	— 1.976		+ 1.154	— 1.242	— 1
5	13 21	986.75	990.63	— 3.9	— 1.909	— 1.909		+ 1.081	— 1.215	— 1
6	13 50	996.72	1004.75	— 8.0	— 1.883	— 1.882		+ 1.051	— 1.199	— 1
7	14 43	1027.59	1029.75	— 2.2	— 1.837	— 1.836		+ 0.999	— 1.172	+ 1
8	15 13	1035.35	1043.22	— 7.9	— 1.813	— 1.813		+ 0.971	— 1.159	+ 1

	Mittl. Zt. Greenw.	Sehne Beob.	Sehne Rechn.	Beob.-Rechn. n						
	h m s	″	″	″						
9	5 15 45	1059.95	1056.96	+ 6.0	− 1.790 $dr\odot$	− 1.789 $dr☾$	=	+ 0.943 dx	− 1.146 dy	+ 1 c
10	16 28	1068.71	1075.21	− 6.5	− 1.759	− 1.759		+ 0.896	− 1.127	+ 1
11	17 10	1083.58	1092.13	− 8.6	− 1.732	− 1.731		+ 0.873	− 1.112	− 1
12	17 41	1100.76	1104.07	− 3.3	− 1.713	− 1.713		+ 0.849	− 1.102	− 1
13	18 20	1111.91	1118.92	− 7.0	− 1.690	− 1.690		+ 0.820	− 1.088	− 1
14	19 7	1132.50	1135.90	− 3.4	− 1.665	− 1.665		+ 0.787	− 1.074	− 1
15	24 24	1232.80	1232.45	− 0.2	− 1.534	− 1.534		+ 0.592	− 1.001	+ 1
16	25 7	1240.61	1243.54	− 2.9	− 1.521	− 1.520		+ 0.569	− 0.994	+ 1
17	25 55	1250.69	1255.18	− 4.5	− 1.507	− 1.506		+ 0.544	− 0.987	+ 1
18	26 37	1257.87	1264.88	− 7.0	− 1.495	− 1.495		+ 0.522	− 0.981	+ 1
19	27 20	1268.98	1274.32	− 5.3	− 1.484	− 1.484		+ 0.501	− 0.975	− 1
20	27 50	1278.30	1280.64	− 2.3	− 1.476	− 1.476		+ 0.486	− 0.971	− 1
21	28 24	1285.39	1287.56	− 2.2	− 1.465	− 1.465		+ 0.469	− 0.964	− 1
22	28 50	1289.19	1292.63	− 3.4	− 1.463	− 1.463		+ 0.458	− 0.964	− 1
23	29 27	1300.60	1299.47	+ 1.1	− 1.455	− 1.455		+ 0.441	− 0.961	+ 1
24	29 59	1303.32	1605.34	− 2.2	− 1.445	− 1.445		+ 0.425	− 0.955	+ 1
25	30 29	1308.70	1310.56	− 1.9	− 1.443	− 1.443		+ 0.412	− 0.955	+ 1
26	30 56	1311.20	1315.15	− 4.0	− 1.437	− 1.438		+ 0.400	− 0.952	+ 1
27	31 44	1319.32	1622.73	− 3.4	− 1.429	− 1.429		+ 0.379	− 0.948	− 1
28	32 26	1324.92	1329.08	− 4.2	− 1.422	− 1.422		+ 0.361	− 0.945	− 1
29	32 57	1330.18	1333.41	− 3.2	− 1.418	− 1.418		+ 0.647	− 0.943	− 1
30	33 24	1335.18	1337.10	− 1.9	− 1.414	− 1.414		+ 0.336	− 0.941	− 1
31	34 11	1342.22	1342.96	− 0.7	− 1.408	− 1.408		+ 0.616	− 0.969	+ 1
32	34 39	1345.99	1345.71	+ 0.3	− 1.405	− 1.405		+ 0.306	− 0.938	+ 1
33	35 51	1354.00	1354.06	− 0.1	− 1.396	− 1.396		+ 0.274	− 0.933	+ 1
34	66 23	1355.29	1357.09	− 1.8	− 1.396	− 1.393		+ 0.262	− 0.933	+ 1
35	36 56	1357.47	1360.16	− 2.7	− 1.389	− 1.390		+ 0.248	− 0.933	− 1
36	37 22	1359.55	1362.40	− 2.9	− 1.387	− 1.388		+ 0.237	− 0.932	− 1
37	37 52	1361.85	1364.72	− 2.9	− 1.685	− 1.385		+ 0.226	− 0.931	− 1
38	38 20	1362.89	1366.78	− 3.9	− 1.383	− 1.383		+ 0.215	− 0.961	− 1
39	39 1	1370.94	1369.44	+ 1.5	− 1.380	− 1.381		+ 0.198	− 0.931	+ 1
40	69 29	1368.88	1369.89	− 1.0	− 1.379	− 1.380		+ 0.192	− 0.931	+ 1
41	40 3	1372.92	1372.86	+ 0.1	− 1.376	− 1.377		+ 0.174	− 0.930	+ 1
42	40 20	1374.64	1373.64	+ 1.0	− 1.676	− 1.376		+ 0.167	− 0.930	+ 1
46	41 5	1676.28	1375.59	+ 0.7	− 1.374	− 1.375		+ 0.150	− 0.930	− 1
44	41 33	1376.00	1376.67	− 0.4	− 1.378	− 1.374		+ 0.139	− 0.931	− 1
45	42 7	1376.87	1677.36	− 0.5	− 1.372	− 1.373		+ 0.126	− 0.931	− 1
46	42 32	1375.80	1377.88	− 2.1	− 1.671	− 1.372		+ 0.116	− 0.961	− 1
47	43 18	1681.71	1678.40	+ 6.3	− 1.371	− 1.372		+ 0.099	− 0.933	+ 1
48	43 51	1377.50	1378.59	− 1.1	− 1.370	− 1.671		+ 0.086	− 0.933	+ 1
49	44 33	1678.87	1378.51	+ 0.4	− 1.370	− 1.371		+ 0.070	− 0.934	+ 1
50	44 56	1378.89	1378.34	+ 0.5	− 1.671	− 1.672		+ 0.061	− 0.936	+ 1
51	45 26	1376.09	1377.90	− 1.8	− 1.371	− 1.372		+ 0.049	− 0.938	− 1
52	46 16	1374.12	1376.86	− 2.7	− 1.372	− 1.373		+ 0.031	− 0.940	− 1

	Mittl. Zt. Greenw.	Sehne Beob.	Sehne Rechn.	Beob.-Rechn. n						
	h m s	″	″	″						
53	5 46 40	1375.88	1376.09	−0.2	−1.373 $dr_\odot$	−1.374 $dr_☾$	=	+0.021 dx	−0.941 dy	−1 c
54	47 10	1372.16	1375.07	−2.9	−1.374	−1.375		+0.009	−0.942	−1
55	47 49	1373.48	1373.37	+0.1	−1.377	−1.377		−0.006	−0.945	+1
56	48 16	1370.80	1372.05	−1.3	−1.377	−1.378		−0.016	−0.947	+1
57	48 48	1369.90	1370.22	−0.3	−1.378	−1.380		−0.029	−0.949	+1
58	49 12	1366.15	1368.83	−2.7	−1.380	−1.381		−0.038	−0.951	+1
59	49 41	1364.64	1366.88	−2.2	−1.382	−1.383		−0.049	−0.953	−1
60	50 6	1361.30	1364.98	−3.7	−1.384	−1.385		−0.059	−0.955	−1
61	50 42	1360.41	1362.13	−1.7	−1.387	−1.388		−0.074	−0.959	−1
62	51 5	1358.82	1360.19	−1.4	−1.389	−1.390		−0.083	−0.961	−1
63	51 41	1359.02	1356.89	+2.1	−1.392	−1.393		−0.097	−0.964	+1
64	52 6	1353.34	1354.34	−1.0	−1.394	−1.395		−0.107	−0.967	+1
65	52 52	1349.82	1349.38	+0.4	−1.400	−1.401		−0.126	−0.972	+1
66	53 17	1346.47	1346.56	−0.1	−1.403	−1.404		−0.136	−0.975	+1
67	53 50	1340.25	1342.50	−2.3	−1.407	−1.408		−0.153	−0.979	−1
68	54 19	1337.17	1338.74	−1.6	−1.410	−1.413		−0.162	−0.983	−1
69	54 45	1336.49	1335.33	+1.2	−1.414	−1.416		−0.173	−0.986	−1
70	55 19	1329.86	1330.41	−0.6	−1.419	−1.421		−0.187	−0.991	−1
71	56 9	1325.21	1322.89	+2.3	−1.428	−1.429		−0.2[illegible]8	−0.998	+1
72	56 35	1318.65	1318.70	−0.1	−1.432	−1.433		−0.220	−1.002	+1
73	57 31	1311.73	1309.09	+2.7	−1.442	−1.444		−0.244	−1.012	+1
74	57 57	1308.40	1304.38	+4.0	−1.448	−1.449		−0.256	−1.016	+1
75	58 36	1294.43	1297.06	−2.6	−1.455	−1.457		−0.273	−1.023	−1
76	59 22	1289.48	1287.75	+1.7	−1.467	−1.468		−0.295	−1.032	−1
77	6 8 56	1118.32	1119.88	−1.6	−1.686	−1.688		−0.617	−1.210	−1
78	9 27	1109.52	1107.39	+2.1	−1.705	−1.706		−0.639	−1.225	−1
79	10 8	1094.49	1090.55	+3.9	−1.731	−1.733		−0.670	−1.246	+1
80	10 36	1082.10	1078.37	+3.7	−1.751	−1.752		−0.692	−1.261	+1
81	11 8	1067.17	1064.25	+2.9	−1.774	−1.775		−0.717	−1.278	+1
82	11 32	1053.09	1053.36	−0.3	−1.793	−1.794		−0.741	−1.299	+1
83	12 5	1036.50	1037.75	−1.3	−1.820	−1.821		−0.765	−1.314	−1
84	12 32	1023.13	1024.70	−1.6	−1.842	−1.844		−0.789	−1.332	−1
85	13 5	1007.24	1007.94	−0.7	−1.873	−1.874		−0.821	−1.355	−1
86	13 44	991.40	987.35	+4.1	−1.912	−1.913		−0.860	−1.386	−1
87	14 22	971.14	966.37	+4.8	−1.953	−1.954		−0.900	−1.418	+1
88	14 49	951.08	951.16	−0.1	−1.985	−1.986		−0.930	−1.441	+1
89	15 29	930.51	927.75	+2.8	−2.035	−2.036		−0.977	−1.480	+1
90	15 55	911.62	911.45	+0.2	−2.071	−2.073		−1.010	−1.507	+1
91	16 35	888.88	886.14	+2.7	−2.130	−2.132		−1.072	−1.553	−1
92	17 14	864.32	859.72	+4.6	−2.196	−2.196		−1.122	−1.602	−1
93	17 37	844.65	843.39	+1.3	−2.239	−2.240		−1.158	−1.635	−1
94	18 21	816.62	811.16	+5.5	−2.327	−2.329		−1.234	−1.702	−1
95	19 2	786.23	778.86	+7.4	−2.424	−2.425		−1.314	−1.775	+1
96	19 29	757.08	756.80	+0.3	−2.495	−2.496		−1.372	−1.828	+1

	Mittl. Zt. Greenw.	Sehne Beob.	Sehne Rechn.	Beob.-Rechn. n						
	h m s	"	"	"						
97	6 20 36	705.33	696.97	+ 8.4	− 2.709 $dr\odot$	− 2.710 $dr☾$	=	− 1.543 dx	− 1.990 dy	+ 1 c
98	20 59	676.01	674.68	+ 1.3	− 2.798	− 2.799		− 1.613	− 2.057	+ 1
99	21 36	634.53	636.90	− 2.4	− 2.965	− 2.966		− 1.741	− 2.182	− 1
100	22 4	614.95	606.08	+ 8.9	− 3.115	− 3.116		− 1.856	− 2.295	− 1

Dass die n-Werthe anfänglich stark negativ sind und gegen Ende positiv, liegt, wie die Ausgleichung zeigt, darin, dass x einer grösseren Verbesserung bedarf. Aber innerhalb benachbarter Werthe von n zeigen sich namentlich zu Anfang und zu Ende der Beobachtungsreihe oft sehr grosse Unregelmässigkeiten, die, wie eine nachträgliche Prüfung der Registrirstreifen gezeigt hat, nicht etwa in fehlerhaften Ablesungen ihren Grund haben, sondern dadurch erklärbar sind, dass zu Anfang bei dem Fortrücken der Wolken und gegen Ende bei dem niedrigen Stande der Sonne in etwa 8 Grad Höhe die Bilder ganz ungemein unruhig waren. Schon zu Anfang der Beobachtung war die Höhe der Sonne nur 19 Grad, so dass also die ganze Messungsreihe unter sehr ungünstigen Verhältnissen angestellt ist und nur die sehr grosse Zahl von Einstellungen lässt hoffen, ein brauchbares Endresultat zu erlangen.

Da nun die Beobachtungen insofern völlig symmetrisch angeordnet sind, dass immer je zwei Einstellungen bei Rechts- und bei Linksdrehung der Distanzschraube vor und nach dem Durchschrauben der Objectivhälften vorhanden sind und demnach die als constant betrachtete Grösse c bei vier aufeinanderfolgenden Gleichungen in der Anordnung $++--$ oder $--++$ vorkommt und die Kenntniss dieser Grösse selbst keine besondere Bedeutung hat, so wäre es eine überflüssige Arbeit gewesen, sämmtliche 100 Bedingungsgleichungen mit drei Unbekannten einzeln zu behandeln. Es sind deshalb je vier Gleichungen zu einem Mittelwerthe vereinigt, wobei die Grösse c dann gänzlich verschwindet. Dies kommt also auf das bei dem Messen unveränderlicher Abstände gebräuchliche Verfahren hinaus, immer vier einzelne Einstellungen in beiden Lagen der Objectivhälften und bei Rechts- und Linksdrehung der Distanzschraube zu einer Distanzmessung zu vereinigen.

Auf diese Weise entstehen nachfolgende 25 Bedingungsgleichungen:

Gruppe	Nr.	Beob.-Rechn. n						Beob.-Rechn. v
1	1—4	− 6.60"	− 2.10 $dr\odot$	− 2.09 $dr☾$	=	+ 1.28 dx	− 1.32 dy	− 0.5"
2	5—8	− 5.50	− 1.86	− 1.86		+ 1.03	− 1.19	− 0.5
3	9—12	− 3.85	− 1.75	− 1·75		+ 0.89	− 1.12	+ 0.6
4	13—16	− 3.38	− 1.60	− 1.60		+ 0.69	− 1.04	+ 0.2
5	17—20	− 4.77	− 1.49	− 1.49		+ 0.51	− 0.98	− 1.9
6	21—24	− 1.68	− 1.46	− 1.46		+ 0.45	− 0.96	+ 0.9
7	25—28	− 3.38	− 1.43	− 1.43		+ 0.39	− 0.95	− 1.0
8	29—32	− 1.38	− 1.41	− 1.41		+ 0.33	− 0.94	+ 0.7
9	33—36	− 1.88	− 1.39	− 1.39		+ 0.26	− 0.93	0.0

Gruppe	Nr.	Beob.-Rechn. n					Beob.-Rechn. v
10	37—40	$-1''.58$	$-1.38\,dr_\odot$	$-1.38\,dr_☾ =$	$+0.21\,dx$	$-0.93\,dy$	$+0''.1$
11	41—44	+0.35	−1.37	−1.38	+0.16	−0.93	+1.8
12	45—48	+0.15	−1.37	−1.37	+0.11	−0.93	+1.4
13	49—52	−0.90	−1.37	−1.37	+0.05	−0.94	+1.2
14	53—56	−1.08	−1.37	−1.38	0.00	−0.94	−0.2
15	57—60	−2.23	−1.38	−1.38	−0.04	−0.95	−1.5
16	61—64	−0.50	−1.39	−1.39	−0.09	−0.96	0.0
17	65—68	−0.90	−1.40	−1.41	−0.14	−0.98	−0.5
18	69—72	+0.70	−1.42	−1.43	−0.20	−0.99	+0.8
19	73—76	+1.45	−1.45	−1.46	−0.27	−1.02	+1.4
20	77—80	+2.02	−1.72	−1.72	−0.65	−1.24	+0.7
21	81—84	−0.08	−1.81	−1.81	−0.75	−1.31	−1.7
22	85—88	+2.03	−1.93	−1.93	−0.88	−1.40	0.0
23	89—92	+2.58	−2.11	−2.11	−1.05	−1.54	0.0
24	93—96	+3.63	−2.37	−2.37	−1.27	−1.74	+0.4
25	97—100	+4.05	−2.90	−2.90	−1.69	−2.13	−0.4

Bei dieser Zusammenziehung sind die grossen Unregelmässigkeiten in den n-Werthen natürlich stark ausgeglichen und der Verlauf lässt jetzt klar erkennen, dass dx einen grösseren Werth erhalten wird.

Die Behandlung der Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate führt auf die Endgleichungen

$$-43''.11 + 4.56\,dr_\odot + 4.57\,dr_☾ = +12.30\,dx + 4.20\,dy$$
$$+15.66 + 49.47\,dr_\odot + 49.51\,dr_☾ = +4.20\,dx + 34.31\,dy$$

woraus sich ergieht

$$dx = -3''.820 - 0.127\,dr_\odot - 0.127\,dr_☾ \qquad \text{w. F. } \pm 0''.187$$
$$dy = +0.924 + 1.457\,dr_\odot + 1.458\,dr_☾ \qquad \pm 0.114$$
$$\text{w. F. einer Gleichung} = \pm 0''.64.$$

Nun muss hier noch bemerkt werden, dass bei der Berechnung von x ein kleiner Irrthum unterlaufen ist, indem bei der Berechnung der Mondparallaxe durch einen Schreibfehler der Werth $\log \varrho \cos \varphi'$ für Göttingen 9.794774 anstatt 9.794754, also um 20 Einheiten der sechsten Decimale fehlerhaft angesetzt worden ist. Dadurch entsteht in den Werthen $\varDelta\alpha_☾$ ein Fehler von durchschnittlich $+0''.090$ oder in dx von $+0''.083$, der jetzt wieder in Ahrechnung gebracht werden muss.

Es heisst also nach dieser Berichtigung

$$dx = -3''.903 - 0.127\,dr_\odot - 0.127\,dr_☾$$
$$dy = +0.924 + 1.457\,dr_\odot + 1.458\,dr_☾$$

Ferner muss hier wie bei der anderen Finsterniss wegen der bei der Parall-

axenrechnung vernachlässigten Seehöhe des Heliometers noch eine Verbesserung angebracht werden, nämlich

$$d(\alpha☾ - \alpha_{\odot}) = +0''.065 \qquad d(\delta☾ - \delta_{\odot}) = +0''.072$$

oder

$$dx = +0.060 \qquad dy = +0.072$$

Das Endresultat ist also

$$\mathbf{dx = -3''.838 - 0.127\, dr_{\odot} - 0.127\, dr☾}$$
$$\mathbf{dy = +0.996 + 1.457\, dr_{\odot} + 1.458\, dr☾}$$

Bei der Reduction der Beobachtungen ist, wie bereits mehrfach bemerkt, für die Radien in mittlerer Entfernung angenommen worden

$$\text{Sonne} \quad R_{\odot} = 959''.56 \qquad \text{Mond} \quad R☾ = 932''.27$$

Nimmt man dagegen den Radius der Sonne nach meinen Beobachtungen am grossen Heliometer selbst, ohne Anwendung des Ocularprisma wie bei den Beobachtungen dieser Finsterniss, zu

$$R_{\odot} = 960''.25,$$

also die Correction des bei der Rechnung verwandten Werthes in mittlerer Entfernung

$$dR_{\odot} = +0''.69,$$

oder für diese Finsterniss

$$dr_{\odot} = +0''.69 \cdot \frac{945.28}{959.56} = +0''.68$$

so erhält man

$$dx = -3''.936 - 0.127\, dr☾$$
$$dy = +1.987 + 1.458\, dr☾$$

Dr. Kobold nimmt in seiner Abhandlung den mittleren Mondradius $R☾ = 932''.85$, während ich den Werth nach Oudemans 932''.27 angewandt habe. Setzt man demnach zur Reduction auf Kobold's Annahme

$$dR☾ = +0''.58$$

oder für diese Finsterniss

$$dr☾ = +0''.58 \frac{944''.7}{932.3} = +0''.59$$

so wird

$$\text{Schur} \quad dx = -3''.936 - 0.127 \times +0''.59 = -3''.936 - 0''.075 = -4''.01$$
$$dy = +1.987 + 1.458 \times +0.59 = +1.987 + 0.860 = +2.85$$

oder

$$\text{Schur} \quad d(\alpha☾ - \alpha_{\odot}) = -4''.36$$
$$d(\delta☾ - \delta_{\odot}) = +2.85$$

Dagegen giebt Kobold auf Seite 39 seiner Abhandlung nach Heliometer-beobachtungen in Strassburg

$$\text{Kobold} \quad d(\alpha_☾ - \alpha_\odot) = -2''.30$$
$$d(\delta_☾ - \delta_\odot) = +0.57$$

Man hat also das Endresultat, wenn man noch das Resultat der Kobold-schen Untersuchung aus Heliometer-, Refractor- und Contact-Beobachtungen wie früher unter dem Namen Kobold Gesammtresultat hinzufügt,

	$d(\alpha_☾ - \alpha_\odot)$	$d(\delta_☾ - \delta_\odot)$	Annahme für mittl. Entf.	
Schur	$-4''.36$	$+2''.85$	$R_\odot = 960''.25$	$R_☾ = 932''.85$
Kobold	-2.30	$+0.57$	959.71	932.85
Kobold Gesammtresultat	-1.94	$+0.02$	959.71	932.85

und bei Annahme anderer Werthe für die Durchmesser hat man die Aenderung der Rectascensions- und Declinations-Unterschiede

Schur $d(\alpha_☾ - \alpha_\odot) = -0.138\, dr_\odot - 0.138\, dr_☾ \quad d(\delta_☾ - \delta_\odot) = +1.457\, dr_\odot + 1.457\, dr_☾$

Kobold $\quad -0.118\, dr_\odot - 0.118\, dr_☾ \quad +1.313\, dr_\odot + 1.313\, dr_☾$

Man sieht also auch hier wieder, dass die Verbesserung des Mondortes in Bezug auf den Sonnenort namentlich in Declination in hohem Grade von den angewandten Radien der beiden Himmelskörper abhängig ist.

Da die Berechnung der Beobachtungen auf beiden Sternwarten, soweit sich beurtheilen lässt, doch in aller Strenge und nach denselben Grundsätzen, nämlich nach den von Wichmann aufgestellten Formeln durchgeführt ist, so muss man die nicht sehr befriedigende Uebereinstimmung der Resultate wohl den unruhigen Bildern bei dem niedrigen Stande der Sonne zuschreiben, worüber sich die Beobachter an beiden Orten beklagen.

Wollte man darauf verzichten, für meine Beobachtungen und für Kobold verschiedene Werthe für den Sonnenradius anzuwenden und für mich etwa denjenigen Werth zu nehmen, der sich aus meinen Beobachtungen an dem Fraunhofer'schen Heliometer der Göttinger Sternwarte während der Jahre 1892—94 ergiebt, nämlich 959″.82, so wäre damit $dR_\odot = 959''.82 - 960''.25 = -0''.43$ und

$$d\alpha = -0''.43 \times -0.138 = +0''.06$$
$$d\delta = -0.43 \times +1.457 = -0.63$$

und man hätte dann

$$\text{Schur} \quad d(\alpha_☾ - \alpha_\odot) = -4''.30 \qquad d(\delta_☾ - \delta_\odot) = +2''.22,$$

wodurch die grossen Unterschiede gegen Kobold wohl etwas verringert, aber nicht beseitigt würden. Diese kleine Verringerung der Unterschiede würde aber dadurch erkauft sein, für das grosse Repsold'sche Heliometer einen Sonnenhalbmesser anzuwenden, der den in einer längeren Reihe von Jahren gemessenen Werthen entschieden widerspricht.

Will man auch hier wieder wie bei der vorangehenden Finsterniss einen Mittelwerth bilden, indem man dem Göttinger Ergebniss das Gewicht 1 und dem von Kobold aus Heliometer-, Refractor- und Contactbeobachtungen abgeleiteten das Gewicht 3 ertheilt, so wird das Resultat beider Untersuchungen

	$d(\alpha☾ - \alpha\odot)$	$d(\delta☾ - \delta\odot)$		Annahme für mittl. Entf.	
Schur	−4″.36	+2″.85	Gew. 1	$R\odot$ 960″.25	$R☾$ 932″.85
Kobold	−1 .94	+0 .02	3	959 .71	932 .85
Endresultat	−2 .54	+0 .97			

Zum Schluss möchte ich noch bemerken, dass für beide Finsternisse die Berechnung der Oerter der Sonne und des Mondes, sowie der Parallaxen durch eine von Professor Ambronn ausgeführte unabhängige doppelte Rechnung einiger Werthe geprüft worden ist.

Erklärung zu den Plänen der Sternwarte.

I.	Grundriss des Gebäudes	Maassstab 1 : 400.
II.	Grundriss des Sternwarten-Grundstücks	1 : 2000.
III.	Querschnitt durch die Mitte des Gebäudes von Nord nach Süd	1 : 200.

Bedeutung der Bezeichnungen.

A Westlicher Saal, zur Zeit zu erdmagnetischen Beobachtungen benutzt.

B Oestlicher Saal, Bibliothek der Sternwarte.

C Gauss's Arbeits- und Sterbezimmer mit einer Gedächtnisstafel.

D Aufzug durch die vier Stockwerke des Treppenhauses zum Aufwinden von Instrumenten auf das flache Dach neben dem Heliometerthurm, zugleich Raum für galvanische Elemente. Durch einen Glasthürverschluss davon getrennt hängen in den beiden mittleren Stockwerken die Pendeluhren von Hardy in London und Deucker in Hamburg.

E Beton-Fahrbahn für transportable Instrumente, nämlich für den Cometensucher von sechs Zoll Oeffnung von Merz und das Fernrohr von vier Zoll Oeffnung, beide mit parallaktischer Aufstellung und Theilkreisen. Der gewöhnliche Aufbewahrungsort dieser Instrumente ist die Rotunde im Mittelpunkt der Sternwarte.

F Erdmagnetisches Observatorium im Garten.

G Wärterwohnung.

a Drehkuppel für das Heliometer von sechs Zoll Oeffnung von A. Repsold & Söhne vom Jahre 1888. (Abbildung des Instruments in: Astron. Mittheilungen, Vierter Theil.) Seehöhe 172 Meter über Normal-Null.

b Eiserner Thurm für das Heliometer von drei Zoll Oeffnung von Fraunhofer vom Jahre 1814. (Abbildung in: Astronom. Mittheilungen, Dritter Theil.) Seehöhe 162,5 Meter.

c Meridiankreis von Reichenbach vom Jahre 1819; vor dem Jahre 1888 in d aufgestellt. Unter dem Fussboden Pfeiler für festen und beweglichen Quecksilber-Horizont. Dieses Instrument befindet sich in regelmässigem Gebrauch.

d Passagen-Instrument von Reichenbach vom Jahre 1818, vor 1888 in c aufaufgestellt, dient als Collimator für den Meridiankreis zur Bestimmung des Collimationsfehlers und der Schiefe der Horizontalfäden.

Südlicher Endpunkt der Hannover'schen Gradmessung auf dem gemeinschaftlichen Unterbau beider Pfeiler unter dem Fussboden festgelegt.

e Meridiankreis von J. G. Repsold; ältester aller Meridiankreise, 1804 auf der Privatsternwarte des Verfertigers in Hamburg, Elbhöhe, Stintfang, aufgestellt seit 1818 in Göttingen. Daneben die Pendeluhr von Shelton in London, von Th. Wagner in Wiesbaden mit elektrischem Contact versehen.

f Kleines Passagen-Instrument mit gebrochenem Fernrohr, aus einem Ertelschen Universal-Instrument durch Meyerstein hergestellt.

g Vierzölliger Refractor von Merz mit parallaktischer Aufstellung, Faden-Ring- und Kreuzstab-Mikrometer.

h Mauerquadrant von sechs Fuss engl. (1,95 Meter) Radius von Bird in London, im vorigen Jahrhundert von Tobias Mayer auf der alten Sternwarte benutzt. Dieses Instrument war anfänglich an Pfeilern nördlich und südlich vom Repsold'schen Meridiankreise aufgehängt; im Jahre 1876 wurde es an der Westwand des Saales befestigt und die Pfeiler wurden bis unter den Fussboden abgetragen.

i Collimator zum grossen Heliometer in einem Aufbau über dem Treppenhause.

Eine Ansicht der Süd-Front der Sternwarte befindet sich in: Astronom. Mittheilungen, Vierter Theil.

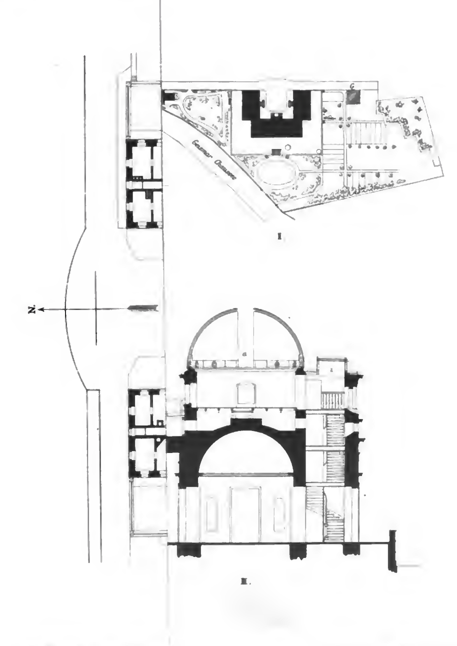
Die drei Pläne der Sternwarte sind von dem Regierungsbauführer Maske nach den auf dem Universitäts-Bauamt befindlichen Zeichnungen und verschiedenen Abmessungen meinerseits gezeichnet worden.

Pläne von der Sternwarte sind ferner noch enthalten in der Schrift: Umbau der Sternwarte zu Göttingen. Mitgetheilt vom Bauinspektor Wever zu Berlin. (Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover, Bd. XXXIX, Jahrg. 1893.)

Berichtigungen.

Seite 13 9 v. u. „Contact“ anstatt Control
23 12 v. u. „zu“ zu streichen

Göttingen, Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kästner).



Photolith d geogr-lith. Anst u. Steindr v C.L. Keller, B

Weidmannsche Buchhandlung in Berlin.


LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF CALIFORNIA

Vermessung
der beiden Sternhaufen h und χ Persei

mit dem

sechszölligen Heliometer der Sternwarte in Göttingen

verbunden mit einer Uebersicht aller
bis zum Jahre 1900 ausgeführten Instrumental-Untersuchungen

von

Wilhelm Schur

Mit einer Sternkarte.

Vorgelegt in der Sitzung am 3. Februar 1900.

Göttingen 1900
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei
(W. Fr. Kaestner).

INHALT.

	Seite
Einleitung	1
Verzeichniss der beobachteten fünfzehn Sterne. Genäherte Orte für 1890	4
Abhängigkeit der Ocularstellung von der Temperatur des Instruments	5
Reduction der Distanzmessungen auf die Normal-Ocularstellung	13
Abhängigkeit der Distanzmessungen von der Temperatur	15
Kürzeste Entfernung der beiden Objectivhälften von einander	18
Systematische Correctionen der Distanzmessungen	20
Abänderung des früher angenommenen Scalenwerthes	42
Reduction der Positionswinkel-Messungen	46
Indexfehler des Positionskreises aus Sternbeobachtungen	49
Uebersicht über die angewandten Instrumental-Constanten und Aufstellungsfehler	56
Triangulation zwischen fünfzehn helleren Sternen der beiden Sternhaufen	58
Ausgleichung der Hauptfigur	66
Richtung der Linie ap	75
Oerter der Sterne für 1890.0	81
Verbesserungen zu früheren Veröffentlichungen der Sternwarte	85



Vermessung der beiden Sternhaufen *h* und *χ* Persei mit dem sechszölligen Heliometer der Sternwarte in Göttingen, verbunden mit einer Uebersicht aller bis zum Jahre 1900 ausgeführten Instrumental-Untersuchungen

von

Wilhelm Schur.

Mit einer Sternkarte.

Vorgelegt am 8. Februar 1900.

Im Sternbilde des Perseus in etwa $2^h\ 13^m$ und $+56^0.6$ befinden sich zwei helle Sternhaufen *h* und *χ* Persei nebeneinander, die einzeln oder im Zusammenhange mehrfach Gegenstand der Beobachtung gewesen sind.

1) *h* Persei.

Den vorangehenden Sternhaufen *h* Persei am Münchener Refractor beobachtet zu haben erwähnt zuerst Lamont in den Astronomischen Nachrichten, Band 14, Seite 183 und die Beobachtungen selbst sind in den Annalen der Königlichen Sternwarte bei München, XVII Band, München 1869 mitgeteilt. Als Grundlinie diente die Verbindung zweier mit 1 und 41 bezeichneten Sterne im Abstand von 135″.57 und von diesen ausgehend wurden dann die übrigen durch Messungen von Positionswinkeln angeschlossen. Lamont hat diese Beobachtungen nicht selbst reducirt, und wie aus einer später zu erwähnenden Abhandlung von Dr. Oertel hervorgeht, hat es sich nicht ermöglichen lassen, daraus brauchbare Resultate abzuleiten.

Späterhin erfolgte eine Vermessung durch Krüger, nämlich:

A. Krüger, Der Sternhaufen *h* Persei, Beobachtungen desselben am Bonner Heliometer nebst deren Berechnung. Abdruck

aus den Abhandlungen der Finnischen Societät der Wissenschaften. Helsingfors 1865.

Ausgehend von der Mitte zwischen den beiden benachbarten Sternen

$$\begin{array}{llll} \text{B. D.} + 56^{\circ}.526 & 8^{m}.7 & 1855.0 & 2^{h}\ 9^{m}\ 1^{s}.3\ + 56^{\circ}\ 27'.2 \\ \quad\quad\ 527 & 8.4 & & 2\ \ 9\ \ 1.4\quad\ 56\ 27.4 \end{array}$$

sind zu Anfang der sechziger Jahre 43 Sterne durch Anschluss in Abstand und Positionswinkel bestimmt worden und zum Schluss ist ein Verzeichniss der Sterne für 1855.0 gegeben, wobei Meridiankreis-Beobachtungen zweier Sterne durch Argelander, nämlich von B. D. + $56^{\circ}.522$, $6^{m}.8$ und + $56^{\circ}.530$, $6^{m}.7$ zu Grunde gelegt worden sind.

Die Abhandlung: Bredichin, Mesures micrometriques du groupe de Persée. Annales de l'observatoire de Moscou. Vol. IV. 2. livraison. pag. 5.

enthält Vergleichungen in Rectascension und Declination einer Zahl von Sternen in h Persei gegen einen als a' bezeichneten hellen Stern B. D. + 56. 522 $6^{m}.8$, der in der Abhandlung von Krüger mit Nr. 1 bezeichnet wird. Die Endresultate sind nicht abgeleitet sondern nur die von Refraction befreiten einzelnen im Jahre 1877 beobachteten Unterschiede mitgeteilt. Diese Untersuchung hat mehr die Bedeutung einer Mappirung, denn die darin enthaltenen 65 Sterne sind meistens nur einmal in Rectascension und in einigen Fällen zweimal in Declination beobachtet worden.

Die neueste Vermessung dieses Sternhaufens ist enthalten in:

Karl Oertel, Neue Beobachtungen und Ausmessung des Sternhaufens h Persei am Münchener grossen Refractor. Neue Annalen der K. Sternwarte in Bogenhausen bei München Band II. München 1891.

Diese Abhandlung gelangte im September 1891 zu meiner Kenntniss, während der Anfang meiner am hiesigen Heliometer ausgeführten Vermessung sogleich nach dem Erscheinen der Pihl'schen Abhandlung im Juli 1891 vorbereitet und im October 1891 begonnen wurde.

Die Oertel'schen Beobachtungen sind in den Jahren 1887 bis 1889 ausgeführt und es sind zwischen 125 Sternen 290 Differenzen in Rectascension und 421 in Declination gemessen worden, die nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichen sind.

Als Ausgangspunkt diente der Stern Bradley 316, dessen Ort für 1890 aus 4 Sterncatalogen von Piazzi bei E. Becker zu:

$\alpha\ 2^{h}\ 11^{m}\ 21^{s}.121\quad \delta\ + 56^{\circ}\ 37'\ 35''.29$ angenommen ist und in meiner Triangulation nicht vorkommt.

Am Schlusse der Abhandlung sind Vergleichungen mit den Resultaten von Krüger und Lamont angestellt, die wie bemerkt gezeigt haben, dass die letzteren Beobachtungen sich nicht sicher reduciren lassen.

2) χ Persei.

Ueber den nachfolgenden Sternhaufen χ Persei ist zuerst zu citiren

H. C. Vogel. Der Sternhaufen χ Persei beobachtet am 8-zölligen Refractor der Leipziger Sternwarte in den Jahren 1867—1870. Leipzig 1878.

Diese Abhandlung enthält ein Verzeichniss von 30 Sternen für 1870.0. Die Festlegung der Gruppe beruht auf Meridianbeobachtungen von 5 dieser Sterne durch Argelander, Johnson, Lalande. Die Helligkeit der Sterne ist durch Beobachtungen mit einem Zöllner'schen Photometer bestimmt.

Einige genäherte Ortsangaben nach zwei photographischen Aufnahmen in Potsdam finden sich in der Schrift:

O. Lohse. Ueber die photographische Aufnahme χ Persei. Astronom. Nachrichten, Band 111. Nr. 2649—50.

Ferner ist zu erwähnen

O. A. L. Pihl. The stellar cluster χ Persei micrometrically surveyed. Christiania 1891.

Diese Vermessungen sind innerhalb der Jahre 1870 bis 1890 von dem verstorbenen Gasdirector Pihl auf seiner Privatsternwarte in Christiania an einem parallaktisch montirten Refractor von 81 Millimeter Oeffnung mit Hülfe eines Bar-Micrometer nach der Einrichtung von Boguslawski angestellt. Der Stab wurde in den verschiedenen Beobachtungsnächten bald rechts bald links in ungefähr 45 Grad gegen den Stundenkreis geneigt und die wahre Neigung durch Beobachtung zweier in Declination verschiedenen Sterne von bekannter Position bestimmt.

Als während dieser Beobachtungsreihe die Abhandlung von Vogel erschienen war und Pihl für etwa hundert Sterne damit die von ihm erhaltenen Rectascensionen verglich, bemerkte er Unterschiede die bis auf mehr als eine halbe Zeitsecunde gingen und der Helligkeit der Sterne, der Luftbeschaffenheit, der angewandten Vergrösserung, physiologischen Einflüssen und dem dadurch beeinflussten allmähligen Verschwinden und Aufleuchten der helleren Sterne am Rande der Metallstreifen zuzuschreiben sind.

Pihl hat diesen Einfluss zu ermitteln gesucht und in Rechnung gebracht. Am Ende der Schrift befindet sich ein Catalog der Oerter von 236 Sternen zwischen den Grössen 6,6 und 11.6 bezogen auf 1870,0.

Unter den Aufnahmen die sich über beide Sternhaufen zugleich erstrecken ist noch zu erwähnen:

M. Bronsky et A. Stebnitzky. Les positions des étoiles de h et χ Persei et de leurs environs déduites des mesures sur deux clichés photographiques. Mémoires de l'academie imperiale des sciences de St. Petersbourg. VIIIe série. 1895.

Dieser Catalog beruht auf Abmessungen der beiden Damen an zwei photographischen Aufnahmen von Professor Donner in Helsingfors am 14. September 1890 und 20. September 1892.

Auf beiden Platten zugleich finden sich mehr als 1300 Sterne und mit Einschluss der nur auf einer Platte gemessenen sind im Ganzen nahezu 2000 Sternörter gegeben. Die Festlegung beruht für die erste Aufnahme auf zwei Sternen nach dem Catalog von Pihl und für die zweite auf der Ortsangabe eines Sternes ohne nähere Angabe der Quelle.

Veranlasst durch die grossen individuellen Unregelmässigkeiten, die sich bei der Vermessung von Pihl zeigten, beschloss ich eine Anzahl von Sternen aus beiden Sternhaufen durch eine möglichst sorgfältige Triangulation mit zahlreichen überschüssigen Beobachtungen untereinander zu verbinden, nämlich die folgenden:

Verzeichnis der beobachteten 15 Sterne. Genäherte Oerter für 1890.

	B. D.	Helsingfors. Gotha	Krüger Bonn.	Pihl	Grösse B. D.		
a	+ 56°.471	2030	18		6.6	2h 9m 11s	+ 56° 32'.6
b	479	2043	32		8.9	9 35	23.3
c	498	2071	5		8.6	10 41	30.0
d	500	2073	4		8.5	10 45	41.9
e	530	2093	2		6.7	11 30	39.6
f	543	2113	12		8.0	12 11	48.6
g	545	2117	26		8.5	12 32	35.5
h	547	2120	31	11	8.2	12 45	29.2
i	555	2137		33	8.8	13 27	21.6
k	567	2148		77	8.4	14 8	24.0
l	568	2150		78	6.7	14 9	44.3
m	593	2177		150	7.0	15 12	53.0
n	595	2187		159	8.5	15 23	41.8
o	598	2190		171	8.4	15 38	21.1
p	608	—		232	9.2	17 4	32.9

Zur Orientirung der ganzen Gruppe wurde zwischen den beiden äussersten Sternen *a* und *p*, die zwei Grad von einander abstehen, der Positionswinkel wiederholt gemessen und zur Prüfung der Orientirung Beobachtungen am Reichenbach'schen Meridiankreise in Göttingen und späterhin am Berliner Meridiankreise verwandt. Zunächst wurden die Abstände in zwei aneinander stossenden grossen Vierecken *a b i f* und *f i p m* nebst den vier darin befindlichen Diagonalen und den langen Verbindungslinien *a p* und *b m*, also im Ganzen 13 Linien durchschnittlich an 5 Abenden gemessen und darauf die Linien welche die übrigen Punkte *c d e g h k l n o* mit den 6 Hauptpunkten und unter sich verbinden an mindestens 3 Abenden.

Die Beobachtungen begannen 1891 October 13 und wurden 1896 Februar 17 abgeschlossen.

Ehe auf die Bearbeitung dieser Beobachtungen und die Ableitung der Endresultate eingegangen werden kann, ist zunächst der Bericht über die am Heliometer

in den letzten Jahren ausgeführten Untersuchungen über die Instrumental- Constanten fortzuführen, Der erste Theil dieses Berichtes befindet sich in meiner Abhandlung über die Triangulation der Praesepe, Astronomische Mittheilungen von der Königlichen Sternwarte zu Göttingen. Vierter Theil, Göttingen 1895. der Hauptsache nach bis zum Jahre 1892 und es ist jetzt noch dasjenige hinzuzufügen, was seitdem bis zum Jahre 1899 darin geschehen ist.

Dabei ist zu bemerken, dass in dem Beobachtungs- und Reductions-Verfahren gegen die darüber im vierten Theil gemachten ausführlichen Auseinandersetzungen im Wesentlichen nicht viel geändert worden ist und dass sich daher die Fortsetzung darauf beschränken wird, die numerischen Daten zur Reduction der Beobachtungen durch Ausdehnung der Untersuchungen auf einen längeren Zeitraum immer mehr zu prüfen und verschärfen. Einige neuere Gesichtspunkte sind durch die Ausdehnung der Untersuchungen über die systematischen Correctionen der Distanzmessungen hinzugekommen, worüber zuletzt berichtet werden soll und ich werde nun die einzelnen Abtheilungen in derselben Reihenfolge wie früher besprechen.

Es mag an dieser Stelle erwähnt werden, dass ausser den drei von Anfang an vorhandenen Ocularen I II III mit den Vergrösserungen 105, 174, 261, von denen I zu Aufstellungsbeobachtungen und bei Beobachtung von Cometen und Sternbedeckungen, II zu der Mehrzahl der Beobachtungen und III nur bei Planetendurchmessern und Doppelsternen benutzt wird, im Jahre 1892 noch ein schwächeres Ocular mit 50 facher und im Jahre 1898 eins von 23 facher Vergrösserung hinzugekommen ist.

Die Hinweise auf die früheren Zusammenstellungen sind durch die Bezeichnung IV und die Seitenzahl angedeutet.

Abhängigkeit der Ocularstellung von der Temperatur des Instruments.

Die früheren Zusammenstellungen der Focussirungen die dazu dienen den Einfluss der Temperatur auf die Brennweite des Objectivs durch Einstellung des Oculars auf Gestirne zu bestimmen, erstreckten sich von 1889 Januar 4 bis 1892 Januar 21 (IV. 36). Als einzige seitdem eingetretene Aenderung würde hier wohl zu bemerken sein, dass bei den Focussirungen auf den Polarstern vor den Beobachtungen der Sonnendurchmesser bei hohem Stande der Sonne früher immer etwas Sonnenlicht in das Innere der Drehkuppel gelangte, wenn die Spaltöffnung nach Norden gerichtet war. Um dies zu verhindern habe ich ausser dem grünen an geradlinigen Stangen mit Ringen und Schnüren beweglichen grossen Sonnenschirm noch kleine seitliche Gardinen an der linken Seite der Spaltöffnung anbringen lassen, so dass jetzt das Innere des Thurmes völlig dunkel gemacht werden kann.

Diese Einrichtung wird seit 1898 Juni 24 benutzt und kann auf das Ergebniss in Bezug auf die Focalstellung wohl nur insofern von Einfluss sein als man dabei jetzt nicht mehr eine kleine durch das Sonnenlicht gestreifte aber sechs Meter entfernte helle Fläche vor Augen hat.

1889 August 27 musste wie früher bemerkt (IV. 36.) das Objectiv auseinander genommen und gereinigt werden weil Wassertropfen zwischen die Linsen gerathen waren. Das Resultat der damals abgeleiteten Relation zwischen Normalstellung N des Oculars und der Temperatur des Instruments definirt durch die Gleichung

$$t = O + {}^1/_4\,(o - O)$$

wo O und o die berichtigten Angaben der Thermometer am Objectiv und am Ocularende, war

vor 1889 August 27	$N =$	$20.89 + 0.035\,t$
nach „		$21.18 + 0.019\,t$

Das Reinigen des Objectivs hatte also vermutlich durch eine kleine Aenderung der Spannung in der Fassung sowohl die Normalstellung für 0 Grad um 0.29 Millimeter geändert als auch einen anderen Temperatur Coëfficienten verursacht, sodass die Beobachtungen der ersten acht Monate seit der Aufstellung des Heliometers in thermischer Beziehung etwas anders als späterhin behandelt werden mussten. Seitdem ist mit dem Objectiv nichts weiter vorgenommen, als dass einige Male die Objectivhälfte II ohne Herausnahme aus der Metallfassung abgenommen wurde um die innere Fläche beider Hälften mit Aether reinigen zu können. Das über alle Vorgänge an dem Instrument von mir regelmässig geführte Tagebuch weist dafür die Tage 1896 Juni 5 und 1898 November 29 auf.

Die Befestigung der breiten stählernen Fassungen der beiden Hälften an den Endflächen des Fernrohres ist eine solche, dass eine nennenswerthe Aenderung der Entfernung vom Ocularende gänzlich ausgeschlossen ist und es kann aus diesem Grunde mit Sicherheit behauptet werden, dass in den optischen Verhältnissen des Fernrohres seit 1889 August 27 nichts geändert worden ist.

Die Untersuchungen über die Normalstellung des Oculars, soweit nicht das Auge des Beobachters noch eine besondere Rolle dabei spielt, sind deshalb für den ganzen Zeitraum bis auf die Gegenwart als einheitlich zu behandeln.

Zur genauen Bestimmung der Temperatur-Coëfficienten sind wie bisher auch die am Tage vor den Sonnenbeobachtungen gemachten Einstellungen auf die beiden Bilder des Polarsterns verwandt worden, da dabei häufig hohe Temperaturen erzielt werden und aus den Rechnungen hervorgeht, dass in Betracht kommende Verschiedenheiten gegen die nächtlichen Focussirungen auf Doppelsterne nicht vorhanden sind. Die zu Anfang meiner Thätigkeit am Heliometer ausgeführten Einstellungen auf das Fadenkreuz eines horizontalen im Schatten aufgestellten Collimators über dem Treppenhause haben sich bei der Kürze des Fernrohres als unzuverlässig herausgestellt und sind später gänzlich unterblieben.

Ich gebe nun eine Fortsetzung der Uebersicht über die Focaleinstellungen des Oculars II auf Doppelsterne und auf den Polarstern vor den Sonnenbeobachtungen nebst Angabe der Thermometer O u. o und der daraus berechneten Temperatur t (Vgl. IV. 36.) Die laufenden Nummern in der ersten Spalte sind von der Zeit nach der Auseinandernahme der Objectivlinsen aus gezählt.

Uebersicht über die Einstellungen des Oculars II auf Doppelsterne und auf den Polarstern.

Nr.	Tag	Stern	Ocular II	Th. O.	Th. o.	t
				°	°	°
74	1892 März 6	Σ 941	20.92	− 4.8	− 3.6	− 4.5
75	12.13	α Urs. min.	21.23	+ 1.0	+ 0.9	+ 1.0
76	20.21	„	21.30	+ 8.7	+ 7.8	+ 8.5
77	30.31	„	21.27	+ 6.0	+ 5.3	+ 5.8
78	April 4.5	„	21.50	+ 14.4	+ 13.3	+ 14.1
79	11.12	„	21.35	+ 7.3	+ 7.2	+ 7.3
80	Mai 8.9	„	21.57	+ 13.7	+ 13.1	+ 13.6
81	22.23	„	21.64	+ 13.4	+ 12.4	+ 13.2
82	26	λ Ophiuchi	21.81	+ 21.3	+ 21.8	+ 21.4
83	27	„	21.34	+ 24.0	+ 23.8	+ 24.0
84	28	„	21.46	+ 20.6	+ 21.0	+ 20.7
85	Juni 21.22	α Urs. min.	21.47	+ 16.9	+ 16.1	+ 16.7
86	Juli 11.12	„	21.58	+ 18.9	+ 18.3	+ 18.8
87	Sept. 12.13	„	21.70	+ 18.2	+ 18.1	+ 18.2
88	Oct. 4.5	„	21.37	+ 14.4	+ 14.3	+ 14.4
89	Nov. 23.24	„	21.21	− 1.9	− 1.5	− 1.8
90	1893 Jan. 23	ζ Cancri	20.98	− 12.6	− 11.0	− 12.2
91	Febr. 16	„	21.24	+ 5.6	+ 6.1	+ 5.7
92	März 11.12	α Urs. min.	21.54	+ 7.5	+ 7.1	+ 7.4
93	22.23	„	21.46	+ 5.3	+ 4.7	+ 5.2
94	26.27	„	21.57	+ 6.0	+ 5.8	+ 6.0
95	Apr. 5.6	„	21.43	+ 11.4	+ 11.1	+ 11.3
96	6	ζ Cancri	21.37	+ 12.0	+ 12.6	+ 12.1
97	9.10	α Urs. min.	21.46	+ 12.1	+ 11.8	+ 12.0
98	23.24	„	21.45	+ 13.5	+ 13.0	+ 13.4
99	Mai 8.9	„	21.41	+ 14.9	+ 15.0	+ 14.9
100	14.15	„	21.63	+ 19.6	+ 18.4	+ 19.3
101	Juni 8.9	„	21.46	+ 18.3	+ 17.8	+ 18.2
102	15.16	„	21.50	+ 22.2	+ 21.9	+ 22.1
103	Juli 4.5	„	21.57	+ 23.1	+ 22.2	+ 22.9
104	Aug. 3	70 Ophiuchi	21.38	+ 17.6	+ 18.3	+ 17.8
105	3.4	α Urs. min.	21.56	+ 19.8	+ 19.2	+ 19.7
106	Oct. 18.19	„	21.31	+ 9.3	+ 11.1	+ 9.7
107	26	70 Ophiuchi	21.20	+ 8.8	+ 9.2	+ 8.9
108	1894 Jan. 3	ζ Cancri	20.99	− 8.9	− 7.7	− 8.6
109	März 20.21	α Urs. min.	21.18	+ 4.9	+ 4.8	+ 4.9
110	23.24	„	21.34	+ 8.8	+ 8.4	+ 8.7
111	26.27	„	21.32	+ 9.6	+ 9.3	+ 9.5
112	1894 Apr. 24.25	α Urs. min.	21.28	+ 15.0	+ 14.6	+ 14.9
113	Mai 8.9	„	21.27	+ 14.5	+ 13.1	+ 14.2
114	15.16	„	21.60	+ 19.0	+ 18.1	+ 18.8
115	24.25	„	21.38	+ 16.1	+ 15.5	+ 16.0
116	Juni 27.28	„	21.40	+ 17.3	+ 17.2	+ 17.3
117	Juli 2	70 Ophiuchi	21.61	+ 24.0	+ 24.0	+ 24.0
118	5.6	α Urs. min.	21.46	+ 17.9	+ 17.2	+ 17.7
119	23	70 Ophiuchi	21.73	+ 20.5	+ 21.2	+ 20.7
120	23.24	α Urs. min.	21.67	+ 22.1	+ 22.1	+ 22.1
121	Dec. 10.11	„	21.29	− 0.2	− 0.5	− 0.3
122	1895 Febr. 24.25	„	21.01	− 2.5	− 2.3	− 2.4
123	März 6.7	„	21.18	− 8.3	− 8.3	− 8.3
124	Apr. 9.10	„	21.28	+ 13.3	+ 12.0	+ 12.0
125	16.17	„	21.38	+ 12.8	+ 12.4	+ 12.7

Nr.	Tag	Stern	Ocular II	Th. O.	Th. o.	t
				°	°	°
126	1895 Apr. 29.30	α Urs. min.	21.42	+ 13.7	+ 12.7	+ 13.5
127	Mai 5.6	„	21.32	+ 16.3	+ 15.4	+ 16.1
128	8.9	„	21.50	+ 15.5	+ 14.6	+ 15.3
129	13.14	„	21.46	+ 18.9	+ 18.2	+ 18.7
130	22.23	„	21.50	+ 15.8	+ 14.4	+ 15.4
131	28	70 Ophiuchi	21.38	+ 13.4	+ 14.3	+ 13.6
132	28.29	α Urs. min.	21.59	+ 18.1	+ 17.0	+ 17.8
133	Juni 20.21	„	21.42	+ 17.3	+ 16.4	+ 17.1
134	Juli 1.2	„	21.56	+ 22.0	+ 21.4	+ 21.9
135	16.17	„	21.51	+ 18.9	+ 18.0	+ 18.7
136	Oct. 17.18	„	21.25	+ 6.5	+ 6.1	+ 6.4
137	Nov. 16	12 Lyncis	21.20	+ 12.3	+ 13.0	+ 12.5
138	1896 Jan. 21	Σ 941	21.28	+ 1.3	+ 1.9	+ 1.4
139	27	α Urs. min.	21.19	— 2.1	— 1.9	— 2.0
140	Febr. 15.16	„	21.20	— 2.3	— 2.6	— 2.4
141	18	ζ Cancri	21.08	+ 1.7	+ 2.4	+ 1.8
142	22.23	α Urs. min.	21.26	— 1.0	— 1.2	— 1.0
143	Mai 1.2	„	21.29	+ 7.3	+ 6.9	+ 7.2
144	1896. Mai 5.6	α Urs. min.	21.28	+ 9.8	+ 9.1	+ 9.6
145	7.8	„	21.33	+ 11.2	+ 10.6	+ 11.1
146	31.1	„	21.48	+ 15.7	+ 14.5	+ 15.4
147	Juni 3	70 Ophiuchi	21.36	+ 17.9	+ 19.3	+ 18.3
148	3.4	α Urs. min.	21.59	+ 22.4	+ 20.9	+ 22.0
149	Juli 6	70 Ophiuchi	21.29	+ 13.3	+ 13.1	+ 13.3
150	9	„	21.52	+ 22.3	+ 22.1	+ 22.2
151	9.10	α Urs. min.	21.63	+ 24.0	+ 23.4	+ 23.8
152	11	70 Ophiuchi	21.54	+ 16.5	+ 17.7	+ 16.8
153	13	„	21.50	+ 17.4	+ 17.4	+ 17.4
154	14	„	21.37	+ 18.2	+ 18.5	+ 18.3
155	14.15	α Urs. min.	21.55	+ 20.9	+ 20.4	+ 20.8
156	25	70 Ophiuchi	21.51	+ 16.6	+ 17.1	+ 16.7
157	Sept. 26.27	α Urs. min.	21.45	+ 12.9	+ 12.0	+ 12.7
158	28.29	„	21.33	+ 11.6	+ 11.2	+ 11.5
159	Oct. 26	70 Ophiuchi	21.49	+ 8.1	+ 8.5	+ 8.2
160	29.30	α Urs. min.	21.13	+ 8.3	+ 7.3	+ 8.0
161	Nov. 4.5	„	21.07	+ 2.7	+ 3.3	+ 2.8
162	5.6	„	21.15	+ 1.0	+ 1.5	+ 1.1
163	6.7	„	21.27	+ 2.0	+ 2.1	+ 2.0
164	12.13	„	21.11	+ 1.9	+ 2.3	+ 2.0
165	16.17	„	21.11	+ 4.0	+ 3.4	+ 3.9
166	26	Σ 941	20.96	— 3.6	— 2.0	— 3.2
167	29	„	21.02	— 5.3	— 3.2	— 4.8
168	Dec. 15.16	α Urs. min.	21.10	— 1.0	— 1.0	— 1.0
169	1897 Feb. 3	Σ 941	21.51	— 7.4	— 6.4	— 7.1
170	17.18	α Urs. min.	21.35	+ 0.5	— 0.7	+ 0.2
171	19.20	„	21.47	+ 5.5	+ 4.9	+ 5.4
172	März 12.13	„	21.12	+ 3.7	+ 3.6	+ 3.7
173	Apr. 3.4	„	21.22	+ 5.3	+ 4.6	+ 3.3
174	5.6	„	21.17	+ 5.2	+ 4.6	+ 3.3
175	27.28	„	21.30	+ 16.9	+ 15.5	+ 16.5
176	Mai 4.5	„	21.20	+ 10.9	+ 9.9	+ 10.7
177	16.17	„	21.35	+ 16.0	+ 15.4	+ 15.3
178	20.21	„	21.40	+ 15.6	+ 15.0	+ 14.9
179	29	70 Ophiuchi	21.50	+ 13.7	+ 14.8	+ 14.0
180	30.31	α Urs. min.	21.42	+ 21.8	+ 20.5	+ 21.5
181	Juni 21	70 Ophiuchi	21.30	+ 12.7	+ 13.2	+ 12.8
182	22	„	21.34	+ 15.7	+ 15.2	+ 15.6
183	23.24	α Urs. min.	21.44	+ 20.6	+ 19.9	+ 20.4
184	26.27	„	21.43	+ 21.2	+ 20.4	+ 21.0
185	Juli 12	70 Ophiuchi	21.34	+ 17.6	+ 18.3	+ 17.8

Nr.	Tag	Stern	Ocular II	Th. O. °	Th. o. °	t °
186	1897 Juli 12.13	α Urs. min.	21.40	+ 18.6	+ 17.8	+ 18.3
187	14.15	„	21.54	+ 22.3	+ 20.7	+ 21.9
188	25.26	„	21.55	+ 20.3	+ 19.6	+ 20.1
189	Aug. 2.3	„	21.44	+ 19.9	+ 19.7	+ 19.8
190	10.11	„	21.45	+ 19.9	+ 18.4	+ 19.5
191	Sept. 9.10	„	21.69	+ 11.0	+ 11.0	+ 11.0
192	25.26	„	21.46	+ 16.3	+ 15.4	+ 16.1
193	27	70 Ophiuchi	21.22	+ 14.6	+ 14.9	+ 14.7
194	29.30	α Urs. min.	21.37	+ 18.0	+ 17.3	+ 17.8
195	Oct. 4.5	„	21.50	+ 8.9	+ 8.3	+ 8.8
196	14.15	„	21.47	+ 12.8	+ 12.8	+ 12.8
197	23.24	„	21.49	+ 9.4	+ 9.0	+ 9.3
198	Nov. 9.10	„	21.29	+ 1.9	+ 2.0	+ 1.9
199	24.25	„	21.38	0.0	+ 0.2	+ 0.1
200	1898 Febr. 25.26	„	21.32	+ 3.5	+ 3.0	+ 3.4
201	März 11.12	„	21.35	+ 4.9	+ 4.5	+ 4.8
202	20.21	„	21.31	+ 4.0	+ 3.9	+ 4.0
203	Apr. 5	Σ 941	21.11	+ 2.2	+ 3.5	+ 2.5
201	5.6	α Urs. min.	21.46	+ 5.8	+ 5.1	+ 5.6
205	1898 Apr. 6	Σ 941	21.29	+ 5.8	+ 6.7	+ 6.0
206	Mai 1.2	α Urs. min.	21.51	+ 19.0	+ 18.5	+ 18.9
207	13.14	„	21.37	+ 11.5	+ 11.3	+ 11.4
208	22.23	„	21.47	+ 16.8	+ 16.3	+ 16.7
209	Juni 7.8	„	21.51	+ 21.9	+ 20.0	+ 21.7
210	10.11	„	21.54	+ 21.7	+ 20.5	+ 21.4
211	14.15	„	21.46	+ 14.9	+ 14.7	+ 14.8
212	26.27	„	21.58	+ 17.3	+ 16.6	+ 17.1
213	Juli 15.16	„	21.44	+ 16.4	+ 15.0	+ 16.0
214	21	70 Ophiuchi	21.18	+ 11.8	+ 13.0	+ 12.1
215	24	„	21.16	+ 13.7	+ 14.9	+ 14.0
216	26.27	α Urs. min.	21.54	+ 14.4	+ 14.1	+ 14.3
217	Aug. 2	70 Ophiuchi	21.47	+ 18.2	+ 18.5	+ 18.3
218	2.3	α Urs. min.	21.53	+ 19.1	+ 18.2	+ 18.9
219	3	70 Ophiuchi	21.37	+ 19.3	+ 19.5	+ 19.4
220	6	„	21.39	+ 19.7	+ 20.6	+ 19.9
221	12	„	21.44	+ 19.7	+ 21.0	+ 20.0
222	12.13	α Urs. min.	21.38	+ 20.4	+ 19.2	+ 20.1
223	14.15	„	21.45	+ 22.9	+ 21.4	+ 22.5
224	Nov. 1.2	„	21.30	+ 6.1	+ 6.0	+ 6.1
225	8.9	„	21.35	+ 2.7	+ 2.8	+ 2.7
226	18.19	„	21.40	+ 4.3	+ 4.3	+ 4.3
227	20.21	„	21.34	+ 2.3	+ 2.1	+ 2.3
228	22.23	„	21.39	+ 1.4	+ 1.8	+ 1.5
229	Dec. 5	Σ 941	21.22	+ 4.2	+ 6.1	+ 4.7
230	6.7	α Urs. min.	21.38	+ 5.6	+ 5.3	+ 5.5
231	1899 Jan. 25.26	„	21.06	— 2.0	— 2.0	— 2.0
232	27	Σ 941	21.08	— 4.5	— 3.3	— 4.2
233	31	„	21.18	— 3.8	— 1.7	— 3.3
234	Febr. 4	„	21.01	— 2.9	— 2.2	— 2.7
235	5.6	α Urs. min.	21.30	— 2.6	— 2.4	— 2.5
236	14.15	„	21.28	+ 10.0	+ 9.6	+ 9.9
237	21.22	„	21.18	+ 1.9	+ 2.0	+ 1.9
238	25	Σ 941	21.15	— 2.7	— 1.7	— 2.4
239	26.27	α Urs. min.	21.16	— 2.1	— 2.7	— 2.2
240	März 5.6	„	21.34	— 0.4	— 0.8	— 0.5
241	11.12	„	21.30	+ 5.7	+ 5.6	+ 5.7
242	14	Σ 941	21.25	+ 5.9	+ 6.3	+ 6.0
243	17	„	21.17	+ 4.4	+ 5.0	+ 4.7
244	23	„	21.21	— 6.2	— 4.8	— 5.9
245	24	„	21.14	— 4.9	— 4.1	— 4.8

Nr.	Tag	Stern	Ocular II	Th. O.	Th o.	t
				°	°	°
246	1899 März 24.25	α Urs. min.	21.17	— 0.6	— 1.7	— 0.8
247	Apr. 0.1	„	21.32	+ 7.9	+ 7.0	+ 7.7
248	17.18	„	21.37	+ 9.0	+ 8.1	+ 8.8
249	Mai 16.17	„	21.33	+ 15.8	+ 14.9	+ 15.6
250	30.31	„	21.36	+ 14.7	+ 13.1	+ 14.3
251	Juni. 4.5	„	21.51	+ 18.7	+ 17.5	+ 18.4
252	18.19	„	21.44	+ 21.2	+ 19.1	+ 20.7
253	27.28	„	21.50	+ 18.1	+ 16.8	+ 17.8
254	Juli 9.10	„	21.49	+ 19.7	+ 18.5	+ 19.4
255	17	70 Ophiuchi	21.53	+ 19.4	+ 19.7	+ 19.5
256	18	„	21.35	+ 18.4	+ 18.7	+ 18.5
257	19	„	21.21	+ 19.1	+ 19.8	+ 19.2
258	21.22	α Urs. min.	21.50	+ 24.5	+ 23.1	+ 24.2
259	25	70 Ophiuchi	21.49	+ 19.2	+ 19.5	+ 19.2
260	25.26	α Urs. min.	21.49	+ 20.3	+ 19.8	+ 20.2
261	Aug. 1.2	„	21.59	+ 19.3	+ 17.9	+ 19.0
262	8.9	„	21.41	+ 18.5	+ 18.1	+ 18.5
263	13.14	„	21.43	+ 18.5	+ 17.1	+ 18.2
264	Nov. 1	„	21.41	+ 9.5	+ 9.8	+ 9.6
265	4	70 Ophiuchi	21.36	+ 14.7	+ 15.4	+ 14.9
266	4.5	α Urs. min.	21.43	+ 15.1	+ 14.9	+ 15.9
267	5.6	„	21.44	+ 10.7	+ 10.1	+ 10.5
268	Dec. 10.11	„	21.15	— 7.0	— 6.8	— 7.0
269	20	Σ 941	21.10	— 6.3	— 5.0	— 6.1
270	22.23	α Urs. min.	21.04	— 5.3	— 5.2	— 5.3

Die doppelte Bezeichnung der Beobachtungstage deutet darauf hin, dass die Beobachtungen des Polarsterns in den Vormittagsstunden vorgenommen sind, also z. B. 1899 Dec. 22/23 bedeutet den Vormittag des 23. December, der astronomisch noch zum 22. December gehört.

Diese Focaleinstellungen sind wie bisher in der Weise angestellt, dass das Ocular immer fest in die Fassung hineingedrückt war und dann der ganze Ocularkopf (ohne Rücksicht auf die Deutlichkeit des Fadenkreuzes zu nehmen, welches sich auf einem beweglichen Schieber befindet und aus dem Gesichtsfelde gebracht werden kann) abwechselnd dem Objective genähert oder entfernt wurde bis das Bild des Doppelsterns dem Auge des Beobachters deutlich erschien und die Ocularscala abgelesen werden konnte.

Ein anderer Weg wäre der gewesen, zuerst das Ocular auf das Fadenkreuz einzustellen und dann den ganzen Ocularkopf zu verschieben bis ein Doppelstern deutlich erscheint. Dann wäre die Focussirung so weit sich überblicken lässt, unabhängig von der Sehweite des Auges gewesen und es wäre dann nur die Unveränderlichkeit des Fadenkreuzes im Ocularkopf Bedingung gewesen. Indessen ist das Fadennetz einige Male durch Feuchtigkeit krumm geworden und auch wohl durch Einsetzen eines Oculars mit dem Kreuzstab-Mikrometer beschädigt worden und um es etwas weniger empfindlich zu machen, habe ich es durch feine Metallfäden ersetzen lassen.

Das Fadenkreuz ist also nur zu Aufstellungsbeobachtungen des Aequatoreals benutzt.

Die einzelnen Focussirungen werden immer am Vormittage nach der Beobachtung in die Liste eingetragen und mit dem bis dahin angenommenen Temperatur-Coefficienten auf 0° Celsius reducirt. Wenn eine Beobachtungsreihe bis auf ein oder zwei Jahre ausgedehnt war, wurden die Beobachtungen für sich ausgeglichen um zu ersehen, ob in der Normalstellung oder im Temperatur-Coefficienten Aenderungen eingetreten waren.

Auf diese Weise entstanden für die jetzige Beschaffenheit des Objectivs nachfolgende Ergebnisse der nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichenen Focussirungen:

							W. F. von	
Nr.		Zeitraum	Zahl	N		Extreme Temp.	N	Temp. Coeff.
				mm	mm	° °		
1)	1— 37	1889 Octob. — 1890 Dez.	37	21.15	+ 0.0184 t°	+ 21.4 — 11.8	± 0.03	± 0.0026
2)	38— 75	91 Febr. — 92 Jan.	36	21.21	0.0200	+ 21.0 — 9.2	0.03	0.0028
3)	75—111	92 März — 94 Marz	38	21.20	0.0176	+ 24.0 — 12.2	0.02	0.0017
4)	112—143	94 April — 95 Mai	32	21.19	0.0160	+ 24.0 — 8.3	0.02	0.0013
5)	144—204	96 Mai — 98 April	61	21.19	0.0149	+ 23.8 — 7.1	0.02	0.0018
6)	205—270	• 98 April — 99 Dec.	66	21.22	0.0125	+ 22.5 — 7.0	0.01	0.0008

Die etwas grösseren wahrscheinlichen Fehler in den ersten Zeilen hängen damit zusammen, das zuerst jedesmal nur vier, später dagegen acht Einstellungen des Oculars auf den Stern gemacht wurden.

Nimmt man die Zahl der Gleichungen in den einzelnen Gruppen als Gewicht so erhält man das Gesammtresultat

1) $$N = 21.196 + 0.0159\,t$$

werden dagegen die Gewichte umgekehrt proportional den Quadraten der wahrscheinlichen Fehler genommen, so ergiebt sich

2) $$N = 21.200 + 0.0146\,t$$

Als Endresultat aus beiden Ausgleichungen kann man annehmen

$$N = 21.198 + 0.0153\,t \qquad \text{A.}$$

Bei sämmtlichen bis zum Augenblicke von mir angestellten Heliometerbeobachtungen ist der in IV. 41 abgeleitete Werth aus den ersten 73 Focussirungen von 1889 October bis 1892 Januar angenommen da eine deutlich ausgesprochene Aenderung durch die bisherigen Beobachtungen nicht angedeutet ist und eine verschiedene Annahme der Constanten zu verschiedenen Zeiten mit grossen Unbequemlichkeiten verknüpft gewesen wäre.

Es ist also angenommen worden

$$\mathbf{N = 21.18 + 0.019\,t.} \qquad \text{B.}$$

Der Unterschied der nach den Ausdrücken A u. B berechneten Ocularstellungen für die äussersten Grenzen der in Betracht kommenden Temperaturen und der daraus entstehenden Correctionen der grössten messbaren Distanz von 180 Scalentheilen oder 7200″ sind

bei — 10° Celsius: — 0.06 Millimeter und — 0.″16
+ 25 : + 0.07 „ + 0.18

und für die Sonnendurchmesser erreichen diese Unterschiede nur die Beträge von $-0\overset{''}{.}04$ und $+0\overset{''}{.}05$.

Die für die grössten Distanzen und am weitesten entlegenen Temperaturen entstehenden Unterschiede der Abstände, $-0\overset{''}{.}16$ und $+0\overset{''}{.}18$, werden bei den Beobachtungen der Distanzmessungen sehr selten erreicht, weil namentlich bei grossen Kältegraden, die meistens mit östlichen Winden zusammenhängen, der Unruhe der Bilder wegen selten genaue Distanzmessungen ausgeführt werden können und man sich höchstens auf die Bestimmung der Wärme-Coefficienten einlassen kann. Der Unterschied zwischen den Formeln A und B ist daher bis jetzt noch nicht von Bedeutung gewesen und es sind deshalb meine sämmtlichen Beobachtungen von 1889 ab nach dem Ausdrucke $N = 21.18 + 0.019\,t$ reducirt worden.

In den sechs verschiedenen Temperatur-Coefficienten der Ocularstellung ist übrigens mit Rücksicht auf die wahrscheinlichen Fehler derselben eine allmählige Abnahme im Laufe eines Jahrzehnts ziemlich deutlich ausgesprochen und in etwas geringerem Masse zeigt sich dieselbe Erscheinung auch bei den gleichzeitigen Focussirungen von Ambronn, nämlich:

Nr.		Zeitraum	Zahl	N		Extreme Temp.		W. F. von N	W. F. von Temp. Coeff.
				mm	mm	°	°		
1)	1—36	1889 Aug.—1891 Jan.	36	21.42	$+0.0252\,t°$	+23.0	−12.4	±0.03	±0.0021
2)	37—67	91 Jan.—92 Jan.	30	21.38	0.0251	+22.8	−9.1	0.02	0.0010
3)	68—122	92 Jan.—96 Mai	54	21.36	0.0248	+26.2	−14.5	0.01	0.0006
4)	123—174	96 Mai—98 Apr.	52	21.39	0.0241	+21.2	−4.0	0.01	0.0009
5)	175—222	98 Apr.—99 Dec.	47	21.40	0.0212	+23.4	−11.2	0.01	0.0008

Eine Aenderung dieser Coefficienten mit der Zeit kann auf dreierlei Weise zu Stande kommen, nämlich 1) durch eine Aenderung im Ausdehnungs-Coefficienten des Metallrohres 2) des Objectivsystems und 3) des Auges des Beobachters mit zunehmenden Alter. Von diesen Ursachen ist die letztere wohl am meisten und die erstere am wenigsten wahrscheinlich.

Es ist nämlich zu berücksichtigen, dass der Apparat und das Auge im Laufe eines Jahres periodisch wiederkehrenden Temperaturschwankungen bis zu 40 Grad durchzumachen hat, die im Laufe der Zeit zu einer Abnahme der Empfindlichkeit führen können.

Vielleicht wird man später einmal veranlasst sein, auch diesen Reductions-Coëfficienten als eine Function der Zeit anzusehen, wie es sich bei einer Reihe anderer Coefficienten bereits als nothwendig herausgestellt hat. Einstweilen kann es jedoch unterlassen werden auf diese Veränderlichkeit Rücksicht zu nehmen und sämmtliche Rechnungen über die Triangulation und über die Instrumental-Constanten abzuändern. Die Triangulation der Perseusgruppe ist durchschnittlich zur Zeit 1893.75 angestellt und zu dieser Zeit würde der Ausdruck 3) für die Ocularstellung nämlich:

$$N = 21.20 + 0.0176\,t \qquad \text{(a}$$

zur Geltung kommen. Wenn also meine sämmtlichen Heliometer-Beobachtungen bis jetzt mit dem Ausdruck

$$N = 21.18 + 0.0190\,t \qquad (b$$

reducirt sind, so entsteht dadurch ein Unterschied (a — (b in der Ocularstellung

bei -10^0 von $21.02 - 20.99 = +0\overset{mm}{.}03$
$+25$ $\quad 21.64 - 21.66 = -0.02$

und bei der grössten messbaren Distanz von $180^s = 7200''$ werden diese Unterschiede:

bei -10^0 $+0\overset{s}{.}0020 = +0\overset{''}{.}08$
$+25$ $-0.0013 = -0.05$

Da die grösste Distanz in der Perseusgruppe *ap* aber nur 3924″ und die Temperatur-Unterschiede an den fünf Beobachtungsabenden nur 9° betragen, so spielen diese Abweichungen nicht die geringste Rolle.

Es ist übrigens schon in IV. 50 darauf hingewiesen worden, dass kleine Unrichtigkeiten in der Berechnung der Ocularstellung bei den Reductionen nahezu verschwinden weil sie bei der Berechnung des Einflusses der Temperatur des Fernrohres nahezu wieder aufgehoben werden, so dass in Wirklichkeit die Endresultate der Distanzmessungen nahezu unabhängig von der Temperatur sind.

Reduction der Distanzmessungen auf die Normal-Ocular-Stellung.

Mit dem soeben genannten Ausdruck für die Normal-Ocular-Stellung ist für die einzelnen Beobachtungen der der Temperatur t des Heliometers entsprechende Werth N berechnet worden. Damit zu vergleichen ist die an der Ocularscala wirklich abgelesene Stellung des Oculars, die meistens nach einer kleinen genäherten Tabelle nach Ablesung der Thermometer mit Rücksicht auf die für die Beobachtungszeit zu erwartende mittlere Temperatur bestimmt und für einige Stunden beibehalten wird wenn nicht sehr starke Aenderungen der Temperatur eintreten. Die Stellung des Oculars weicht demnach von den Stellungen die der im Laufe einer Beobachtungsperiode veränderlichen Temperatur entsprechen um kleine Bruchtheile des Millimeters ab.

Ist z. B. vor einer Sonnenbeobachtung die Temperatur $+5^0$, also die Normal-Ocular-Stellung 21.27, so wird mit Rücksicht, dass diese Zahl bei 1° Temperaturerhöhung sich um etwa 0.02 Millimeter vergrössert, das Ergebniss der vorbeigehenden Focussirung auf den Polarstern um etwa 0.1 Millimeter vergrössert. Es ist dabei zu bemerken, dass die zur Reduction der Beobachtungen dienende Ablesung der Ocular-Scala immer erst dann zu notiren ist, wenn eine kleine Druckschraube zur Befestigung des Auszuges der Ocularröhre angezogen ist.

Bezeichnet man mit N die der Temperatur entsprechende Ablesung der Ocular-Scala, dagegen mit O die Ablesung bei der Beobachtung, so würde nach IV. 42. die Reduction auf die Normal-Ocular-Stellung sein

$$+ 0.0381 (N - O) \frac{S}{100}$$

wo S die gemessene Distanz in Scalentheilen. Dagegen haben Sternbeobachtungen bei etwas abgeänderter Stellung ergeben (Siehe IV. 42)

$$+ 0.0366 (N - O) \frac{S}{100}$$

also: 0,96 des berechneten Werthes. Mit diesem in den Jahren 1890 und 1891 bestimmten Coëfficienten sind auch alle übrigen bis jetzt ausgeführten Beobachtungen berechnet worden.

Weiter unten sind für die Ocularstellung und ferner auch für die Berechnung des Einflusses der Temperatur auf die Distanzmessungen, insofern davon nicht nur die Brennweite des Objectivs als auch die Länge der Scalen zur Messung der Verschiebung der Objectivhälften abhängt, zwei bei der Reduction benutzte Tafeln gegeben.

Es bietet sich hier eine Gelegenheit, einige Worte über die Betheiligung der Göttinger Sternwarte an der Bestimmung der Sonnenparallaxe durch Dr. Gill zu sprechen.

Vergl. Determination of the solar parallax. Annals of the Cape observatory Vol. VI.

Während es bei der Berechnung der Göttinger Heliometerbeobachtungen überall durchgeführt ist, die bei einer bestimmten, an der Scala abgelesenen Stellung des Ocularschiebers gemessenen Distanzen auf eine mit der Temperatur als Argument berechnete Normal-Ocular-Stellung zu reduciren, deren Constante durch Focussirung auf Doppelsterne erhalten wird, hat Dr. Gill diese Reduction nicht vorgenommen, sondern die an den einzelnen Abenden angestellten Beobachtungen der Abstände zwischen Planet und Vergleichstern mit den jedesmaligen Distanzmessungen der Standard stars verglichen, wie sie sich bei einer vielleicht etwas abweichenden Ocularstellung ergeben haben. Dieses Verfahren ist ja an sich nicht unrichtig, aber man erhält dadurch eine unrichtige Vorstellung von der inneren Uebereinstimmung der an verschiedenen Abenden gemessenen Abstände der Standard stars und somit der Genauigkeit der heliometrischen Distanzmessungen überhaupt.

In meiner Abhandlung über die Praesepe, Astr. Mitthlgg. IV S. 79 ist die lange Reihe von Messungen der Standard stars zusammengestellt, weil dieselben dazu beigetragen haben, den Winkelwerth der Objectiv-Scalen zu bestimmen und dort ist die innere Uebereinstimmung eine viel nähere, weil wie bemerkt alle Messungen in der üblichen Weise auf die von der Temperatur abhängige Normal-Ocularstellung reducirt worden sind, und sich in der Columne $N-O$ gelegentlich einige grössere bis auf 0.4 Millimeter gehende Werthe zeigen, die durch eine damals noch nicht ganz richtige Einstellungstabelle veranlasst worden sind.

Ich muss dabei noch darauf aufmerksam machen, dass sich bei der durch

diesen Umstand veranlassten durchgehenden Revision meiner Beobachtungen der Standard stars einige kleine Irrthümer herausgestellt haben, die ich bei der weiteren Verwendung dieser Messungen berücksichtigt habe. Es war mir nämlich entgangen, dass 1890 Mai 19 im Laufe des Abends die anfängliche Stellung des Oculars ein wenig abgeändert wurde und die Ablesung der Scala zuerst 21.89 und später 21.72 also 0.17 Millimeter kleiner war. Dadurch wird bei der zweiten Beobachtung dieses Tages die Columne $N-O$ = 21,44 — 21.72 = —0.28 anstatt —0.45 und damit die Reduction der Distanzmessung —165 anstatt —266 in Einheiten der vielen Decimale des Scalentheils. Ferner ist die Zeit der Beobachtung $18^h\ 39^m.8$ anstatt $18^h\ 19^m.8$ (an Dr. Gill hatte ich die richtige Zeit gesandt) und dadurch wird die Refraction +548 anstatt +601. Die beiden Verbesserungen im Betrage von +101 —53 = +48 Einheiten ändern den Abstand in 161,3460 anstatt 161,3412, d. h. um $+0\overset{''}{.}19$.

Ferner ist 1890 Juli 10 die Verbesserung der Distanz durch Aberration zu +47 anstatt +19 angewandt. Die drei Abstände der Standard stars für diesen Abend werden dadurch 161,3415, 3497, 3355, d. h. 28 Einheiten = $0\overset{''}{.}11$ kleiner als früher.

Die aus diesen kleinen Verbesserungen hervorgehende geringe Abänderung des Scalenwerthes habe ich in vorliegender Abhandlung über die Perseus-Triangulation berücksichtigt.

Abhängigkeit der Distanzmessungen von der Temperatur.

Zur Ermittelung der Temperatur-Coëfficienten zur Reducktion der Abstandsmessungen dienten wie bisher die Messungen des Abstandes der beiden Sterne im Polbogen (Vgl. IV. 43) deren genaue Orte und Veränderung durch Präcession und Eigenbewegung dort gegeben sind. Da nur die Eigenbewegung Einfluss auf den gegenseitigen Abstand hat, so ist die Abhängigkeit von der Zeit einfach in Rechnung zu bringen und bei dem innerhalb eines Jahres periodisch veränderlichen Einfluss der Temperatur spielt die EB. überhaupt keine Rolle. Dieselbe würde nur dann in Betracht kommen, wenn man die im Laufe der Zeit hinzukommenden Beobachtungen auch fernerhin zur Ableitung des Verwandlungswerthes von Scalenablesungen in Bogenmass verwenden wollte wie es früher geschehen ist.

Die zur Ableitung des Wärme-Coëfficienten früher verwandten Beobachtungen reichen von 1890 Mai 19 bis 1893 Januar 17 und es hat sich für meine Beobachtungen die Reductionsformel auf 0° C ergeben

$$-(\overset{s}{0}.0007.90 \pm 0.0000.42)\ \frac{\text{Distanz in Scalentheilen}}{100}$$

Die Verbesserungen für Ocularstellung, Theilungsfehler, Temperatur, Refraction usw. werden durchweg zuerst in Einheiten der vierten Decimale eines Scalentheils (S etwa 40″) ausgedrückt und erst dann wenn alle Verbesserungen

berücksichtigt sind, erfolgt die Verwandlung in Bogensecunden. Da nach IV. 49. noch einige ältere Ermittelungen des Temperatur-Coëfficienten hinzu kommen, die den Werth ein wenig erhöhen, so ist bisher als Reductionsformel angewandt worden

$$-\overset{s}{0.0008}\,\frac{\text{Distanz in Scalentheilen}}{100}$$

Zu den damals verwandten Messungen sind in den letzten Jahren bei hohen und niederen Temperaturen noch die folgenden in der bisherigen Weise reducirten Beobachtungen hinzugekommen. Es ergiebt sich damit als Fortsetzung der Tafel auf IV. 44.

Beobachtungen des Polbogens zur Bestimmung des Temperatur-Coëfficienten.

Tag			Sternzeit	Bar.	Th.	t	N	O	$N-O$	Messung	Th. F.	Gang	Oc.-St.	Refr.	Aberr.	Abstand	R. S.	
			h m		°	°												
1894	Jan.	4	2 6.6	754	−15	−13.1	20.93	20.92	+0.01	169.3714	−41	+2	+6	+576	+7	169.4264	2	3
			2 20.6			13.0	93		+0.01	3686	−41	+2	+6	593	7	4253		
	Juli	2	16 19.9	750	+21	+25.1	21.65	21.60	+0.05	4168	−14	+1	+31	+653	+3	4842	3	3
			16 29.4			24.6	65		+0.05	4208	−14	+1	+31	676	3	4905		
		23	19 20.5	745	+18	+20.3	21.57	21.69	−0.12	4060	−26	−7	−75	+742	+22	4716	2	3
			19 32.0			20.2	56		−0.13	4037	−14	−7	−81	736	22	4693		
		24	18 58.8	747	+21	+23.6	21.63	21.62	+0.01	4045	−26	−7	+6	+743	+23	4784	3	3
			19 7.8			23.4	63		+0.01	4089	−14	−7	+6	741	23	4838		
1897	Juni	23	16 10.7	751	+18	+20.4	21.56	21.48	+0.08	4079	−23	+1	+50	+650	−8	4749	3	3
			16 22.2			20.2	56		+0.08	4188	−24	+1	+50	664	8	4871		
		25	16 24.5	747	+19	+21.0	21.57	21.50	+0.07	4180	−23	+1	+44	+661	−6	4857	2	3
			16 33.5			20.4	56		+0.06	4147	−23	+1	+37	672	6	4828		
		29	16 59.4	748	+22	+24.8	21.65	21.65	0.00	4171	−13	+1	0	+698	−2	4850	2	3
			17 9.4			24.4	64		−0.01	4268	−23	+1	−6	702	2	4940		
	Aug.	3	18 28.2	752	+17	+20.2	21.56	21.50	+0.06	4001	−23	+1	+37	+759	+35	4810	3	2
			18 35.7			20.1	56		+0.06	4091	−24	+1	+37	760	35	4900		
		4	18 5.3	751	+18	+21.2	21.57	21.50	+0.08	4039	−24	+1	+50	+751	+36	4853	3	3
			18 13.3			21.0	58		+0.08	3932	−23	+1	+50	753	36	4749		
1898	Aug.	3	20 20.4	746	+17	+18.7	21.53	21.50	+0.03	4171	−23	+1	+19	+718	+35	4921	2	3
			20 36.9			18.6	53		+0.03	4097	−23	+1	+19	685	35	4814		
		6	19 16.1	745	+18	+19.8	21.56	21.50	+0.06	3958	−13	+1	+37	+746	+38	4767	2	3
			19 23.6			19.8	56		+0.06	4105	−23	+1	+37	738	38	4896		

Ableitung des Temperatur-Coëfficienten aus Distanzmessungen des Polbogens.

Führt man ausser dem Temperatur-Coëfficienten zur Berücksichtigung der Eigenbewegung noch ein Zeitglied ein und setzt den Abstand der beiden Sterne in Scalentheilen:

$$169.4400 + x + 0.0008\,\frac{169.44}{100}\,t + (T - 1892.0)\,z$$

$$= 169.4400 + x + 0.0013.355\,t + (T - 1892.0)\,z$$

só gestaltet sich die Ausgleichung sämmtlicher zu diesem Zwecke angestellten Beobachtungen des Polbogens, wenn man die Verbesserung des vorläufigen Temperatur-Coëfficienten 13.355 mit y bezeichnet, folgendermassen:

				Tagesmittel	Tabelle	Beob.-Rechn.			
1	1890	Mai	19	169,4595	4626	− 31	= x	+ 16.7 y	− 1.6 z
2			22	4622	4597	+ 25		+ 14.6	− 1.6
3			23	4592	4602	− 10		+ 14.9	− 1.6
4		Juni	3	4480	4597	− 117		+ 14.6	− 1.6
5			4	4620	4647	− 27		+ 18.2	− 1.6
6		Juli	14	4682	4674	+ 8		+ 20.2	− 1.5
7			15	4715	4701	+ 14		+ 22.2	− 1.5
8		Aug.	1	4560	4678	− 118		+ 20.5	− 1.4
9		Nov.	27	4196	4270	− 74		− 9.6	− 1.1
10			28	4405	4281	+ 124		− 8.8	− 1.1
11		Dec.	7	4363	4369	− 6		− 2.3	− 1.1
12			9	4244	4355	− 111		− 8.3	− 1.1
13			14	4285	4306	− 21		− 6.9	− 1.1
14			15	4174	4284	− 110		− 8.5	− 1.0
15			17	4363	4270	+ 93		− 9.6	− 1.0
16	1891	Juni	25	4675	4697	− 22		+ 21.9	− 0.5
17			28	4613	4665	− 52		+ 19.6	− 0.5
18		Juli	19	4692	4629	+ 63		+ 16.9	− 0.5
19			23	4690	4625	+ 65		+ 16.6	− 0.5
20	1892	Febr.	16	4293	4324	− 31		− 5.6	+ 0.1
21			18	4275	4342	− 67		− 4.3	+ 0.1
22		März	4	4187	4315	− 128		− 6.2	+ 0.2
23			6	4189	4331	− 142		− 5.1	+ 0.2
24		Mai	26	4704	4715	− 11		+ 23.2	+ 0.4
25			27	4700	4736	− 36		+ 24.8	+ 0.4
26			28	4712	4689	+ 23		+ 21.3	+ 0.4
27	1893	Jan.	3	4240	4238	+ 2		− 11.9	+ 1.0
28			17	4314	4173	+ 141		− 16.8	+ 1.1
29	1894	Jan.	4	4259	4223	+ 36		− 13.1	+ 2.0
30		Juli	2	4874	4738	+ 136		+ 24.9	+ 2.5
31			23	4705	4675	+ 30		+ 20.3	+ 2.6
32			24	4811	4718	+ 93		+ 23.5	+ 2.6
33	1897	Juni	23	4810	4675	+ 135		+ 20.3	+ 5.5
34			25	4843	4681	+ 162		+ 20.7	+ 5.5
35			29	4895	4733	+ 162		+ 24.6	+ 5.5
36		Aug.	3	4855	4674	+ 181		+ 20.2	+ 5.6
37			4	4801	4686	+ 115		+ 21.1	+ 5.6
38	1898	Aug.	3	4868	4653	+ 215		+ 18.7	+ 6.6
39			6	4832	4668	+ 164		+ 19.8	+ 6.6

Hieraus folgen die Endgleichungen

$$
\begin{aligned}
+ \; 873 &= + 39\, x + 388.3\, y + 32.6\, z \\
+ 24449 &= + 388.3\, x + 11353.3\, y + 786.2\, z \\
+ \; 797.5 &= + 32.6\, x + 786.2\, y + 293.24\, z
\end{aligned}
$$

wo die absoluten Glieder in Einheiten der vierten Decimale eines Scalentheils ausgedrückt sind. Die Auflösung der Gleichungen giebt

$$
\begin{aligned}
x &= - \; 4{,}43 \quad \pm 8.77 \\
y &= + \; 0{,}4764 \pm 0{,}55 \\
z &= + 26{,}41 \quad \pm 2{,}93
\end{aligned}
$$

d. h. die Entfernung der beiden Sterne für 0° C. und für die Epoche 1892.0 ist

$$169.4400 - 0{,}0004 = 169.4396 \text{ Scalentheile}$$

und die Zunahme der Messung für 1° C. = + 0,0013.555 + 0,0000.476 = 0.0014.031 ± 0.0000.55 oder bezogen auf einen Abstand von 100 Scalentheilen + 0.0008.28 ± 0.0000.33

Wenn bisher meine sämmtlichen Messungen mit dem Coëfficienten 0.0008 auf 0° reducirt worden sind, so liegt diese Annahme innerhalb der Grenzen der wahrscheinlichen Fehler der neueren Bestimmung und es ist deshalb keine Veranlassung vorhanden, von diesem abgerundeten Werthe abzugehen. Die Reduction einer bei t^0 Celsius gemachten Distanzmessung ist daher wie bisher

$$-\overset{s}{0.0008}\,\frac{\text{Distanz}}{100}\cdot t$$

Kürzeste Entfernung der beiden Objectivhälften von einander.

In IV. 60. findet sich über den Abstand der optischen Mittelpunkte ein bis 1893 Febr. 6 gehendes Verzeichniss woraus hervorgeht, dass nur ausnahmsweise etwas grössere Beträge vorkommen und grössere Abstände nöthigenfalls immer beseitigt wurden. In späterer Zeit hat sich dieser Abstand meistens von selbst sehr klein gehalten und eine Berichtigung war seltener nothwendig als früher. Ich gebe jetzt ein Verzeichniss nach meinen Beobachtungen für die letzten Jahre

64	1893	Juni	30	$e = 0''.58$	Doppeltbrechendes Prisma, Pos. W. 270°	Oc. II
65		Juli	13	0.28	70 Ophiuchi	III
66			25	0.29	„	„
67		Aug.	3	0.32	„	„
68		Oct.	19	1.01	„	„
69	1894	Juli	5	0.09	„	„
70			23	0.14	„	„
71			24	0.33	„	„
72		Oct.	12	0.60	„	„
73		Nov.	6	0.17	61 Cygni	II
74	1895	Mai	28	0.53	70 Ophiuchi	III
75			29	0.22	„	„
76			31	0.60	„	„
77		Juli	13	0.41	„	„
78		Oct.	17	0.57	α Piscium	„
79			24	0.34	„	„
80	1896	Jan.	27	Durchgang der Bilder in beiden Lagen völlig central		
81		Juni	5	Objectiv II zum Reinigen der Linsen abgenommen		
82		Juli	6	0.45	70 Ophiuchi	III
83			11	0.14	„	„
84			13	0.27	„	„
85			14	0.60	„	„
86			25	0.16	„	„
87		Sept.	26	0.09	„	„
88		Oct.	24	0.14	„	„
89			26	0.42	„	„
90			27	0.07	„	„
91		Nov.	10	0.21	„	„
92		Dec.	11	1.06	Künstlicher Doppelstern	II
93	1897	Mai	18	0.24	70 Ophiuchi	III
94			29	0.61	„	„
95		Juni	21	0.20	„	„
96			22	0.39	„	„
97				1.00	61 Cygni	II

98	1897	Juni	26	e = 1.65	61 Cygni	Oc. II
99		Juli	12	0.40	70 Ophiuchi	III
100				0.28	61 Cygni	II
101			19	1.03	70 Ophiuchi	III
102			24	0.55	„	„
103				0.98	ζ Aquarii	„
104			29	0.21	70 Ophiuchi	„
105				0.69	61 Cygni	II
106		Aug.	4	1.11	„	„
107			10	0.41	70 Ophiuchi	III
108		Sept.	26	0.19	„	„
109			27	0.23	„	„
110			28	0.20	„	„
111			30	0.42	„	„
112		Oct.	5	0.40	61 Cygni	II
113			14	0.50	70 Ophiuchi	III
114				0.31	61 Cygni	II
115			26	0.26	„	„
116			28	0.26	„	„
117		Nov.	10	0.03	„	„
118			13	0.07	„	„
119			14	0.30	„	„
120			25	0.08	„	„
121		Dec.	17	0.23	„	„
122	1898	Juni	13	0.03	„	„
123			16	0.15	„	„
124			21	0.10	„	„
125			23	0.22	„	„
126			28	0.06	„	„
127				0.18	70 Ophiuchi	III
128		Juli	14	0.23	„	„
129			21	0.12	„	„
130				0.44	61 Cygni	II
131			24	0.08	70 Ophiuchi	III
132				1.12	ζ Aquarii	„
133		Aug.	2	0.15	70 Ophiuchi	„
134			3	0.18	„	„
135				0.19	ζ Aquarii	II
136			6	0.16	70 Ophiuchi	III
137				0.10	ζ Aquarii	II
138			12	0.18	70 Ophiuchi	III
139		Nov.	4	0.30	61 Cygni	II
140			8	0.56	„	„
141			20	0.31	„	„
142			29	Objectivhälfte II abgenommen und beide Hälften mit Aether		
143		Dec.	5	0.31	61 Cygni [geputzt.	II
144			7	0.31	„	„
145	1899	Jan.	21	Die Bilder gehen central durcheinander.		
146		Apr.	22	0.30	61 Cygni	„
147		Mai	30	0.28	„	„
148		Juni	1	0.12	„	„
149			10	0.20	„	„
150		Juli	10	0.03	„	„
151				0.02	70 Ophiuchi	III
152			17	0.19	„	„
153			18	0.45	„	„
154			25	0.03	„	„
155		Aug.	9	0.63	„	„
156			10	0.41	„	„
157		Dec.	20	0.95	61 Cygni	II

Die Abstände der Objectivhälften spielen nach der Tabelle IV. 62 bei Abständen von mehr als 60″ keine Rolle und bei kleineren Abständen z. B. bei Messungen von Doppelsternen wurden immer die jedesmaligen Ablesungen des Positionswinkels in beiden Stellungen der Objectivschieber zur Reduction verwandt.

Systematische Correctionen der Distanzmessungen.

Bei der in den Astronomischen Mittheilungen IV veröffentlichten Vermessung der Praesepe wurde über 45 Sterne ein Dreiecksnetz gelegt in welchem jeder Stern zunächst mit den ihm benachbarten durch Distanzmessungen verbunden wurde, ausserdem wurden aber noch andere Combinationen gemessen, so dass sich über die ganze Gruppe ein complicirtes Dreiecksnetz mit zahlreichen überschüssigen Beobachtungen ergab.

Für vier an den Grenzen liegende Sterne standen Beobachtungen der Oerter an den Meridiankreisen in Berlin und in Göttingen zur Verfügung und als nun für den Centralstern Nr. 1 die Rectascension und Declination dadurch berechnet wurde, dass an die Oerter der vier Sterne des Vierecks die aus der Ausgleichung der Heliometerbeobachtungen hervorgehenden Differenzen in Rectascension und Declination angebracht wurden, zeigten die auf diese Weise für den Centralstern erhaltenen Oerter eine sehr mangelhafte Uebereinstimmung die das Vorhandensein von besonderen Eigenthümlichkeiten, den systematischen Correctionen der Abstandsmessungen erkennen liessen.

Um über die Form dieser Correctionen in ihrer Abhängigkeit von der Grösse der gemessenen Distanz etwas Näheres zu erfahren, wurden damals in verschiedenen Gegenden des Himmels Reihen von Sternen von mir ausgesucht, die nahe in einer geraden Linie erscheinen und es wurden dazwischen alle möglichen Combinationen von Abständen gemessen. Nachdem diese Abstände mit Hülfe der anderweitig bekannten Positionen der Sterne in Rectascension und Declination auf die Verbindungslinie zwischen den beiden am weitesten von einander abstehenden Sternen reducirt waren, hätten alle einzelnen Strecken aus welchen man den Abstand zusammensetzen kann, durch Addition immer dieselbe Summe geben müssen. Es ergaben sich aber Widersprüche, woraus geschlossen wurde, dass die Distanzmessungen verschiedener Grösse besonderer Verbesserungen bedürfen, denen eine mathematische Form derart gegeben wurde, dass sie von den kleinsten Abständen mit Null beginnend bei 1000 Secunden Abstand auf etwa $+0\overset{''}{.}2$ anwachsen und dann bis zu den grössten Abständen allmählich wieder abnehmen.

Die zur Ausgleichung der Praesepe-Triangulation verwandten Bogen, nämlich Praesepe *α β γ δ ε ζ η ϑ ι κ*, Praesepe *a b c d e f g h i k l m n o p*. Vulpecula I II III usw. bis XV in der Länge von 3600, 4735 und 5187 Secunden, zeigten, dass die für den Abstand der beiden Endsterne aus den einzelnen Strecken berechnete Entfernung um so kleiner ausfiel je grösser die Zahl der dabei verwandten Strecken war, dass als die kleineren Abstände einer kleinen positiven Verbesserung bedürfen um die Widersprüche zu beseitigen.

Nach einigen Versuchen die für eine bestimmte Distanzmessung erforderliche Correction zu ermitteln und durch einen von der Länge und dem Quadrate desselben abhängige Form darzustellen wurde dann der Weg eingeschlagen, die

Gestalt der Curve nicht durch einen bestimmten mathematischen Ausdruck darzustellen, sondern aus den Beobachtungen selbst abzuleiten und zum Schluss wurde nach der Erwägung auf IV. 168. die Form der Verbesserung folgendermassen gewählt.

Für eine Distanz s ausgedrückt in Einheiten von 1000 Secunden ist die Verbesserung

$$\Delta = +0\overset{''}{.}473\,[s - 0.50\,s^2 + 0.06\,s^3]$$

und die daraus folgende Corrections-Tabelle ist

Distanz	Correction
0″	0″.00
500	+ 0.18
1000	+ 0.26
1500	+ 0.27
2000	+ 0.23
2500	+ 0.15
3000	0.00

Diese Form wurde einstweilen für die Ausgleichung der Distanzmessungen in der Praesepegruppe verwandt. Nach der Veröffentlichung der Abhandlung über die Praesepe (Astr. Mitthlgg. IV.) sind jedoch noch weitere Untersuchungen über das Verhalten der systematischen Correctionen angestellt worden und ich habe darüber in einem Aufsatze: Neue Untersuchungen über den Verlauf der systematischen Fehler bei Distanzmessungen am Göttinger Heliometer nach Beobachtungen an einer Reihe von Sternen im Löwen. Astr. Nachr. Bd. 142 Seite 225 auszugsweise Bericht erstattet.

Im Folgenden sind diese Untersuchungen mit genauer Darstellung der Einzelheiten der Beobachtungen wiedergegeben.

Neue Untersuchungen über den Verlauf der systematischen Fehler bei Distanzmessungen am Göttinger Heliometer nach Beobachtungen einer Reihe von Sternen im Löwen.

In den Astronomischen Nachrichten Bd. 134 und später in ausführlicherer Weise in meiner Abhandlung über die Praesepe (Astron. Mittheilungen Göttingen, Vierter Theil 1895) habe ich über frühere Messungen zwischen einer Reihe von Sternen berichtet, die nahezu in einem grössten Kreise liegen, wobei es sich zeigte, dass man zu verschiedenen Resultaten über die Distanz zwischen den beiden Endsternen gelangt, je nach dem man dazu die Messungen zwischen diesen beiden Sternen selbst benutzt oder dieselbe durch Addition der zwischen

den einzelnen Sternen angestellten Abmessungen berechnet, nachdem von genügend bekannten Oertern der Sterne ausgehend, die Projectionen der einzelnen Abstände auf die Verbindungslinie der Endsterne vorgenommen worden sind.

Bei der Untersuchung dieser Messungen an Sternreihen, von denen zwei in der Praesepe selbst und eine dritte in der Vulpecula liegen, hat sich herausgestellt, dass die Abstandsmessungen kleiner Verbesserungen bedürfen, die bei einem Abstand von etwa 1300 Bogensecunden ein Maximum von etwa 1/4 Secunde erreichen, während für die kleinsten und für die grösseren am Heliometer messbaren Abstände die Correctionen wieder zu Null zu convergiren scheinen. Eine Curve zur Verbesserung der Messungen steigt vom Nullpunkt bis zu 1300 Secunden schnell an und nähert sich dann bei grösseren Abständen wieder der Abscissenaxe.

Während am Göttinger Heliometer die grösste durch Verschiebung der Objectivhälften messbare Distanz nahezu zwei Grad oder 7200 Secunden beträgt, hatten die Bogen Praesepe $\alpha\varkappa$ und Praesepe αp eine Länge von 3608 und 4736 und der Vulpecula-Bogen eine Länge von 5184 Secunden; also auch der längste dieser drei Bögen ging nicht weit über 0.7 der überhaupt messbaren Abstände hinaus. Es war deshalb mein Bestreben, einen anderen Bogen von Sternen aufzufinden, der sich über einen noch grösseren Theil des Gesichtsfeldes des Heliometers erstreckt und diese Bemühungen sind insofern gelungen, als im Sternbild des Löwen ein Bogen aufgefunden wurde, dessen Endsterne um 6914 Secunden, also um 0.96 der grössten messbaren Distanz von einander abstehen.

Die acht Sterne dieses Bogens finden sich in der Bonner Durchmusterung, und ihre Positionen sind den Albany Zonen entnommen, in denen sie mit Ausnahme des zweiten sämmtlich vorkommen. Um auch für den hier fehlenden Stern eine möglichst genaue Position zu erhalten, habe ich ihn am Heliometer an die beiden benachbarten Sterne Nr. 1 und 3 angeschlossen.

Auf diese Weise ergiebt sich für das Aequinoctium 1895:

Nr.	B. D.	Gr.	Albany.	Epoche	1895.0					
	°				h	m	s	°	′	″
1	+ 4.2377	8.7	4113	1880.3	10	39	7.57	+ 4	35	6.7
2	4.2380	9.2	—	—		41	2.47	3	51	14.7
3	3.2411	8.2	4124	80.3		41	26.79	3	39	4.4
4	3.2413	9.0	4127	80.8		42	10.92	3	21	49.3
5	3.2415	8.6	4129	80.6		42	33.67	3	12	27.6
6	3.2417	8.7	4131	81.3		42	46.21	3	6	50.3
7	3.2418	8.7	4132	81.3		42	56.58	3	2	13.8
8	3.2419	8.7	4133	81.5		43	7.07	2	56	35.2

Aus diesen Oertern sind die in nachstehender Tabelle in der Columne „Projection“ enthaltenen Beträge gerechnet, welche die Abstände zwischen je zwei der Sterne auf die Verbindungslinie zwischen den Endsternen 1 und 8 reduciren.

Die Messungen am Heliometer und die Reductionen nach dem in meiner Abhandlung über die Praesepe beschriebenen Verfahren sind die nachfolgenden.

Messungen des Löwenbogens.

	Tag	Sternzeit	Bar.	Th.	t	N	O	N−O	Messung	Th. F.	Gang	Oc.-St.	Temp.	Refr.	Aberr.	Abstand	R. S.
1800		h m	m	°	°					I							
95	Apr. 16	10 58.3	746	+ 11	+ 11.9	21.41	21.24	+ 0.17	78.5286	− 23	0	+ 49	− 75	+ 379	− 56	78.5560	3 3
	Mai 23	13 16.7	45	+ 14	+ 15.7	21.47	21.45	+ 0.02	5414	− 24	− 1	+ 6	− 99	+ 335	− 76	5555	2 2
96	Febr. 18	7 45.5	54	0	+ 1.6	21.21	21.10	+ 0.11	4760	− 24	0	+ 31	− 10	+ 876	+ 14	5647	3 4
	März 20	11 10.4	49	+ 8	+ 9.2	21.35	21.32	+ 0.03	5341	− 24	0	+ 9	− 58	+ 376	− 27	5617	2 3
	Apr. 30	13 11.0	44	+ 6	+ 8.5	21.34	21.28	+ 0.06	5342	− 24	0	+ 17	− 53	+ 339	− 68	5553	3 2
										II							
95	Apr. 16	11 10.3	746	+ 11	+ 11 7	21.40	21.24	+ 0.16	98.8180	− 34	+ 3	+ 61	− 92	+ 475	− 70	98.8523	3 3
	Mai 13	13 36.2	53	+ 13	+ 16.3	21.49	21.50	− 0.01	8297	− 34	+ 3	− 4	− 129	+ 376	− 93	8418	2 3
96	Apr. 24	13 26.6	51	+ 3	+ 4.5	21.27	21.29	− 0.02	8089	− 34	+ 3	− 8	− 36	+ 458	− 79	8393	2 3
	30	13 18.0	44	+ 6	+ 8.3	21.34	21.28	+ 0.06	8093	− 34	+ 3	+ 22	− 66	+ 447	− 85	8380	3 2
	Mai 9	12 34.3	50	+ 11	+ 12.3	21.42	21.40	+ 0.02	8249	− 34	+ 3	+ 6	− 97	+ 441	− 91	8479	2 3
										III							
95	Apr. 16	11 22.8	746	+ 11	+ 11.5	21.40	21.24	+ 0.16	129.4996	− 24	0	+ 76	− 120	+ 613	− 93	129.5450	3 3
	Mai 12	13 7.6	53	+ 15	+ 17.9	21.52	21.50	+ 0.02	5299	− 13	0	+ 9	− 166	+ 572	− 122	5550	3 3
96	Febr. 16	8 22.0	54	0	+ 1.5	21.21	21.10	+ 0.11	4388	− 13	+ 1	+ 52	− 15	+ 1151	+ 25	5589	3 4
	März 20	11 29.0	49	+ 8	+ 9.2	21.35	21.32	+ 0.03	5064	− 13	0	+ 14	− 96	+ 616	− 43	5542	2 3
	Apr. 24	13 36.6	51	+ 3	+ 4.3	21.27	21.29	− 0.02	5092	− 13	0	− 9	− 45	+ 607	− 104	5528	2 3
										IV							
95	Apr. 16	11 41.8	746	+ 11	+ 11.2	21.39	21.24	+ 0.15	145.9046	− 40	+ 1	+ 80	− 131	+ 676	− 103	145.9529	3 3
	Mai 12	12 58.8	53	+ 15	+ 18.0	21.52	21.50	+ 0.02	9227	− 40	+ 1	+ 11	− 211	+ 789	− 126	9651	3 3
96	März 4	8 22.7	28	+ 3	+ 4.0	21.26	21.22	+ 0.04	8423	− 42	+ 2	+ 21	− 47	+ 1244	− 12	9589	3 3
	20	11 39.4	49	+ 8	+ 9.1	21.35	21.32	+ 0.03	9109	− 40	+ 1	+ 16	− 106	+ 669	− 49	9620	2 3
	Apr. 30	13 3.0	44	+ 6	+ 8.6	21.34	21.26	+ 0.06	9016	− 40	+ 1	+ 32	− 100	+ 650	− 124	9444	3 2
										V							
95	Apr. 16	11 59.3	746	+ 11	+ 11.0	21.39	21.24	+ 0.15	155.5484	− 44	− 1	+ 85	− 137	+ 714	− 110	155.5991	3 3
	Mai 12	12 35.3	53	+ 16	+ 16.9	21.54	21.50	+ 0.04	5727	− 42	− 1	+ 23	− 234	+ 691	− 144	6020	3 3
	Apr. 18	11 1.8	55	+ 6	+ 7.7	21.32	21.28	+ 0.04	5565	− 42	− 1	+ 23	− 96	+ 790	− 114	6125	2 3
	24	13 44.6	51	+ 3	+ 4.2	21.26	21.29	− 0.03	5416	− 42	− 1	− 17	− 52	+ 745	− 124	5925	2 3
	30	13 33.0	44	+ 6	+ 6.1	21.33	21.28	+ 0.05	5490	− 42	− 1	+ 28	− 101	+ 737	− 132	5979	3 2
	Mai 8	12 42.8	50	+ 11	+ 12.2	21.41	21.40	+ 0.01	5699	− 42	− 1	+ 6	− 152	+ 699	− 142	6007	
										VI							
95	Apr. 16	12 12.3	746	+ 10	+ 10.9	21.39	21.24	+ 0.15	163.4653	− 20	+ 1	+ 90	− 143	+ 744	− 116	163.5209	3 3
	Mai 12	12 45.8	53	+ 15	+ 18.5	21.53	21.50	+ 0.03	4978	− 20	0	+ 18	− 242	+ 726	− 152	5308	3 3
96	Marz 4	8 38.7	28	+ 3	+ 4.0	21.26	21.22	+ 0.04	3957	− 20	+ 1	+ 24	− 52	+ 1283	− 13	5180	3 3
	Apr. 16	11 10.6	55	+ 6	+ 7.5	21.32	21.28	+ 0.04	4583	− 20	+ 1	+ 24	− 98	+ 619	− 120	5189	2 3
	Mai 1	12 9.2	49	+ 6	+ 9.0	21.35	21.28	+ 0.07	4647	− 20	+ 1	+ 42	− 118	+ 759	− 141	5170	3 3
										VII							
95	Apr. 16	12 26.8	746	+ 10	+ 10.8	21.39	21.24	+ 0.15	172.7339	− 11	+ 4	+ 95	− 149	+ 787	− 123	172.7942	3 3
	Mai 11	14 0.3	52	+ 13	+ 16.1	21.48	21.50	− 0.02	7339	− 9	− 3	− 13	− 222	+ 835	− 160	7767	3 2
96	März 4	8 51.5	26	+ 3	+ 4 0	21.26	21.22	+ 0.04	6603	− 11	+ 5	+ 25	− 55	+ 1282	− 14	7835	3 3
	Apr. 16	11 20.8	55	+ 6	+ 7.4	21.32	21.26	+ 0.04	7186	− 9	− 3	+ 25	− 102	+ 657	− 127	7827	2 3
	Mai 1	12 17.2	49	+ 6	+ 8.8	21.35	21.28	+ 0.07	7204	− 9	− 3	+ 45	− 122	+ 862	− 148	7829	3 3
										VIII							
95	Apr. 16	12 37.3	746	+ 10	+ 10.7	21.38	21.24	+ 0.14	20.3890	− 33	+ 1	+ 10	− 17	+ 119	− 15	20.3955	3 3
	Mai 11	13 48.8	52	+ 13	+ 16.2	21.48	21.50	− 0.02	3866	− 33	+ 2	− 1	− 26	+ 110	− 19	3699	3 2
96	Marz 4	9 4.2	27	+ 3	+ 3.9	21.26	21.22	+ 0.04	3878	− 33	+ 1	+ 3	− 6	+ 145	− 2	3986	3 3
	Apr. 18	11 32.3	55	+ 5	+ 7.2	21.31	21.28	+ 0.03	3850	− 33	+ 2	+ 2	− 12	+ 107	− 15	3901	2 3
	Mai 1	12 27.7	49	+ 6	+ 8.7	21.34	21.28	+ 0.06	3773	− 33	+ 2	+ 4	− 14	+ 102	− 17	3817	3 3
										IX							
95	Apr. 16	12 49.3	746	+ 10	+ 10.5	21.38	21.24	+ 0.14	51.0035	− 42	0	+ 26	− 43	+ 238	− 36	51.0178	3 3
	Mai 11	13 38.8	52	+ 14	+ 16.6	21.49	21.50	− 0.01	0250	− 42	0	− 2	− 68	+ 244	− 47	0335	3 2
96	März 4	9 14.2	27	+ 3	+ 8.9	21.26	21.22	+ 0.04	0063	− 42	0	+ 7	− 16	+ 346	− 4	0354	3 3
	Apr. 18	11 47.3	55	+ 5	+ 6.9	21.31	21.28	+ 0.03	0160	− 42	0	+ 6	− 28	+ 251	− 37	0330	2 3
	Mai 1	12 38.2	49	+ 6	+ 8.5	21.34	21.28	+ 0.06	0099	− 42	0	+ 11	− 35	+ 242	− 44	0231	3 3

Tag			Sternzeit	Bar.	Th.	t	N	O	N — O	Messung	Th. F.	Gang	Oc.-St.	Temp.	Refr.	Aberr.	Abstand	R. S.	
											X								
1800			h m	m	°	°													
95	Apr.	22	10 29.5	746	+ 12	+ 13.9	21.45	21.32	+ 0.13	67.3996	— 26	+ 1	+ 32	— 75	+ 362	— 52	67.4238	3	3
	Mai	11	13 28.3	52	+ 14	+ 16.7	21.49	21.50	— 0.01	4108	— 26	+ 1	— 2	— 90	+ 318	— 62	4247	3	2
96	März	4	9 22.5	27	+ 3	+ 3.9	21.26	21.22	+ 0.04	3934	— 29	+ 1	+ 10	— 21	+ 447	— 6	4336	3	3
	Apr.	18	11 56.3	55	+ 5	+ 6.8	21.31	21.28	+ 0.03	4121	— 29	+ 1	+ 8	— 36	+ 329	— 50	4344	2	3
	Mai	1	12 45.7	49	+ 6	+ 8.4	21.34	21.28	+ 0.06	4205	— 29	+ 1	+ 16	— 45	+ 349	— 58	4439	3	3
											XI								
95	Apr.	27	12 48.7	742	+ 11	+ 13.0	21.43	21.32	+ 0.11	77.0616	— 16	— 1	+ 31	— 80	+ 356	— 63	77.0843	3	3
		29	12 27.2	49	+ 10	+ 12.3	21.42	21.31	+ 0.11	0606	— 16	— 1	+ 31	— 76	+ 361	— 64	0841	3	2
	Mai	11	13 19.3	52	+ 14	+ 17.0	21.50	21.50	0.00	0852	— 16	— 1	0	— 105	+ 364	— 71	1023	3	2
96	März	4	9 35.7	27	+ 3	+ 3.9	21.26	21.22	+ 0.04	0591	— 16	— 1	+ 11	— 24	+ 487	— 6	1042	3	3
	Apr.	18	12 11.3	55	+ 5	+ 6.6	21.30	21.28	+ 0.02	0703	— 16	— 1	+ 6	— 41	+ 303	— 57	0897	2	3
											XII								
95	Apr.	29	12 39.2	749	+ 10	+ 12.2	21.41	21.31	+ 0.10	84.9823	— 28	0	+ 31	— 83	+ 399	— 71	85.0071	3	2
	Mai	11	13 11.8	52	+ 15	+ 17.0	21.50	21.50	0.00	9884	— 28	0	0	— 116	+ 399	— 79	0060	3	2
96	März	4	10 34.7	27	+ 3	+ 3.9	21.26	21.22	+ 0.04	9697	— 28	0	+ 13	— 27	+ 457	— 7	0105	3	3
	Apr.	18	12 19.3	55	+ 5	+ 6.6	21.30	21.28	+ 0.02	9831	— 28	0	+ 6	— 45	+ 411	— 62	0113	2	3
	Mai	1	12 55.7	49	+ 6	+ 8.3	21.31	21.28	+ 0.06	9785	— 28	0	+ 19	— 57	+ 406	— 73	0052	3	3
											XIII								
95	Apr.	29	12 52.2	749	+ 10	+ 12.1	21.41	21.31	+ 0.10	94.2808	— 12	— 4	+ 34	— 91	+ 449	— 79	94.3105	3	2
	Mai	11	13 3.5	52	+ 15	+ 17.2	21.50	21.50	0.00	2939	— 12	— 4	0	— 130	+ 445	— 87	3151	3	2
96	März	4	10 45.2	27	+ 3	+ 3.9	21.26	21.22	+ 0.04	2516	— 12	— 4	+ 14	— 30	+ 499	— 8	3005	3	2
	Apr.	21	11 46.1	57	+ 6	+ 7.2	21.31	21.18	+ 0.13	2762	— 12	— 4	+ 45	— 54	+ 471	— 71	3137	3	3
	Mai	1	13 4.2	49	+ 6	+ 8.2	21.33	21.28	+ 0.05	2676	— 12	— 4	+ 17	— 62	+ 457	— 81	2991	3	3
											XIV								
95	Jan.	18	6 51.3	747	0	+ 0.8	21.20	21.18	+ 0.02	30.6143	— 69	— 2	+ 2	— 2	+ 590	+ 20	30.6982	3	3
	Apr.	29	13 3.2	49	+ 10	+ 11.9	21.41	21.31	+ 0.10	7060	— 69	+ 4	+ 11	— 29	+ 138	— 26	7089	3	2
	Mai	28	13 40.2	45	+ 12	+ 14.8	21.45	21.46	— 0.01	7003	— 69	— 3	— 1	— 37	+ 139	— 30	7002	2	2
		28	14 22.5	53	+ 13	+ 14.3	21.42	21.45	— 0.03	7040	— 69	+ 4	— 3	— 35	+ 146	— 30	7053	3	3
96	März	20	8 6.4	48	+ 10	+ 11.1	21.39	21.32	+ 0.07	6752	— 69	+ 5	+ 8	— 27	+ 295	— 10	6954	2	3
	Apr.	21	12 0.6	57	+ 6	+ 7.1	21.31	21.18	+ 0.13	6952	— 69	— 3	+ 15	— 18	+ 144	— 24	6997	3	3
											XV								
95	Apr.	30	12 3.8	753	+ 10	+ 13.2	21.43	21.40	+ 0.03	47.0941	— 72	— 1	+ 5	— 50	+ 218	— 40	47.1001	3	3
	Mai	6	11 56.4	56	+ 14	+ 16.2	21.48	21.31	+ 0.14	0999	— 72	— 1	+ 21	— 61	+ 218	— 43	1064	3	3
		9	13 53.0	49	+ 11	+ 13.6	21.44	21.50	— 0.06	0894	— 72	— 1	— 10	— 51	+ 228	— 43	0945	2	3
96	März	20	8 14.9	48	+ 10	+ 11.0	21.39	21.32	+ 0.07	0825	— 72	— 1	+ 12	— 41	+ 434	— 16	1141	2	3
	Apr.	21	12 11.6	57	+ 6	+ 7.0	21.31	21.18	+ 0.13	0894	— 72	— 1	+ 23	+ 26	+ 222	— 35	1057	3	3
											XVI								
95	Jan.	18	7 14.8	747	0	+ 0.7	21.19	21.18	+ 0.01	56.6633	— 31	— 2	+ 2	— 3	+ 862	+ 37	56.7498	3	3
	Apr.	30	12 22.8	53	+ 10	+ 12.8	21.43	21.40	+ 0.03	7123	— 39	+ 4	+ 6	— 58	+ 263	— 48	7551	3	3
	Mai	9	13 47.0	49	+ 11	+ 13.7	21.44	21.50	— 0.06	7378	— 39	+ 4	— 12	— 62	+ 275	— 52	7492	2	3
		23	13 52.7	46	+ 12	+ 14.6	21.45	21.46	— 0.01	7127	— 31	— 3	— 2	— 66	+ 270	— 54	7541	2	2
96	März	20	8 24.4	48	+ 10	+ 10.9	21.39	21.32	+ 0.07	7140	— 39	+ 4	+ 14	— 50	+ 496	— 19	7546	2	3
	Apr.	21	12 26.6	57	+ 6	+ 6.8	21.31	21.18	+ 0.13	7361	— 14	+ 4	+ 27	+ 29	+ 268	— 43	7602	3	3
											XVII								
95	Apr.	30	12 31.3	753	+ 10	+ 12.7	21.42	21.40	+ 0.02	64.6533	— 21	— 2	+ 5	— 66	+ 300	— 55	64.6694	3	3
	Mai	6	12 6.4	56	+ 14	+ 16.0	21.48	21.31	+ 0.14	6506	— 21	+ 5	+ 33	— 83	+ 301	— 58	6683	3	3
		9	13 39.5	49	+ 11	+ 13.8	21.45	21.50	— 0.05	6499	— 21	— 2	— 12	— 71	+ 305	— 59	6639	2	3
96	März	20	8 30.9	49	+ 9	+ 10.8	21.39	21.32	+ 0.07	6334	— 21	+ 5	+ 16	— 56	+ 549	— 21	6806	2	3
	Apr.	21	12 40.1	57	+ 6	+ 6.7	21.30	21.18	+ 0.12	6414	— 24	— 2	+ 31	+ 36	+ 305	— 50	6710	3	3
											XVIII								
95	Apr.	11	12 4.8	751	+ 8	+ 9.0	21.35	21.38	— 0.03	73.9283	— 24	+ 1	— 8	— 53	+ 355	— 47	73.9507	3	3
		30	12 40.8	53	+ 10	+ 12.3	21.42	21.40	+ 0.02	9310	— 24	+ 1	+ 5	— 73	+ 349	— 60	9508	3	3
96	März	20	8 39.4	49	+ 9	+ 10.7	21.38	21.32	+ 0.06	9021	— 24	+ 1	+ 15	— 63	+ 603	— 24	9529	2	3
	Apr.	24	11 59.1	51	+ 3	+ 5.9	21.29	21.29	0.00	9254	— 24	+ 1	0	— 85	+ 430	— 58	9568	2	3
	Mai	9	12 22.3	50	+ 11	+ 12.5	21.42	21.40	+ 0.02	9356	— 24	+ 1	+ 5	— 74	+ 348	— 67	9545	2	3

Tag			Stern-zeit	Bar.	Th.	t	N	O	N — O	Messung	Th. F.	Gang	Oc.-St.	Temp.	Refr.	Aberr.	Abstand	R.	S.
			h m	m	°	°													
1800											XIX								
95	Apr.	11	12 13.8	751	+ 8	+ 8.8	21.35	21.38	— 0.03	16.3971	— 12	+ 1	— 2	— 12	+ 65	— 11	16.4000	3	3
	Mai	6	12 15.4	56	+ 14	+ 16.0	21.48	21.34	+ 0.14	3913	— 21	+ 1	+ 9	— 21	+ 64	— 15	3930	3	3
		9	13 24.0	49	+ 11	+ 14.2	21.45	21.50	— 0.05	3929	— 12	+ 1	— 3	— 19	+ 88	— 15	3969	2	3
96	März	20	8 49.9	49	+ 9	+ 10.5	21.38	21.32	+ 0.06	3883	— 21	+ 2	+ 3	— 13	+ 126	— 5	3975	2	3
	Apr.	24	12 7.1	51	+ 3	+ 5.8	21.29	21.29	0.00	3944	— 21	+ 1	0	— 3	+ 95	— 12	3999	2	3
											XX								
95	Apr.	11	12 24.3	752	+ 7	+ 8.7	21.34	21.38	— 0.04	26.0519	— 60	— 1	— 4	— 18	+ 145	— 17	26.0584	3	3
	Mai	6	12 26.4	56	+ 14	+ 15.8	21.48	21.34	+ 0.14	0571	— 60	— 1	+ 13	— 33	+ 113	— 23	0580	2	3
		9	13 17.0	49	+ 11	+ 14.3	21.45	21.50	— 0.05	0543	— 60	— 1	— 5	— 30	+ 114	— 21	0537	2	3
96	März	20	8 58.4	49	+ 9	+ 10.4	21.38	21.32	+ 0.06	0430	— 60	— 1	+ 6	— 21	+ 194	— 9	0539	2	3
	Apr.	24	12 16.1	51	+ 3	+ 5.6	21.29	21.29	0.00	0514	— 60	— 1	0	— 12	+ 154	— 20	0575	2	3
											XXI								
95	Apr.	11	12 33.3	752	+ 7	+ 8.6	21.34	21.38	— 0.04	33.9688	— 44	0	— 5	— 23	+ 164	— 22	33.9758	3	3
	Mai	6	12 36.4	56	+ 14	+ 15.7	21.47	21.34	+ 0.13	9663	— 44	+ 1	+ 16	— 43	+ 160	— 30	9723	3	3
		9	13 9.0	49	+ 11	+ 14.6	21.46	21.50	— 0.04	9704	— 44	0	— 5	— 40	+ 162	— 31	9746	2	3
96	März	20	9 7.4	49	+ 9	+ 10.3	21.37	21.32	+ 0.05	9628	— 44	+ 1	+ 8	— 28	+ 244	— 11	9798	2	3
	Apr.	24	12 22.6	51	+ 3	+ 5.5	21.29	21.29	0.00	9688	— 44	+ 1	0	— 15	+ 204	— 27	9807	2	3
											XXII								
95	Apr.	11	12 43.3	752	+ 7	+ 8.4	21.34	21.38	— 0.04	43.2629	— 43	— 4	— 5	— 29	+ 213	— 27	43.2734	3	3
	Mai	6	12 45.4	56	+ 14	+ 15.4	21.47	21.34	+ 0.13	2700	— 54	— 4	+ 16	— 53	+ 207	— 39	2773	3	3
		9	13 3.5	49	+ 11	+ 14.6	21.46	21.50	— 0.04	2672	— 43	+ 3	— 5	— 51	+ 211	— 40	2747	2	3
96	März	20	9 14.4	49	+ 9	+ 10.2	21.37	21.32	+ 0.05	2571	— 43	— 4	+ 8	— 35	+ 304	— 14	2787	2	3
	Apr.	24	12 30.6	51	+ 3	+ 5.2	21.28	21.29	— 0.01	2618	— 43	— 4	— 1	— 18	+ 266	— 34	2784	2	3
											XXIII								
95	Apr.	11	12 51.3	752	+ 7	+ 8.4	21.34	21.38	— 0.04	9.6491	— 6	— 2	— 2	— 17	+ 47	— 6	9.6515	3	3
	Mai	6	12 56.9	56	+ 14	+ 15.2	21.46	21.34	+ 0.12	6468	— 6	— 2	+ 4	— 12	+ 46	— 9	6489	3	3
		9	12 56.0	49	+ 12	+ 14.7	21.46	21.50	— 0.04	6496	— 6	— 2	— 2	— 11	+ 47	— 9	6513	2	3
96	März	20	9 44.0	49	+ 9	+ 9.9	21.37	21.32	+ 0.05	6509	— 6	— 2	+ 2	— 8	+ 78	— 3	6570	2	3
	Apr.	24	12 37.1	51	+ 3	+ 5.2	21.28	21.29	— 0.01	6484	— 6	— 2	0	— 4	+ 60	— 8	6524	2	3
											XXIV								
95	Apr.	11	12 58.3	752	+ 7	+ 8.3	21.34	21.38	— 0.04	17.5721	— 24	— 1	— 3	— 12	+ 87	— 11	17.5757	3	3
	Mai	7	12 16.8	53	+ 14	+ 15.2	21.46	21.25	+ 0.21	5711	— 24	— 1	+ 13	— 21	+ 77	— 16	5739	3	3
		9	12 42.0	49	+ 12	+ 15.0	21.46	21.50	— 0.04	5732	— 24	— 1	— 3	— 21	+ 85	— 16	5752	2	3
96	März	20	9 47.4	49	+ 9	+ 9.8	21.37	21.32	+ 0.05	5659	— 24	— 1	+ 3	— 14	+ 110	— 6	5727	2	3
	Apr.	24	12 44.6	51	+ 3	+ 5.1	21.28	21.29	— 0.01	5665	— 24	— 1	— 1	— 7	+ 111	— 14	5729	2	3
											XXV								
95	Apr.	11	13 7.8	752	+ 7	+ 8.2	21.33	21.38	— 0.05	26.8907	— 52	+ 1	— 5	— 18	+ 138	— 17	26.8954	3	3
	Mai	7	12 25.3	53	+ 14	+ 15.0	21.46	21.25	+ 0.21	8785	— 52	+ 2	+ 20	— 32	+ 133	— 24	8832	3	3
		9	12 36.0	49	+ 12	+ 15.1	21.46	21.50	— 0.04	8818	— 52	+ 2	— 4	— 32	+ 133	— 25	8840	2	3
96	März	20	9 55.4	49	+ 9	+ 9.8	21.37	21.32	+ 0.05	8803	— 52	+ 2	+ 5	— 21	+ 166	— 9	8894	2	3
	Apr.	24	12 52.1	51	+ 3	+ 5.0	21.28	21.29	— 0.01	8863	— 52	+ 1	— 1	— 11	+ 175	— 21	8954	2	3
											XXVI								
95	Apr.	16	10 7.3	746	+ 12	+ 12.7	21.42	21.24	+ 0.18	7.9058	— 1	+ 1	+ 5	— 8	+ 46	— 5	7.9096	3	3
	Mai	7	12 37.3	53	+ 13	+ 14.8	21.46	21.25	+ 0.21	9054	— 1	+ 1	+ 6	— 9	+ 38	— 7	9082	3	3
		9	12 30.0	49	+ 12	+ 15.1	21.46	21.50	— 0.04	9057	— 1	+ 1	— 1	— 10	+ 38	— 7	9077	2	3
96	März	20	10 3.9	49	+ 9	+ 9.7	21.36	21.32	+ 0.04	9123	— 1	+ 1	+ 1	— 6	+ 47	— 3	9162	2	3
	Apr.	24	13 1.1	51	+ 3	+ 4.8	21.28	21.29	— 0.01	9082	— 1	+ 1	0	— 3	+ 55	— 6	9128	2	3
											XXVII								
95	Apr.	18	10 16.3	746	+ 12	+ 12.6	21.42	21.24	+ 0.18	17.2262	— 17	— 3	+ 11	— 17	+ 100	— 12	17.2324	3	3
	Mai	7	12 49.8	53	+ 13	+ 14.7	21.46	21.25	+ 0.21	2314	— 17	— 3	+ 13	— 20	+ 87	— 15	2359	3	3
		9	12 22.0	49	+ 12	+ 15.4	21.47	21.50	— 0.03	2294	— 17	— 3	— 2	— 21	+ 86	— 15	2322	2	3
96	März	20	10 14.9	49	+ 9	+ 9.6	21.36	21.32	+ 0.04	2186	— 17	— 3	+ 2	— 18	+ 102	— 6	2251	2	3
	Apr.	24	13 8.6	51	+ 3	+ 4.7	21.27	21.29	— 0.02	2336	— 17	— 3	— 1	— 7	+ 119	— 13	2414	2	3
											XXVIII								
95	Apr.	16	10 24.3	746	+ 12	+ 12.5	21.42	21.24	+ 0.18	9.3193	+ 2	+ 3	+ 6	— 9	+ 54	— 6	9.3243	3	3
	Mai	7	12 57.8	53	+ 13	+ 14.6	21.46	21.25	+ 0.21	3235	0	— 5	+ 7	— 11	+ 49	— 8	3267	3	3
		9	12 15.0	49	+ 12	+ 15.6	21.47	21.50	— 0.03	3253	+ 2	+ 3	— 1	— 12	+ 50	— 8	3287	2	3
96	März	20	10 23.9	49	+ 9	+ 9.5	21.36	21.32	+ 0.04	3316	0	— 5	+ 1	— 7	+ 55	— 3	3357	2	3
	Apr.	24	13 17.1	51	+ 3	+ 4.6	21.27	21.29	— 0.02	3241	— 6	+ 3	— 1	— 4	+ 68	— 7	3294	2	3

Bei der Abfassung des Textes für diese Abhandlung zu Ende des Jahres 1899 habe ich meine früheren Rechnungen über die systematischen Correctionen noch einmal einer Prüfung unterworfen und dabei gefunden, dass für die Messung des Abstandes VII von 1896 März 4 die Berechnung der Reduction der Distanz auf die Normal-Ocularstellung nicht richtig war. In Folge der Verbesserung ändert sich der Abstand für diesen Tag etwas und es wird dadurch der Mittelwerth der fünf Messungen um 0".06 kleiner, nämlich 6914".11 anstatt 6914".17. Ich habe meine früheren Rechnungen über diese Correctionen und den Scalenwerth des Heliometers daraufhin abgeändert und die Curvenzeichnungen noch einmal wiederholt. Es sind deshalb in dieser Abhandlung die neuerdings erhaltenen Resultate an Stelle der früheren gesetzt.

Einige Messungen waren schon im Jahre 1894 angestellt, während die Beobachtungen der Hauptsache nach aus den Jahren 1895 und 1896 herrühren. Um die Epochen möglichst gleichmässig zu gestalten, sind diese vereinzelten Beobachtungen ausgeschlossen und durch neuere ersetzt, ebenso einige unter sehr ungünstigen Umständen, z. B. bei grösseren Stundenwinkeln angestellten.

Die aus den Beobachtungen hervorgehenden Mittelwerthe sowie der Betrag der Projection auf die Verbindungslinie zwischen den Endsternen Nr. 1 und 8 sind die nachfolgenden

Lfde Nr.	Sterne	Abstand Skalentheile	Bogensecunden	Zahl der Beobb.	Projection	Projicierter Abstand	Wahrschl. einer Beob.	Fehler des Mittels
		s						
1	1.2	78.5586	3143".61	5	— 1".73	3141".88	± 0".116	± 0".052
2	1.3	98.8439	3955.35	5	— 0.18	3955.17	0.164	0.073
3	1.4	129.5532	5184.20	5	— 0.41	5183.79	0.138	0.062
4	1.5	145.9547	5840.53	5	— 0.36	5840.17	0.238	0.106
5	1.6	155.6008	6226.53	6	— 0.22	6226.31	0.179	0.073
6	1.7	163.5211	6543.47	5	— 0.13	6543.34	0.151	0.066
7	1.8	172.7840	6914.11	5	0.00	6914.11	0.173	0.077
8	2.3	20.3912	815.97	5	— 2.78	813.19	0.174	0.078
9	2.4	51.0286	2041.97	5	— 0.36	2041.61	0.205	0.092
10	2.5	67.4321	2698.37	5	— 0.26	2698.11	0.222	0.099
11	2.6	77.0929	3084.85	5	— 0.45	3084.50	0.262	0.117
12	2.7	85.0080	3401.68	5	— 0.59	3401.09	0.073	0.033
13	2.8	94.3078	3773.83	5	— 1.43	3772.40	0.202	0.090
14	3.4	30.7013	1228.54	6	— 0.32	1228.22	0.133	0.054
15	3.5	47.1042	1884.93	5	— 0.21	1884.72	0.198	0.088
16	3.6	56.7538	2271.06	6	— 0.05	2271.01	0.145	0.036
17	3.7	64.6706	2587.86	5	— 0.01	2587.85	0.166	0.074
18	3.8	73.9531	2959.31	5	— 0.23	2959.08	0.070	0.031
19	4.5	16.3975	656.16	5	0.00	656.16	0.072	0.032
20	4.6	26.0553	1042.63	5	— 0.10	1042.53	0.061	0.027
21	4.7	33.9766	1359.61	5	— 0.22	1359.39	0.096	0.043
22	4.8	43.2765	1731.75	5	— 1.23	1730.52	0.063	0.028
23	5.6	9.6522	386.24	5	— 0.27	385.97	0.080	0.036
24	5.7	17.5741	703.25	5	— 0.43	702.82	0.036	0.016
25	5.8	26.8895	1076.01	5	— 2.01	1074.00	0.181	0.081
26	6.7	7.9109	316.56	5	— 0.17	316.39	0.122	0.054
27	6.8	17.2334	689.61	5	— 1.91	687.70	0.161	0.072
28	7.8	9.3290	373.31	5	— 2.25	371.06	0.115	0.051

Ehe aus diesen Beobachtungen weitere Schlüsse gezogen werden, wird es sich verlohnen, einige Betrachtungen über die wahrscheinlichen Fehler in ihrer Beziehung zu der Grösse des gemessenen Abstandes anzustellen.

In meiner Abhandlung über die Praesepe bin ich nämlich zu dem Resultat gelangt, dass die w. F. der Distanzmessungen mit der Quadratwurzel aus der Distanz wachsen. Untersucht man nun auch die vorstehenden Beobachtungen nach diesem Gesichtspunkt und ordnet die Fehler nach der Grösse der Distanz und reducirt sie der soeben ausgesprochenen Annahme gemäss durch Multiplication mit $\sqrt{\frac{4000}{s}}$ auf eine Distanz von 4000 Secunden, so erhält man nachstehende Uebersicht:

Gruppe	Nr. der Dist.	Mittl. Dist.	W. F. einer Beob.	$\sqrt{\frac{4000}{s}}$	Product	$\sqrt[4]{\frac{4000}{s}}$	Producte
a	26. 28. 23	358″	± 0″.106	3.34	± 0″.36	1.83	± 0″.19
b	19. 27. 24. 8	715	0.111	2.36	0.26	1.54	0.17
c	20. 25. 14. 21	1176	0.118	1.84	0.22	1.36	0.16
d	22. 15. 9. 16	1982	0.145	1.42	0.20	1.19	0.15
e	17. 10. 18. 11	2833	0.181	1.19	0.22	1.09	0.20
f	1. 2. 12. 13	3568	0.144	1.06	0.15	1.03	0.15
g	3. 4. 5. 6. 7	6141	0.177	0.81	0.14	0.90	0.16

Die wahrscheinlichen Fehler nehmen also nicht, wie früher vermuthet wurde, im Verhältniss der Quadratwurzel der Distanz zu, sondern in einem langsameren Verhältniss, d. h. die Beobachtungen grosser Distanzen sind erheblich genauer als man nach obiger Annahme erwarten sollte. Eine bessere Uebereinstimmung würde man erzielen, wenn man, wie es oben in der letzten Columne geschehen ist, die w. F. durch Multiplication mit $\sqrt[4]{\frac{4000}{s}}$ auf ein gemeinschaftliches Maass reduciren wollte, was aber jeder mathematischen Begründung vollständig entbehrend, hier nur ganz beiläufig erwähnt werden möge. Nimmt man einfach die Distanz s als das Gewicht der verschiedenen wahrscheinlichen Fehler, so erhält man im Mittel ± 0″.183 für eine einfache Messung, nahe übereinstimmend mit dem Werthe ± 0″.195 in der Praesepe-Abhandlung Seite 282.

Nunmehr wieder zu dem eigentlichen Gegenstande unserer Betrachtung zurückkehrend, können wir aus obigen Messungen den Abstand zwischen den beiden Endsternen auf 55 verschiedene Weisen berechnen, wodurch nachstehende Gleichungen entstehen:

[Bei dem Lesen der Correctur wurde bemerkt, dass die Distanz XVI um + 0.ˢ0011 = + 0″.04 zu verbessern ist. Es wurde darauf bei den Untersuchungen über die systematischen Correctionen einstweilen keine Rücksicht genommen, da die Rechnungen später doch wohl noch einmal wiederholt werden müssen, wenn die Meridianbeobachtungen der Sterne 1 und 8 zur Verfügung stehen, wozu sich mehrere Sternwarten bereit erklärt haben. Auf Seite 26 ist schon die verbesserte Messung enthalten.]

Nr.	Nr. der Messungen	Summe	Unterschied gegen Nr. 7
1	7	6914.11	0.00
2	1 + 13	14.28	— 0.17
3	2 + 18	14.25	— 0.14
4	3 + 22	14.31	— 0.20
5	4 + 25	14.17	— 0.06
6	5 + 27	14.01	+ 0.10
7	6 + 28	14.40	— 0.29
8	1 + 8 + 18	14.15	— 0.04
9	1 + 9 + 22	14.01	+ 0.10
10	1 + 10 + 25	13.99	+ 0.12
11	1 + 11 + 27	14.08	+ 0.03
12	1 + 12 + 28	14.03	+ 0.08
13	2 + 14 + 22	13.91	+ 0.20
14	2 + 15 + 25	13.89	+ 0.22
15	2 + 16 + 27	13.84	+ 0.27
16	2 + 17 + 28	14.08	+ 0.03
17	3 + 19 + 25	13.95	+ 0.16
18	3 + 20 + 27	14.02	+ 0.09
19	3 + 21 + 28	14.24	— 0.13
20	4 + 23 + 27	13.84	+ 0.27
21	4 + 24 + 28	14.05	+ 0.06
22	5 + 26 + 28	13.76	+ 0.35
23	1 + 8 + 14 + 22	13.81	+ 0.30
24	1 + 8 + 15 + 25	13.79	+ 0.32
25	1 + 8 + 16 + 27	13.74	+ 0.37
26	1 + 8 + 17 + 28	13.98	+ 0.13
27	1 + 9 + 19 + 25	13.65	+ 0.46
28	1 + 9 + 20 + 27	13.72	+ 0.39
29	1 + 9 + 21 + 28	13.94	+ 0.17
30	2 + 14 + 19 + 25	13.55	+ 0.56
31	2 + 14 + 20 + 27	13.62	+ 0.49
32	2 + 14 + 21 + 28	13.84	+ 0.27
33	2 + 15 + 23 + 27	13.56	+ 0.55
34	2 + 15 + 24 + 28	13.77	+ 0.34
35	2 + 16 + 26 + 28	13.59	+ 0.52
36	3 + 19 + 23 + 27	13.62	+ 0.49
37	3 + 19 + 24 + 28	13.83	+ 0.28
38	4 + 23 + 26 + 28	13.59	+ 0.52
39	1 + 8 + 14 + 19 + 25	13.45	+ 0.66
40	1 + 8 + 14 + 20 + 27	13.52	+ 0.59
41	1 + 8 + 14 + 21 + 28	13.74	+ 0.37
42	1 + 9 + 19 + 23 + 27	13.32	+ 0.79
43	1 + 9 + 19 + 24 + 28	13.53	+ 0.58
44	1 + 9 + 20 + 26 + 28	13.47	+ 0.64
45	1 + 10 + 23 + 26 + 28	13.41	+ 0.70
46	2 + 14 + 19 + 23 + 27	13.22	+ 0.89
47	2 + 14 + 19 + 24 + 28	13.43	+ 0.68
48	2 + 15 + 23 + 26 + 28	13.31	+ 0.80
49	3 + 19 + 23 + 26 + 28	13.37	+ 0.74
50	1 + 8 + 14 + 19 + 23 + 27	13.12	+ 0.99
51	1 + 8 + 14 + 19 + 24 + 28	13.33	+ 0.78
52	1 + 8 + 14 + 20 + 26 + 28	13.27	+ 0.84
53	1 + 9 + 19 + 23 + 26 + 28	13.07	+ 1.04
54	2 + 14 + 19 + 23 + 26 + 28	12.97	+ 1.14
55	1 + 8 + 14 + 19 + 23 + 26 + 28	12.87	+ 1.24

Nach den obigen Betrachtungen gestaltet sich der w. F. für das Mittel aus 5 Messungen für die 7 Gruppen folgendermaassen:

für 358"	± 0."047
715	0.050
1176	0.053
1982	0.070
2833	0.081
3568	0.064
6141	0.078

und daraus im Mittel ohne Rücksicht auf die allmählige Zunahme bei grösseren Distanzen

$$\pm 0.''063.$$

Mithin ist der w. F. für die Summe von *s* zu einander addirten Abstandsmessungen

$$\pm 0.''063 \sqrt{s}$$

also für *s* =	1	2	3	4	5	6	7
	± 0."06	0.08	0.11	0.13	0.14	0.15	0.17

Diese Beträge bezeichnen also die aus der inneren Uebereinstimmung der Beobachtungen hervorgehende Unsicherheit der berechneten Abstände zwischen den beiden Endsternen.

Da ich auf der Astronomen-Versammlung in Bamberg im Jahre 1896 die Beobachter an Heliometern Repsold'scher Construction auf anderen Sternwarten gebeten habe, auch ihrerseits die Beobachtung des Löwenbogens vorzunehmen und demnächst Messungen des Abstandes derselben Sternpaare an verschiedenen Instrumenten vorliegen werden, so muss ich noch des folgenden Umstandes erwähnen:

Der bisher von mir verwandte Werth zur Verwandlung der an den Objectivscalen gemachten Ablesungen in Bogenmaass beruht nach meiner Abhandlung über die Praesepe auf Messungen verschiedener Bogen zwischen Sternen, deren Abstände durch Meridianbeobachtungen festgelegt sind und das Resultat davon ist daselbst Seite 89 zusammengestellt. Nun bin ich aber durch das Referat von Dr. Peter in der Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft, 31 Jahrgang 1896, Seite 35, Anmerkung, darauf aufmerksam gemacht worden, dass mir bei der Berechnung des Abstandes der beiden Endsterne im Polbogen aus den von Geheimrath Auwers mitgetheilten Daten ein kleiner Irrthum begegnet ist. Der berichtigte Abstand der beiden Sterne ist

$$6779.''71 + 0.''20\,(t - 1875)$$

Damit erfährt die Berechnung des Skalenwerthes in IV. 89 eine geringfügige Abänderung und es muss heissen

	Schur	Ambronn
Cygnuskreis	40."01601	40."01921
Hydrakreis	01506	01610
Polbogen	01486	01599
Standard stars	01750	01710
Mittel	40.01586	40.01710

anstatt der früheren Annahme

Schur	Ambronn
40″.01605	40″.01730

Für meine Messungen hätte also der Verwandlungs-Logarithmus 1.602232 anstatt des früher angenommenen Werthes 1.602234 angewandt werden müssen. Der Unterschied von 0″.0019 im Skalenwerth oder zwei Einheiten der sechsten Decimale im Logarithmus bringt bei der grössten am Heliometer messbaren Distanz einen Unterschied von 0″.04 hervor, d. h. um diesen Betrag müssen die grössten Abstände verkleinert werden.

Auf die Vergleichung der Messungen für die systematischen Fehler hat diese Abänderung nur den Einfluss, dass bei der Vergleichung der Summen der Distanzen mit dem Abstande der Endsterne gelegentlich kleine Abänderungen durch die Abrundung der hundertel Secunden vorkommen können, auch bei der Vergleichung der Bogenlängen selbst mit den Ergebnissen der Messungen an anderen Heliometern spielen diese im Maximum nur 0″.04 betragenden Verbesserungen eine unbedeutende Rolle.

Aus den obigen 55 Gleichungen geht deutlich hervor: Je grösser die Zahl von einzelnen gemessenen Abständen ist, aus denen der Abstand der Endsterne durch Addition der Unterabtheilungen berechnet wird, desto grösser ist die Verbesserung, welche an die Summe anzubringen ist, um sie mit der unmittelbaren Messung zwischen den Endsternen vergleichbar zu machen, d. h. die kleineren Abstandmessungen bedürfen den grösseren gegenüber einer positiven Correction.

Um aus diesen Messungen eine Curve abzuleiten, welcher man die den verschiedenen Abständen hinzuzufügende Verbesserung entnehmen kann und wodurch die in den Messungen vorhandenen Widersprüche ausgeglichen werden, ist zunächst für mehrere nahe einander gleiche Abstände eine gemeinschaftliche Verbesserung angenommen und dabei die Voraussetzung gemacht worden, dass für die Abstände 0 und 7200″ entsprechend den Extremen der messbaren Abstände, keine Verbesserung anzubringen ist.

Dadurch entsteht nachfolgende Tabelle:

Verbesserung	Mittl. Abstand als Abscisse	Gültig für die Abstände
0	0″	
(1)	360	23, 26, 28
(2)	715	8, 19, 24, 27
(3)	1176	14, 20, 21, 25
(4)	1982	9, 15, 16, 22
(5)	2894	1, 10, 11, 17, 18
(6)	3720	2, 12, 13
(7)	5750	3, 4, 5
(8)	6728	6, 7
0	7200	

Man erhält auf diese Weise folgende Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der Unbekannten (1) (2) (3) u. s. w. bis (8), in welchen unter *A* die absoluten Glieder stehen, während die Bedeutung von *B* später erläutert wird.

	A	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	*B*
1	0.00 =								1	+ 0.22
2	− 0.16					1	1			− 0.06
3	− 0.10					1	1			− 0.01
4	− 0.27				1			1		− 0.13
5	− 0.04			1				1		+ 0.08
6	+ 0.10		1					1		+ 0.16
7	− 0.29	1							1	− 0.26
8	− 0.04		1			2				− 0.05
9	+ 0.10				2	1				− 0.01
10	+ 0.12			1		2				+ 0.14
11	+ 0.03		1			2				− 0.02
12	+ 0.08	1				1	1			− 0.05
13	+ 0.20			1	1		1			+ 0.01
14	+ 0.22			1	1		1			+ 0.01
15	+ 0.27		1		1		1			+ 0.02
16	+ 0.03	1				1	1			− 0.14
17	+ 0.16		1	1				1		− 0.02
18	+ 0.09		1	1				1		− 0.09
19	− 0.13	1		1				1		− 0.31
20	+ 0.27	1	1					1		+ 0.07
21	+ 0.06	1	1					1		− 0.15
22	+ 0.35	2						1		+ 0.14
23	+ 0.30		1	1	1	1				− 0.03
24	+ 0.32		1	1	1	1				− 0.03
25	+ 0.37		2		1	1				0.00
26	+ 0.13	1	1			2				− 0.18
27	+ 0.46		1	1	1	1				+ 0.10
28	+ 0.39		1	1	1	1				+ 0.03
29	+ 0.17	1		1	1	1				− 0.19
30	+ 0.56		1	2			1			+ 0.12
31	+ 0.49		1	2			1			+ 0.05
32	+ 0.27	1		2			1			− 0.17
33	+ 0.55	1	1		1		1			0.00
34	+ 0.34	1	1		1		1			− 0.22
35	+ 0.52	2			1		1			+ 0.02
36	+ 0.49	1	2					1		− 0.03
37	+ 0.28	1	2					1		− 0.25
38	+ 0.52	3						1		+ 0.05
39	+ 0.66		2	2		1				+ 0.08
40	+ 0.59		2	2		1				+ 0.01
41	+ 0.37	1	1	2		1				− 0.21
42	+ 0.79	1	2		1	1				+ 0.19
43	+ 0.58	1	2		1	1				− 0.13
44	+ 0.64	2		1	1	1				+ 0.01
45	+ 0.70	3				2				+ 0.11
46	+ 0.89	1	2	1			1			+ 0.11
47	+ 0.68	1	2	1			1			− 0.11
48	+ 0.80	3			1		1			− 0.02
49	+ 0.74	3	1					1		− 0.05
50	+ 0.99	1	3	1		1				+ 0.07
51	+ 0.78	1	3	1		1				− 0.15
52	+ 0.84	2	1	2		1				− 0.01
53	+ 1.04	3	1		1	1				+ 0.07
54	+ 1.14	3	1	1			1			+ 0.09
55	+ 1.24	3	2	1		1				+ 0.05

Hieraus folgen die Endgleichungen, mit Hinweglassung der identischen Grössen links von der Diagonale

A										B
+ 30.57	=	+ 99 (1)	+ 41 (2)	+ 22 (3)	+ 15 (4)	+ 26 (5)	+ 15 (6)	+ 13 (7)	+ 1 (8)	− 0.99
+ 27.02			80	35	14	31	10	10		− 0.95
+ 16.16				47	8	19	11	4		− 0.39
+ 7.96					22	12	7	1		− 0.39
+ 12.31						42	4			− 0.50
+ 6.73							17			− 0.35
+ 2.67								13		− 0.53
− 0.29									2	− 0.04

Die Auflösung der Gleichungen giebt die Werthe

0″	0	0.″0		0.″0
360	(1)	+ 0.2455	abgekürzt	+ 0.25
715	(2)	+ 0.2164		+ 0.22
1176	(3)	+ 0.1223		+ 0.12
1982	(4)	+ 0.0888		+ 0.09
2894	(5)	− 0.0955		− 0.10
3720	(6)	− 0.0413		− 0.04
5750	(7)	− 0.2509		− 0.25
6728	(8)	− 0.2677		− 0.27
7200	0	0.0		0.0

Werden diese Verbesserungen mit den zugehörigen Abscissen 360, 715 usw. als Ordinaten aufgetragen und wird durch die auf diese Weise erhaltenen Punkte eine sich genau anschliessende Curve gelegt, die zugleich durch die beiden Abscissenpunkte 0 und 7200 hindurchgeht und entnimmt man dieser Curve für jeden einzelnen der 28 gemessenen Abstände die zugehörige Verbesserung, so erhält man dafür

A.

Nr.	Abstand	Verbesserung	Nr.	Abstand	Verbesserung
1	3142″	− 0.″08	15	1885″	+ 0.″11
2	3955	− 0.03	16	2271	+ 0.04
3	5184	− 0.18	17	2588	− 0.05
4	5840	− 0.27	18	2959	− 0.10
5	6226	− 0.28	19	656	+ 0.23
6	6543	− 0.28	20	1043	+ 0.14
7	6914	− 0.22	21	1359	+ 0.11
8	813	+ 0.19	22	1731	+ 0.11
9	2042	+ 0.08	23	386	+ 0.25
10	2698	− 0.07	24	703	+ 0.23
11	3085	− 0.09	25	1074	+ 0.13
12	3401	− 0.04	26	316	+ 0.24
13	3772	− 0.03	27	688	+ 0.22
14	1228	+ 0.11	28	371	+ 0.25

Mit Berücksichtigung dieser Tabelle wurden die absoluten Glieder der 55 Bedingungsgleichungen zum zweiten Male gebildet und es ergaben sich dann noch nachstehende Verbesserungen B der ersten Annäherung

(1)	+ 0.0022	abgekürzt	0.00
(2)	− 0.0023		0.00
(3)	+ 0.0063		+ 0.01
(4)	− 0.0054		− 0.01
(5)	− 0.0104		− 0.01
(6)	− 0.0196		− 0.02
(7)	− 0.0417		− 0.04
(8)	− 0.0202		− 0.02

Durch Hinzufügung der Näherung B zur Näherung A erhält man schliesslich die Ordinaten der Verbesserungs-Curve Tabelle B

Abstand		Verbesserung
0″		0.00
360	(1)	+ 0.25
715	(2)	+ 0.21
1176	(3)	+ 0.13
1982	(4)	+ 0.08
2894	(5)	− 0.11
3720	(6)	− 0.06
5750	(7)	− 0.29
6728	(8)	− 0.29
7200		0.00

Werden diese Resultate aus den Beobachtungen des Löwenbogens mit denen der früheren Untersuchungen an den beiden Praesepebogen und dem Vulpeculabogen (Vergl. Praesepe Seite 166 oder Astr. Nachr. 136) verglichen, so erhält man folgende Uebersicht

Abstand	Praesepe *αx*	Praesepe *αp*	Vulpecula	Leo
0″	0.00	0.00	0.00	0.00
500	+ 0.05	+ 0.06	+ 0.08	+ 0.25
1000	+ 0.08	+ 0.20	+ 0.13	+ 0.15
1500	+ 0.08	+ 0.15	+ 0.13	+ 0.10
2000	0.00	+ 0.01	+ 0.10	+ 0.08
2500	− 0.03	− 0.02	0.00	− 0.04
3000	− 0.03	+ 0.03	− 0.02	− 0.11
3500	− 0.01	+ 0.07	− 0.03	− 0.07
4000		+ 0.05	0.00	− 0.08
4500		+ 0.02	− 0.02	− 0.14
5000		0.00	0.00	− 0.22
5500				− 0.27
6000				− 0.30
6500				− 0.30
7000				− 0.17
				0.00

Bei der Vergleichung dieser Zahlenreihen darf nicht unerwähnt bleiben, dass bei den älteren kürzeren Bogen die Abscisse des Punktes, in welchem die Curve in ihrem oberen Verlaufe, d. h. für die grössten Abstände, die Abscissenaxe schneidet, nicht wie bei dem Löwenbogen 7200″ ist, sondern in die Nähe der grössten jedesmaligen Distanz gelegt ist und zwar

für	Praesepe αx	Praesepe αp	Vulpecula
bei	3608″	4700″	5000″

Eigentlich hätten die Curven so gelegt werden müssen, dass sie bei den drei älteren Bogen ebenfalls durch den Punkt 7200″ wie bei dem Löwenbogen gehen, aber die Vergleichung der obigen Tabellen lehrt, dass das Ergebniss aus dem Löwenbogen, wonach die Curve wenigstens in ihrer anfänglichen Form I bei etwa 5000″ die Abscissenaxe schneidet, sich mit dem Verlauf bei den älteren Bogen vereinigen lässt, während freilich die Form II eine Verbesserung von $-0\overset{''}{.}20$ erfordert. Es wird aber nicht nöthig sein, die Zeichnungen und Rechnungen für die älteren Bogen noch einmal umzuändern, um so weniger als für die fernere Behandlung dieser Frage die Resultate aus dem Löwenbogen, der sich fast über die ganze Verschiebung der Objectivhälften erstreckt, in erster Linie massgeblich sein werden.

Was bei den Ergebnissen aus den Beobachtungen des Löwenbogens etwas eigenthümlich erscheint, ist der Umstand, dass für die grössten Distanzen bei 6500″ noch einmal eine so erhebliche Depression der Correctionscurve auf die negative Seite der Ordinaten vorkommt, während man, sofern diese Correctionen ihren Grund in einer besonderen Beobachtungsweise haben, erwarten sollte, dass die kleineren Abstände vorzugsweise mit solchen Einflüssen behaftet, die grossen dagegen einwandfrei gemessen werden.

Dass diese Anomalien nicht von Constructionsfehlern des Instruments, etwa von einer Abweichung der Bewegung der Objectivschlitten von dem mit der Brennweite des Objectivs beschriebenen Kreiscylinder herrühren können, glaube ich bei der früheren Besprechung dieser Angelegenheit (Praesepe Seite 167) genügend dargethan zu haben.

Um von Neuem den Beweis zu liefern, dass die Objectivschieber sich wirklich auf Cylinderflächen bewegen, deren Radius gleich der Brennweite des Objectivs ist, habe ich eine Reihe von Focussirungen des Oculars auf den für diese Zwecke vorzüglich geeigneten Doppelstern $\Sigma 941$ ($\alpha = 6^h\,31^m$, $\delta = +41^\circ\,41'$) bei verschiedenen Stellungen der Objectivhälften gegen die optische Axe bis an die Grenzen der Beweglichkeit ausgeführt.

Jede einzelne der hier mitgetheilten Zahlen ist das Mittel aus vier Einstellungen des Oculars auf den Doppelstern in zwei entgegengesetzten Richtungen der Bewegung. Die Ablesungen an der Ocularscala sind in Millimetern ausgedrückt.

Focussirungen auf Σ 941.

Theilstrich auf Skale I	1896 Novbr. 26			1896 Novbr. 29			Mittel für beide Tage
	Objectiv I	Objectiv II	Mittel	Objectiv I	Objectiv II	Mittel	
14	20.91	21.05	20.98	21.08	21.03	21.06	21.02
44	20.88	21.01	20.95	21.01	20.91	20.96	20.96
74	20.95	20.98	20.97	21.04	21.07	21.06	21.02
104	20.99	20.94	20.96	21.05	20.98	21.02	20.99
134	20.94	20.88	20.91	21.13	21.02	21.08	21.00
164	21.06	20.83	20.95	21.07	21.11	21.09	21.02
194	20.90	21.04	20.97	21.03	21.02	21.03	21.00

Das Mittel aus den beiden Objectivhälften entsprechenden Zahlen stimmen bis auf wenige hundertel Millimeter mit dem Gesammtmittel 21.00 überein, man kann also die Schlittenbewegung als völlig kreisförmig mit der Brennweite als Radius betrachten.

Durch diese Untersuchung wird der Beweis geliefert, dass die bemerkten systematischen Unterschiede in den Distanzmessungen nicht von einem Constructionsfehler des Instruments herrühren, sondern in der Beobachtungsweise ihren Grund haben und durch Beobachtungsreihen für jeden einzelnen Beobachter ermittelt werden müssen. Dass Constructionsfehler nicht die Ursache sein können, habe ich in der Abhandlung über die Praesepe Astr. Mitthlgg. IV Seite 167 und 168 schon durch einige Rechnungsbeispiele gezeigt.

Im Jahre 1897 hat Dr. F. Cohn in Königsberg sich ebenfalls mit den systematischen Fehlern der Distanzmessungen beschäftigt und darüber einen Aufsatz in den Astr. Nachr. Bd. 142 veröffentlicht, worin diese Frage in einer von der meinigen verschiedenen Weise behandelt wird. Es werden dort die Unterschiede in den Messungen dadurch beseitigt, dass jeder Distanzmessung ohne Rücksicht auf die Grösse eine constante Correction ertheilt wird. Eine solche constante Correction könnte nur dann in Betracht kommen, wenn die Messungen nur bei einseitiger Stellung der Objectivhälften angestellt würden und der Coïncidenzpunkt der Bilder durch besondere Untersuchungen, wie etwa bei den beim letzten Venusdurchgange von belgischen Astronomen benutzten Heliometern, bestimmt würde, die entsprechend der scheinbaren Grösse der Sonne und der Venus aus zwei ganz verschiedenen Linsen bestanden und daher die Methode, die Messungen in zwei symmetrischen Stellungen der Objectivhälften gegen die optische Axe auszuführen, nicht befolgt werden konnte.

Es würde zu weit führen, den Inhalt der Cohn'schen Abhandlung hier eingehend zu behandeln, sondern es kann darauf nur hingewiesen werden.

Bisher sind die Beobachtungen im Löwenbogen ohne Rücksicht auf ein besonderes mathematisches Bildungsgesetz der Correctionsformel behandelt worden und das bis jetzt erhaltene Resultat ist die mit B bezeichnete Tabelle.

Es ist nun noch der Versuch gemacht worden, der Correction eine bestimmte Form zu geben, etwa

$$y = p + qx + rx^2$$

wo y die Correction, x die Abscisse und p, q, r Constanten bedeuten, die aus den Zahlen der Tabelle B abzuleiten sind. Wenn die Correctionscurve durch den Nullpunkt gehen, d. h. wenn eine verschwindend kleine Distanz nicht mit einer Correction versehen werden soll, die vielleicht grösser ist als der gemessene Betrag selbst (man denke nur an sehr enge Doppelsterne), so würde $p = 0$ sein, aber der Versuch die Beobachtungen des Löwenbogens mit dem Ausdruck $qx + rx^2$ darzustellen, ist nicht gelungen, da sich dabei eine sehr schlechte Darstellung besonders der beiden Normalörter (7) und (8) ergab, indem die Beträge der absoluten Glieder -0.29 durch die Correctionsformel

$$y = +0''.0000101\,d - 0''.0000000055\,d^2$$

wo d die Distanz in Secunden, nicht verringert wurden, also die Fehler $-0''.29$ übrig blieben.

Dagegen hat eine Ausgleichung mit der dreigliedrigen Formel eine gute Darstellung der Beobachtungen ergeben. Die Bedingungsgleichungen gestalten sich in diesem Falle folgendermaassen, wenn $x = 0.001\,d$ angesetzt wird:

Abstand			Gewicht
360″	(1)	$+0''.25 = p + 0.36\,q + 0.13\,r$	3
715	(2)	$+0.21 = p + 0.72\,q + 0.52\,r$	4
1176	(3)	$+0.13 = p + 1.18\,q + 1.39\,r$	4
1982	(4)	$+0.08 = p + 1.98\,q + 3.92\,r$	4
2894	(5)	$-0.11 = p + 2.89\,q + 8.35\,r$	5
3720	(6)	$-0.06 = p + 3.72\,q + 13.84\,r$	3
5750	(7)	$-0.29 = p + 5.75\,q + 33.06\,r$	3
6728	(8)	$-0.29 = p + 6.73\,q + 45.29\,r$	2

Die Gewichte sind nach der Zahl der zu den einzelnen Normalörtern benutzten Distanzen angenommen. Es ergeben sich nun die Endgleichungen

$$\begin{aligned} +\ 0''.25 &= +\ 28.00\,p + 72.92\,q + 296.74\,r \\ -\ 9.06 &= +\ 72.92\,p + 296.76\,q + 1494.19\,r \\ -\ 59.53 &= +\ 296.74\,p + 1494.19\,q + 8375.72\,r \end{aligned}$$

und daraus

$$\begin{aligned} p &= +0''.3109 \\ q &= -0.1540 \\ r &= +0.00935 \end{aligned}$$

also der Ausdruck zur Verbesserung der Messungen

$$y = +0''.311 - 0''.154 \cdot \frac{1}{1000}\,d + 0''.00935\left(\frac{1}{1000}\,d\right)^2$$

oder wenn die Distanz d in Secunden selbst eingeführt wird

$$y = +0''.311 - 0''.000154\,d + 0''.00000000935\,d^2$$

Bemerkenswerth ist es, dass die Constante $+0''.311$ nahe mit der Grösse $+0''.233$ übereinstimmt, welche man nach dem Verfahren von Dr. Cohn als constante Correction aller Distanzmessungen ohne Rücksicht auf ihre Grösse findet.

Mit dieser Formel für y erhält man die Correctionstabelle der gemessenen Distanzen Tabelle C

$0''$	$+0''.31$	$4000''$	$-0''.15$
400	+ 0.25	4400	— 0.18
800	+ 0.19	4800	— 0.21
1200	+ 0.14	5200	— 0.24
1600	+ 0.09	5600	— 0.26
2000	+ 0.05	6000	— 0.28
2400	0.00	6400	— 0.29
2800	— 0.05	6800	— 0.30
3200	— 0.09	7200	— 0.32
3600	— 0.12		

In nachfolgender Uebersicht kann man einen Vergleich anstellen zwischen der Darstellung der Beobachtungen des Löwenbogens nach der früheren mit B bezeichneten graphisch abgeleiteten Tabelle und der Tabelle C nach dem dreigliedrigen Ausdruck $y = p + qx + rx^2$.

Correction der 28 gemessenen Distanzen

	Nach B		Nach C		Unterschied C—B
	Correction	corrigirt	Correction	corrigirt	
1	$-0''.11$	$3141''.77$	$-0''.08$	$3141''.80$	$-0''.03$
2	— 0.08	3955.09	— 0.15	3955.02	+ 0.07
3	— 0.23	5183.56	— 0.24	5183.55	+ 0.01
4	— 0.29	5839.88	— 0.27	5839.90	— 0.02
5	— 0.30	6226.01	— 0.29	6226.02	— 0.01
6	— 0.30	6543.04	— 0.29	6543.05	— 0.01
7	— 0.23	6913.88	— 0.31	6913.80	+ 0.08
8	+ 0.20	813.39	+ 0.19	813.38	+ 0.01
9	+ 0.08	2041.69	+ 0.05	2041.66	+ 0.03
10	— 0.09	2698.02	— 0.04	2698.07	— 0.05
11	— 0.11	3084.39	— 0.08	3084.42	— 0.03
12	— 0.08	3401.01	— 0.11	3400.98	+ 0.03
13	— 0.07	3772.33	— 0.13	3772.27	+ 0.06
14	+ 0.12	1228.34	+ 0.13	1228.35	— 0.01
15	+ 0.08	1884.80	+ 0.06	1884.78	+ 0.02
16	+ 0.04	2271.01	+ 0.02	2270.99	+ 0.02
17	— 0.06	2587.79	— 0.02	2587.83	— 0.04
18	— 0.11	2958.97	— 0.07	2959.01	— 0.04
19	+ 0.22	656.38	+ 0.21	656.37	+ 0.01
20	+ 0.14	1042.67	+ 0.16	1042.69	— 0.02
21	+ 0.11	1359.50	+ 0.12	1359.51	— 0.01
22	+ 0.09	1730.61	+ 0.08	1730.60	+ 0.01
23	+ 0.25	386.22	+ 0.26	386.23	— 0.01
24	+ 0.22	703.04	+ 0.20	703.02	+ 0.02
25	+ 0.14	1074.14	+ 0.16	1074.16	— 0.02
26	+ 0.24	316.63	+ 0.26	316.65	— 0.02
27	+ 0.22	687.92	+ 0.21	687.91	+ 0.01
28	+ 0.25	371.31	+ 0.26	371.32	— 0.01

Damit erhält man die Summen in den erwähnten 55 verschiedenen Combinationen zur Berechnung des Abstandes zwischen den beiden Endsternen, sowohl für B als für C, sowie die Abweichungen vom Gesammtmittel und die Mittelwerthe der Fehler innerhalb der durch Zwischenräume abgetheilten Gruppen folgendermaassen:

	B	v	Mittel	C	v	Mittel	Zahl der Abstände
1	6913.88	− 0.″21		6913.91	− 0.18		1
2	14.10	+ 0.01		14.07	− 0.02		
3	14.06	− 0.03		14.03	− 0.06		
4	14.17	+ 0.08	− 0.″01	14.15	+ 0.06	+ 0.01	2
5	14.02	− 0.07		14.06	− 0.03		
6	13.93	− 0.16		13.93	− 0.16		
7	14.35	+ 0.26		14.37	+ 0.28		
8	14.13	+ 0.04		14.19	+ 0.10		
9	14.07	− 0.02		14.06	− 0.03		
10	13.93	− 0.16		14.03	− 0.06		
11	14.08	− 0.01		14.13	+ 0.04		
12	14.09	0.00		14.10	+ 0.01		
13	14.04	− 0.05		13.97	− 0.12		
14	14.03	− 0.06		13.96	− 0.13		
15	14.02	− 0.07	0.00	13.92	− 0.17	+ 0.01	3
16	14.19	+ 0.10		14.17	+ 0.08		
17	14.08	− 0.01		14.08	− 0.01		
18	14.15	+ 0.06		14.15	+ 0.06		
19	14.37	+ 0.28		14.38	+ 0.29		
20	14.02	− 0.07		14.06	− 0.03		
21	14.23	+ 0.14		14.24	+ 0.15		
22	13.95	− 0.14		13.99	− 0.10		
23	14.11	+ 0.02		14.13	+ 0.04		
24	14.10	+ 0.01		14.12	+ 0.03		
25	14.09	0.00		14.08	− 0.01		
26	14.26	+ 0.17		14.33	+ 0.24		
27	13.98	− 0.11		13.99	− 0.10		
28	14.05	− 0.04		14.06	− 0.03		
29	14.27	+ 0.18		14.29	+ 0.20		
30	13.95	− 0.14	+ 0.02	13.90	− 0.19	+ 0.01	4
31	14.02	− 0.07		13.97	− 0.12		
32	14.24	+ 0.15		14.20	+ 0.11		
33	14.03	− 0.06		13.94	− 0.15		
34	14.24	+ 0.15		14.14	+ 0.05		
35	14.04	− 0.05		13.98	− 0.11		
36	14.08	− 0.01		14.06	− 0.03		
37	14.29	+ 0.20		14.26	+ 0.17		
38	14.04	− 0.05		14.10	+ 0.01		
39	14.02	− 0.07		14.06	− 0.03		
40	14.09	0.00		14.13	+ 0.14		
41	14.31	+ 0.22		14.36	+ 0.27		
42	13.98	− 0.11		13.97	− 0.12		
43	14.19	+ 0.10		14.17	+ 0.08		
44	14.07	− 0.02	− 0.01	14.12	+ 0.03	0.00	5
45	13.95	− 0.14		14.07	− 0.02		
46	13.95	− 0.14		13.88	− 0.21		
47	14.16	+ 0.07		14.08	− 0.01		
48	14.05	− 0.04		14.00	− 0.09		
49	14.10	+ 0.01		14.12	+ 0.03		

	B	v	Mittel	C	v	Mittel	Zahl der Abstände
50	6914.02	−0″.07		6914.04	−0.05		
51	14.23	+0.14		14.24	+0.15		
52	14.11	+0.02	−0.02	14.19	+0.10	0.00	6
53	14.00	−0.09		14.03	−0.06		
54	13.97	−0.12		13.94	−0.15		
55	14.04	−0.05		14.10	+0.01		7
Mittel	6914.09			6914.09			

Mittelwerte $\frac{\Sigma v}{\Sigma z}$ wie Oben



Nr.	B	C
2— 7	−0″.01	+0″.01
8—22	0.00	+0.01
23—38	+0.02	+0.01
39—49	−0.01	0.00
50—54	−0.02	0.00

Aus den Werthen $\frac{\Sigma v}{\Sigma z}$ ersieht man, dass die Darstellung der Gleichungen nach beiden Verfahren nämlich durch die Curve B und nach dem Ausdruck $y = p + qx + rx^2$ gleich günstig ist; da aber die erstere den Vorzug besitzt, dass die Curve durch die beiden Abscissenpunkte 0 und 7200 hindurchgeht und dass daher einer bei Null belegenen Abstandsmessung auch die Correction Null zufällt, während nach dem Ausdruck C dafür die Correction +0″.31 entsteht, so kann es wohl keinem Zweifel unterliegen, dass man sich der ersteren Correctionstabelle bedienen wird.

Freilich wird der Werth der auf diese Weise erhaltenen Correctionen wieder durch den Umstand abgeschwächt, dass die grösste gemessene Distanz, nämlich die unmittelbare Messung zwischen den Endsternen 1 und 8 dadurch eine unerwartet grosse Verbesserung von −0″.23 erhält, aber dieser Umstand kann auf die Entscheidung zwischen den Tabellen B und C nicht von Einfluss sein, weil nach C die Correction von ähnlichem Betrage und sogar noch etwas grösser ausfällt, nämlich −0″.31. Wenn nun auch durch die Correctionstabelle B ein grosser Theil der inneren Widersprüche der Distanzmessungen beseitigt ist, so bleiben aus dem erwähnten Grunde doch noch Zweifel übrig. So lange nicht weitere Aufklärungen über diese räthselhafte Angelegenheit vorhanden sind, sind die Distanzmessungen wohl nach der Tabelle B zu verbessern.

Verbesserungs-Tabelle B nach der früheren Form I und der berichtigten Form II.

	I	II		I	II
0"	0".00	0".00	3700"	+ 0".03	— 0".07
100	+ 0.17	+ 0.15	3800	+ 0.03	— 0.07
200	+ 0.21	+ 0.22	3900	+ 0.03	— 0.07
300	+ 0.22	+ 0.2[illegible]	4000	+ 0.03	— 0.08
400	+ 0.23	+ 0.25	4100	+ 0.03	— 0.08
500	+ 0.23	+ 0.25	4200	+ 0.03	— 0.10
600	+ 0.22	+ 0.23	4300	+ 0.02	— 0.12
700	+ 0.20	+ 0.22	4400	+ 0.02	— 0.13
800	+ 0.17	+ 0.20	4500	+ 0.02	— 0.14
900	+ 0.15	+ 0.18	4600	+ 0.01	— 0.16
1000	+ 0.13	+ 0.15	4700	0.00	— 0.17
1100	+ 0.12	+ 0.13	4800	0.00	— 0.18
1200	+ 0.11	+ 0.12	4900	— 0.01	— 0.20
1300	+ 0.11	+ 0.12	5000	— 0.02	— 0.22
1400	+ 0.10	+ 0.11	5100	— 0.03	— 0.22
1500	+ 0.10	+ 0.10	5200	— 0.04	— 0.23
1600	+ 0.10	+ 0.10	5300	— 0.05	— 0.25
1700	+ 0.11	+ 0.09	5400	— 0.06	— 0.26
1800	+ 0.12	+ 0.08	5500	— 0.07	— 0.27
1900	+ 0.12	+ 0.08	5600	— 0.08	— 0.27
2000	+ 0.12	+ 0.08	5700	— 0.10	— 0.28
2100	+ 0.11	+ 0.07	5800	— 0.12	— 0.29
2200	+ 0.09	+ 0.05	5900	— 0.13	— 0.29
2300	+ 0.08	+ 0.03	6000	— 0.15	— 0.30
2400	+ 0.07	0.00	6100	— 0.17	— 0.30
2500	+ 0.04	— 0.04	6200	— 0.19	— 0.31
2600	0.00	— 0.07	6300	— 0.21	— 0.31
2700	— 0.03	— 0.09	6400	— 0.22	— 0.31
2800	— 0.05	— 0.11	6500	— 0.23	— 0.30
2900	— 0.05	— 0.12	6600	— 0.25	— 0.30
3000	— 0.05	— 0.11	6700	— 0.25	— 0.28
3100	— 0.05	— 0.11	6800	— 0.24	— 0.27
3200	— 0.04	— 0.10	6900	— 0.23	— 0.23
3300	— 0.02	— 0.08	7000	— 0.19	— 0.17
3400	0.00	— 0.08	7100	— 0.13	— 0.10
3500	+ 0.02	— 0.07	7200	0.00	0.00
3600	+ 0.03	— 0.07			

Die neue Curve II hat der älteren I gegenüber den Vorzug, dass die kleine Anschwellung bei 4000 einem gleichmässigeren Verlaufe Platz gemacht hat.

Um weitere Aufklärung über das Vorhandensein solcher systematischer Correctionen bei anderen Beobachtern und für andere Heliometer zu erhalten, habe ich vor einigen Jahren eine Aufforderung zur Betheiligung an den Messungen des Löwenbogens ergehen lassen. Indem ich mir vorbehalte auf diesen Gegenstand noch wieder zurückzukommen, wenn das gesammte Beobachtungsmaterial vorhanden ist, stelle ich hier die bis jetzt bekannt gemachten Beobachtungen in Göttingen und Leipzig zusammen, und zwar sind die Distanzen der Grösse nach geordnet, und wie bisher auf die Verbindungslinie der Endsterne projicirt.

Abstand	Sterne		Schur (A. N. 3399)	Ambronn (A. N. 3460)	Peter (A. N. 3534)	$S-A$	$P-S$	$P-A$
XXVI	6	7	316.39	316.70	316.57	− 0.31	+ 0.18	− 0.13
XXVIII	7	8	371.06	370.98	371.23	+ 0.08	+ 0.17	+ 0.25
XXIII	5	6	385.97	386.03	386.17	− 0.06	+ 0.20	+ 0.14
XIX	4	5	656.16	656.45	656.31	− 0.29	+ 0.15	− 0.14
XXVII	6	8	687.70	687.86	687.74	− 0.16	+ 0.04	− 0.12
XXIV	5	7	702.82	702.94	702.04	− 0.12	+ 0.12	0.00
VIII	2	3	813 19	813.21	813.26	− 0.02	+ 0.07	+ 0.05
XX	4	6	1042.53	1042.58	1042.56	− 0.05	+ 0.03	− 0.02
XXV	5	8	1074.00	1073.77	1073.97	+ 0.23	− 0.03	+ 0.20
XIV	3	4	1228.22	1228.35	1228.37	− 0.13	+ 0.15	+ 0.02
XXI	4	7	1359.39	1359.33	1359.36	+ 0.06	− 0.03	+ 0.03
XXII	4	8	1730.52	1730.80	1730.37	− 0.28	− 0.15	− 0.43
XV	3	5	1884.72	1884.79	1884.76	− 0.07	+ 0.04	− 0.03
IX	3	4	2041.61	2041.83	2041.75	− 0.22	+ 0.14	− 0.08
XVI	3	6	2271.01	2271.08	2271.16	− 0.07	+ 0.15	+ 0.08
XVII	3	7	2587.85	2588.12	2587.75	− 0.27	− 0.10	− 0.37
X	2	5	2698.11	2698.50	2698.20	− 0.39	+ 0.09	− 0.30
XVIII	3	8	2959.08	2959.04	2959.03	+ 0.04	− 0.05	− 0.01
XI	2	6	3084.50	3084.21	3084.36	+ 0.29	− 0.14	+ 0.15
I	1	2	3141.88	3142.16	3142.02	− 0.28	+ 0.14	− 0.14
XII	2	7	3401.09	3401.17	3401.13	− 0.08	+ 0.04	− 0.04
XIII	2	8	3772.40	3772.66	3771.92	− 0.26	− 0.48	− 0.74
II	1	3	3055.17	3955.45	3955.03	− 0.28	− 0.14	− 0.42
III	1	4	5183.79	5184.38	5183.68	− 0.59	− 0.11	− 0.70
IV	1	5	5840.17	5840.58	5840.03	− 0.41	− 0.14	− 0.55
V	1	6	6226.31	6226.46	6226.32	− 0.15	+ 0.01	− 0.14
VI	1	7	6543.34	6543.23	6543.00	+ 0.11	− 0.34	− 0.23
VII	1	8	6914.11	6914.67	6913.99	− 0.56	− 0.12	− 0.68

Ans den Untersuchungen, die Dr. Peter über seine Messungen angestellt hat (Siehe Astr. Nachr. Nr. 3534) geht hervor, dass dieselben frei von systematischen Fehlern sind, und ich habe mich durch eigenes Nachrechnen davon überzeugt, dass die Oben erwähnten 55 Summen nahezu dieselben Beträge geben. Im Vergleich damit geben die Göttinger Messungen nebenstehende Verbesserungen $P-S$ und $P-A$.

Vereinigt man die Einzelwerthe wieder nach Gruppen, so erhält man

	Mittl. Abstand	$S-A$	Correction für S	Correction für A
0	0″			
(1)	360	− 0.10	+ 0.18	+ 0.09
(2)	715	− 0.15	+ 0.10	− 0.05
(3)	1176	+ 0.03	+ 0.03	+ 0.06
(4)	1982	− 0.16	+ 0.05	− 0.12
(5)	2894	− 0.12	− 0.01	− 0.13
(6)	3720	− 0.21	− 0.19	− 0.40
(7)	5750	− 0.38	− 0.08	− 0.46
(8)	6728	− 0.23	− 0.23	− 0.46
0	7200			

Für meine Distanzmessungen hat man also die Verbesserungen

Mittl. Abstand	nach eigenen Messungen (*a*)	im Vergleich mit Peter (*b*)	Unterschied (*a*) — (*b*)
360″	+ 0″25	+ 0″18	+ 0″07
715	+ 0.21	+ 0.10	+ 0.11
1176	+ 0.13	+ 0.03	+ 0.10
1982	+ 0.07	+ 0.05	+ 0.02
2894	— 0.11	— 0.01	— 0.10
3720	— 0.06	— 0.19	+ 0.13
5750	— 0.29	— 0.08	— 0.21
6728	— 0.29	— 0.23	— 0.06

Aus dem Unterschied (*a*) — (*b*) geht hervor, dass die von mir angewandte Verbesserungs-Curve im Wesentlichen bestätigt wird, wenn auch die Darstellung nicht durchweg befriedigend ist.

Ein weiteres Eingehen auf diese Angelegenheit muss einstweilen noch hinausgeschoben werden, bis das Ergebniss der noch in Aussicht stehenden anderweitigen Messungen in Bamberg und Wien usw. vorliegt.

Abänderung des bisher für das Repsold'sche Heliometer angenommenen Werthes eines Theiles der Objectivscalen, wenn die aus den Beobachtungen des Löwenbogens hervorgehenden systematischen Correctionen der Distanzmessungen berücksichtigt werden.

Der Zahlenwerth zur Verwandlung der Ablesungen der Objectivscalen in Bogensecunden beruht auf Beobachtungen des Cygnus- und Hydrakreises, des Polbogens und der Standard stars for Victoria. Dabei wurde der Verwandlungslogarithmus als constant über die ganze Ausdehnung der Objectivverschiebung angenommen.

Bringt man jedoch die aus den Beobachtungen des Löwenbogens folgenden systematischen Correctionen nach der Tabelle B II (Seite 40) in Rechnung, so erfahren die auf Seite 66—91 der Praesepe-Abhandlung für meine Messungen angestellten Rechnungen nachstehende Abänderungen, wenn 0.01 x des Scalenwerthes 40″01658 ist. (Vergl. IV S. 82).

1) Cygnuskreis.

	Meridiankreis	Heliometer		$n = M - H$			v_1	v_2	$v_1 - v_2$
1	2364″92	2364″97	+ 0″01	— 0″06 =	+ 0.59 x +	0.35 y	— 0″02	— 0″10	+ 0″08
2	1915.27	1915.21	+ 0.08	— 0.02	0.48	0.23	+ 0.02	— 0.05	+ 0.07
3	2198.74	2198.68	+ 0.05	+ 0.01	0.55	0.30	+ 0.05	— 0.03	+ 0.08
4	1866.24	1866.05	+ 0.08	+ 0.11	0.47	0.22	+ 0.15	+ 0.08	+ 0.07
5	2262.62	2262.83	+ 0.04	— 0.25	0.57	0.32	— 0.21	— 0.29	+ 0.08
6	4279.50	4279.65	— 0.11	— 0.04	1.07	1.14	— 0.07	— 0.12	+ 0.05
7	4083 02	4083.08	— 0.08	+ 0.02	1.02	1.04	0.00	— 0.05	+ 0.05
8	4064.78	4064.62	— 0.08	+ 0.24	1.02	1.04	+ 0.22	+ 0.17	+ 0.05
9	4122.44	4122.64	— 0.08	— 0.12	1.03	1.06	— 0.14	— 0.19	+ 0.05
10	6441.07	6441.23	— 0.31	+ 0.15	1.61	2.59	— 0.07	+ 0.04	— 0.11
11	5937.79	5937.78	— 0.29	+ 0.30	1.48	2.19	+ 0.15	+ 0.19	— 0.04
12	6316.53	6316.67	— 0.31	+ 0.17	1.58	2.50	— 0.04	+ 0.06	— 0.10

Endgleichungen:

$$+0\overset{''}{.}92 = +12.98\,x + 16.57\,y$$
$$+1.49 = +16.57\,x + 22.75\,y$$

$$x = -0\overset{''}{.}186 \pm 0\overset{''}{.}093$$
$$y = +0.201 \pm 0.070$$

Summe der Fehlerquadrate $[v_1 v_1] =$ 0.1718

Mittlerer Fehler einer Gleichung $= \pm 0\overset{''}{.}131$

und man erhält den Ausdruck für die Verwandlung in Bogensecunden

$$\Delta = 40\overset{''}{.}01472\,s + 0\overset{''}{.}0000201\,s^2$$

w. F. $\pm 0.00093 \quad \pm 0.0000070$

Dagegen erhält man ohne Anwendung eines quadratischen Gliedes

$$x = +0\overset{''}{.}071 \pm 0\overset{''}{.}025$$

Summe der Fehlerquadrate $[v_2 v_2] =$ 0.2271

Mittlerer Fehler einer Gleichung $= \pm 0\overset{''}{.}144$

und die Verwandlung in Bogensecunden

$$\Delta = 40\overset{''}{.}01729\,s \pm 0\overset{''}{.}00025$$

2) Hydrakreis.

	Meridiankreis	Heliometer		n		x	y	v_1	v_2
1	2399.24	2399.47	+ 0.00	− 0.23	=	+ 0.60 x	+ 0.36 y	− 0.34	− 0.21
2	2118.52	2118.27	+ 0.07	+ 0.18		0.53	0.28	+ 0.07	+ 0.20
3	2197.56	2197.84	+ 0.05	− 0.33		0.55	0.30	− 0.44	− 0.31
4	3101.17	3100.88	− 0.11	+ 0.40		0.77	0.59	+ 0.29	+ 0.43
5	1905.67	1905.80	+ 0.08	− 0.21		0.48	0.23	− 0.32	− 0.19
6	4483.56	4483.79	− 0.14	− 0.09		1.12	1.25	− 0.13	− 0.05
7	4312.26	4312.36	− 0.12	+ 0.02		1.08	1.17	− 0.03	+ 0.06
8	5269.34	5269.34	− 0.24	+ 0.24		1.32	1.74	+ 0.27	+ 0.28
9	4904.60	4904.40	− 0.20	+ 0.40		1.23	1.51	+ 0.40	+ 0.44
10	6679.48	6680.25	− 0.28	− 0.49		1.67	2.79	− 0.27	− 0.43
11	7099.78	7100.15	− 0.10	− 0.27		1.77	3.13	+ 0.01	− 0.21

Endgleichungen:

$$-0\overset{''}{.}48 = +13.35\,x + 18.12\,y$$
$$-1.22 = +18.12\,x + 26.49\,y$$

$$x = +0\overset{''}{.}366 \pm 0\overset{''}{.}197$$
$$y = -0.296 \pm 0.149$$

Summe der Fehlerquadrate $[v_1 v_1] =$ 0.8243

Mittlerer Fehler einer Gleichung $= \pm 0\overset{''}{.}303$

Ausdruck für die Verwandlung in Bogensecunden

$$\Delta = 40\overset{''}{.}02024\,s - 0\overset{''}{.}0000296\,s^2$$
$$\pm 0.00197 \quad \pm 0.0000149$$

Dagegen erhält man ohne Anwendung eines quadratischen Gliedes

$$x = -0\overset{''}{.}036 \pm 0\overset{''}{.}062$$

Mittlerer Fehler einer Gleichung $= \pm 0\overset{''}{.}337$
Summe der Fehlerquadrate $[v_2 v_2] =$ 0.9083

und die Verwandlung in Bogensecunden

$$\varDelta = 40\overset{''}{.}01622\, s \pm 0\overset{''}{.}00062$$

3) Polbogen. 1891.37 (Vergl. IV S. 89)

Messung	$169\overset{s}{.}4381$
syst. Corr.	-0.0067
	$169.4314 = 6780\overset{''}{.}04$ (Rechenfehler verbessert)

$$\varDelta = 40\overset{''}{.}01644$$

4) Standard stars for Victoria.

Messung	161.3420
syst. Corr.	-0.0075
	$161.3345 = 6456\overset{''}{.}50$ (Vergl. IV S. 89)

Man hat also, wenn man von der Anwendung eines quadratischen Gliedes absieht, den für meine Beobachtungen anzuwendenden Scalenwerth:

Cygnuskreis	**40.01729**
Hydrakreis	**40.01622**
Polbogen	**40.01644**
Standard stars	**40.01934**

und wenn man wieder das einfache Mittel aus diesen vier Bestimmungen nimmt so ist

der Werth eines Scalentheils $40\overset{''}{.}01732$ log 1.602248

Es unterliegt keinem Zweifel, dass von diesen vier Werthen der erste, aus dem Cygnuskreis hergeleitete der zuverlässigste ist, denn die Zahl der verwandten Heliometerbeobachtungen ist hier bei Weitem am grössten ebenso wie die Zahl der Meridianbeobachtungen, die Sterne stehen gegenüber dem Hydrakreise hoch am Himmel und lassen sich aus diesem Grunde genauer beobachten und die Folge ist ein viel besserer Anschluss der Meridian- und Heliometer-Beobachtungen und erhebliche geringere wahrscheinliche Fehler in den Coëfficienten. Der Oben angenommene Mittelwerth $40\overset{''}{.}01732$ würde daher schon durch die Cygnusbeobachtungen allein genügend bestätigt werden.

Die Annahme in der Praesepe-Abhandlung war

$40\overset{''}{.}01605$ log 1.602234

Der Unterschied von 0″.00127 im Scalenwerth bringt für die grösste überhaupt messbare Distanz von 180 Scalentheilen oder 7200 Secunden nur eine Vergrösserung von 0″.23 hervor, die aber bei Benutzung der Correctionstabelle B bei grossen Distanzen wieder um einen ähnlichen Betrag aufgehoben wird.

Es ist noch zu untersuchen, welche Aenderungen die Einführung der aus dem Löwenbogen abgeleiteten systematischen Correctionen und der soeben abgeleiteten Verbesserung des früher angenommenen Scalenwerthes auf die Dimensionen des grossen Vierecks ausübt, welches der Triangulation der Praesepegruppe zu Grunde liegt.

In nachfolgender Tabelle sind die beiden Diagonalen und die vier Seitenlinien des Vierecks mit den systematischen Correctionen nach Tabelle B II und die obige Verbesserung des Scalenwerthes, nämlich + 0″.00127 berechnet (Vrgl. Praesepe S. 151).

Sterne			Syst. Corr.	Corr. für Scalenwerth	Summe
23.41	$118^{s}.3317$ =	4735″.17	− 0″.17	+ 0″.16	− 0″.01
21.36	105.2992	4213.67	− 0.10	+ 0.13	+ 0.03
23.21	74.8940	2996.96	− 0.11	+ 0.10	− 0.01
21.41	81.7597	3271.70	− 0.09	+ 0.11	+ 0.02
41.36	74.1477	2967.09	− 0.11	+ 0.10	− 0.01
36.23	85.5081	3421.70	− 0.08	+ 0.11	+ 0.03

also im Ganzen für 21606″.29 eine Correction von + 0″.05 oder für die beiden Diagonalen + 0″.01. Die Lage der von der Mitte der Gruppe am weitesten entfernten Sterne würde also dadurch nur verschwindend kleine Veränderungen erleiden, und es ist daher das Resultat der Praesepe-Triangulation als das endgültige zu betrachten, so weit die Dimensionen in Betracht kommen und in Anbetracht der riesigen auf die Ausgleichung verwandten Zeit würde es sich auch nicht verlohnen nachträglich noch die neuen systematischen Fehler aus dem Löwenbogen an Stelle der früher angewandten zu setzen.

In Zukunft werde ich mich wie bemerkt der neuen Verbesserungstabelle B II dieser Abhandlung (Seite 40) und des obigen Scalenwerthes bedienen, so lange nicht die Behandlung der systematischen Correction einer begründeten Aenderung bedarf.

Reduction der Positionswinkel-Messungen.

Aufstellungsfehler des Aequatoreals. Gleichungen für Collimationsfehler des Fernrohrs C, Neigung der Axe i und Biegung der Declinationsaxe α.

In den Astronom. Mitthlgg. IV Seite 97 findet man die Gleichungen zur Bestimmung dieser Grössen für den Zeitraum 1890 Febr. 12 bis 1892 März 21. Die seitdem noch hinzugekommenen Gleichungen sind die nachfolgenden

						s				
24	1893	Apr.	27	δ Virg.		-2.60	=	C	$-0.070\,i_1$	$-0.997\,\alpha\cos\varphi$
25				α Urs. min.	U.	-4.12		C	-1.000	$+0.022$
26		Dec.	18	α Urs. min.	O.	-3.67		C	-1.000	-0.022
27				67 Ceti		-2.00		C	$+0.120$	-0.993
28	1894	Juni	29	δ Urs. min.	O.	-4.13		C	-0.998	-0.059
29				ϑ Serp.		-2.70		C	-0.071	-0.997
30		Dec.	12	α Urs. min.	O.	-4.23		C	-1.000	-0.022
31				67 Ceti		-1.90		C	$+0.120$	-0.993
32	1895	Mai	30	α Urs. min.	U.	-4.01		C	-1.000	$+0.022$
33				τ Virg.		-2.75		C	-0.036	-0.999
34	1896	Jan.	10	α Urs. min.	O.	-3.64		C	-1.000	-0.022
35				ξ^2 Ceti		-2.57		C	-0.139	-0.990
36		Juli	21	δ Urs. min.	O.	-4.41		C	-0.998	-0.059
37				ϑ Serp. pr.		-2.39		C	-0.071	-0.997
38	1897	Jan.	6	α Urs. min	O.	-4.23		C	-1.000	-0.022
39				α Arietis		-4.08		C	-0.390	-0.921
40		Mai	29	α Urs. min.	U.	-4.43		C	-1.000	$+0.022$
41				ε Serp.		-3.10		C	-0.084	-0.996
42	1898	März	11	λ Urs. min.	U.	-3.33		C	-1.000	$+0.018$
43				Glasgow 713		-3.65		C	-0.160	-0.987
44		Juli	14	η Serp.		-2.55		C	$+0.051$	-0.999
45				51 Ceph.	U.	-3.87		C	-0.999	$+0.048$
46	1899	Febr.	4	δ Urs. min.	U.	-3.93		C	-0.998	$+0.059$
47				ϑ Can. maj.		-0.90		C	$+0.206$	-0.978
48		Juni	28	β Herc.		-3.72		C	-0.370	-0.929
49				ε Urs. min.	O.	-4.56		C	-0.991	-0.135

Nach der M. d. kl. Qdr. ergeben sich aus diesen Gleichungen die Endgleichungen

$$\begin{array}{rrrr} -150\overset{s}{.}17 = & +49.000\,C & -24.351\,i_1 & -20.242\,\alpha\cos\varphi \\ +92.044 & -24.351 & +22.136 & +0.550 \\ +52.394 & -20.242 & +0.550 & +20.560 \end{array}$$

und daraus

Collimationsfehler des Fernrohrs $C = -0\overset{s}{.}297 = -0\overset{\prime}{.}074$

Biegung der Declinationsaxe $\alpha = +0\overset{\prime}{.}866$

Neigung der Declinationsaxe gegen die Stundenaxe $\left.\right\}$ $i = i_1 - \alpha\sin\varphi = +0\overset{\prime}{.}944 - 0\overset{\prime}{.}834 = +0\overset{\prime}{.}110$

Setzt man diese Grössen wieder in die einzelnen Gleichungen ein, so ergiebt sich der übrigbleibende Fehler für einen Stern, auf den grössten Kreis reducirt,

im Mittel zu $0^s.26$ und da eine Gleichung immer aus den Einstellungen des Fernrohrs auf einen Stern in vier verschiedenen Lagen, nämlich bei Axe voran und Axe folgt und Drehung des Fernrohrs um seine Axe um 180 Grad hervorgeht, so ist der Beobachtungsfehler bei einer einzelnen Einstellung auf den Himmel mit Einschluss der aus den Schlotterungen der Axen hervorgehenden Schwankungen auf $0^s.5$ zu veranschlagen.

Gleichungen für die Abweichungen x und y der Stundenaxe vom Pol in der Ebene des Meridians und für die Biegung des Fernrohrs bei horizontaler Lage.

In IV Seite 98 finden sich diese Gleichungen von 1889 August 18 bis 1892 März 21 und es hatte sich bis dahin herausgestellt, dass die Neigung der Stundenaxe gegen den Horizont sich in den ersten Jahren allmählig etwas geändert hatte, weil die bei dem Umbau der Sternwarte im Jahre 1888 zur Verstärkung des Gewölbes aufgetragene Betonschicht ihr Gefüge offenbar noch etwas änderte. (Siehe Zeichnung des Mittelbaues der Sternwarte in Astr. Mittheilgg. 5. Theil.)

Ueber die Aufstellung des Instruments ergiebt sich in dieser Beziehung jetzt eine Uebersicht über einen Zeitraum von mehr als zehn Jahren, nämlich

1	1889	Aug.	18	λ Urs. min. O.C.	− 0.57	=	+ 1.00 x	+ 0.61 β
2				α Cygni	− 0.34		+ 1.00	− 0.12
3				δ Capr.	− 0.14		+ 1.00	− 0.93
4		Oct.	16	δ Piscium	− 0.28		+ 1.00	− 0.70
5				α Urs. min. O.C.	− 0.55		+ 1.00	+ 0.60
6	1890	Febr.	12	β Can. min.	− 0.11		+ 1.00	− 0.68
7				λ Urs. min. U.C.	− 0.43		+ 1.00	+ 0.64
8		Mai	16	α Urs. min. U.C.	− 0.34		+ 1.00	+ 0.64
9				τ Virg.	− 0.18		+ 1.00	− 0.76
10		Nov.	16	α Urs. min. O.C.	− 0.38		+ 1.00	+ 0.60
11				67 Ceti	+ 0.04		+ 1.00	− 0.85
12	1891	Apr.	25	δ Virg.	+ 0.08		+ 1.00	− 0.74
13				α Urs. min. U.C.	− 0.32		+ 1.00	+ 0.64
14				6 Persei	− 0.37		+ 1.00	+ 0.98
15				γ Scorpii	+ 0.30		+ 1.00	− 0.97
16		Dec.	21	ε Urs. maj. U.C.	− 0.09		+ 1.00	+ 0.95
17				α Urs. min. O.C.	+ 0.11		+ 1.00	+ 0.60
18				ξ² Ceti	+ 0.35		+ 1.00	− 0.69
19				12 Eridani	+ 0.37		+ 1.00	− 0.99
20		Dec.	23	β Drac. U.C.	− 0.13		+ 1.00	+ 0.97
21				δ Urs. min. U.C.	− 0.17		+ 1.00	+ 0.67
22				ξ¹ Can. maj.	− 0.18		+ 1.00	− 0.96
23				ξ Gem.	+ 0.27		+ 1.00	− 0.51
24	1892	März	21	λ Urs. min. U.C.	− 0.06		+ 1.00	+ 0.64
25				β Cancri	+ 0.33		+ 1.00	− 0.67
26	1893	Apr.	27	δ Virg.	+ 0.56		+ 1.00	− 0.74
27				α Urs. min. U.	+ 0.13		+ 1.00	+ 0.64
28		Dec.	18	α Urs. min. O.	+ 0.24		+ 1.00	+ 0.60
29				67 Ceti	+ 0.41		+ 1.00	− 0.85
30	1894	Juni	29	δ Urs. min. O.	+ 0.10		+ 1.00	+ 0.57
31				ϑ Serp.	+ 0.60		+ 1.00	− 0.74
32		Dec.	12	α Urs. min. O.	+ 0.16		+ 1.00	+ 0.60
33				67 Ceti	+ 0.57		+ 1.00	− 0.85
34	1895	Mai	30	α Urs. min. U.	+ 0.21		+ 1.00	+ 0.64
35				τ Virg.	+ 0.59		+ 1.00	− 0.76
36	1896	Jan.	10	α Urs. min. O.	+ 0.21		+ 1.00	+ 0.60
37				ξ² Ceti	+ 0.80		+ 1.00	− 0.69

38	1896	Juli	21	δ Urs. min.	O.	+ 0.18	= + 1.00 x	+ 0.57 β
39				ϑ Serp.		+ 0.51	+ 1.00	− 0.74
40	1897	Jan.	6	α Urs. min.	O.	+ 0.17	+ 1.00	+ 0.60
41				α Arietis		+ 1.00	+ 1.00	− 0.38
42		Mai	29	α Urs. min.	U.	+ 0.20	+ 1.00	+ 0.64
43				ε Serp.		+ 0.59	+ 1.00	− 0.73
44	1898	März	11	λ Urs. min.	U.	+ 0.14	+ 1.00	+ 0.64
45				Glasgow		+ 0.73	+ 1.00	− 0.67
46		Juli	14	η Serp.		+ 0.60	+ 1.00	− 0.81
47				51 Ceph.	U.	+ 0.34	+ 1.00	+ 0.66
48	1899	Febr.	4	δ Urs. min.	U.	+ 0.29	+ 1.00	+ 0.67
49				ϑ Can.		+ 0.69	+ 1.00	− 0.89
50		Juni	28	β Herc.		+ 0.41	+ 1.00	− 0.50
51				ε Urs. min.	O.	+ 0.20	+ 1.00	+ 0.51

Da x offenbar mit der Zeit veränderlich war, so kann es nicht nach der M. d. kl. Qdr. als Constante aus den Gleichungen abgeleitet werden, sondern es ist auf die Veränderlichkeit Rücksicht zu nehmen. Zu diesem Zwecke ist für die Grösse x für die einzelnen Beobachtungstage ein angenährter Mittelwerth von den absoluten Gliedern n zur Linken in Abrechnung gebracht worden. Die auf diese Weise übrigbleibenden Werthe $n - x$ bilden dann die n Glieder der Gleichungen zur Bestimmung der Biegung β.

Man erhält auf diese Weise die Endgleichung

$$-6.98 = +25.896\ \beta$$

oder

$$\beta = -0.27$$

Zieht man noch die bei den Aufstellungsbeobachtungen ausgeführten Durchgänge der Sterne durch den Meridian des Instruments hinzu, die eine Bestimmung für die Abweichung y der Stundenaxe vom Pol senkrecht zum Meridian geben, so erhält man nachfolgende Uebersicht über die Abweichung der Stundenaxe vom Pol:

			x	y
1888	Oct.	19	+ 2.0	− 3.6
89	Mai	13	− 4.3	− 1.36
	Juni	7	− 2.0	− 1.17
	Juni	13	− 0.47	− 1.07
	Aug.	18	− 0.39	− 1.23
	Oct.	16	− 0.43	
90	Febr.	12	− 0.28	− 1.33
	Mai	16	− 0.28	− 1.40
	Nov.	16	− 0.21	− 1.24
91	Apr.	25	− 0.08	− 1.42
	Dec.	22	+ 0.07	− 1.35
92	März	21	+ 0.14	− 1.38
93	Apr.	27	+ 0.34	− 1.40
	Dec.	18	+ 0.29	− 1.27
94	Juni	29	+ 0.33	− 1.27
	Dec.	12	+ 0.33	− 1.43
95	Mai	30	+ 0.39	− 1.45
96	Jan.	10	+ 0.50	− 1.23
	Juli	21	+ 0.33	− 1.49
97	Jan.	6	+ 0.62	− 1.67
	Mai	29	+ 0.39	− 1.40
98	März	11	+ 0.43	− 1.49
	Juli	14	+ 0.45	− 1.35
99	Febr.	4	+ 0.47	− 1.40
	Juni	28	+ 0.30	− 1.37

							Angenommene Mittelwerthe x	Angenommene Mittelwerthe y
1889	Juni	13 —			Aug.	18	− 0.43	− 1.15
	Aug.	18 —			Oct.	16	− 0.41	− 1.23
	Oct.	17 —	1890		Febr.	12	− 0.36	− 1.28
90	Febr.	12 —			Mai	16	− 0.28	− 1.37
	Mai	16 —			Nov.	16	− 0.25	− 1.32
	Nov.	16 —	91		Apr.	25	− 0.15	− 1.33
91	Apr.	25 —			Dec.	22	0.00	− 1.38
	Dec.	22 —	92		März	21	+ 0.10	− 1.38
92	März	21 —	93		Apr.	27	+ 0.24	− 1.39
93	Apr.	27 —			Dec.	18	+ 0.32	− 1.34
	Dec.	18 —	94		Juni	29	+ 0.31	− 1.27
94	Juni	29 —			Dec.	12	+ 0.33	− 1.35
	Dec.	12 —	95		Mai	30	+ 0.36	− 1.44
95	Mai	30 —	96		Jan.	14	+ 0.45	− 1.34
96	Jan.	14 —			Juli	21	+ 0.42	− 1.36
	Juli	21 —	97		Jan.	6	+ 0.48	− 1.58
97	Jan.	6 —			Mai	29	+ 0.51	− 1.54
	Mai	29 —	98		März	11	+ 0.41	− 1.45
98	März	11 —			Juli	14	+ 0.44	− 1.42
	Juli	14 —	99		Febr.	4	+ 0.46	− 1.38
99	Febr.	4 —			Juni	28	+ 0.39	− 1.39

Für einen Zeitraum innerhalb zweier Bestimmungen der Instrumentalfehler ist ein Mittelwerth aus den beiden einschliessenden Werthen zur Reduction der Positionswinkel angenommen worden.

Um eine Vorstellung von der Bedeutung der Grösse x zu erhalten ist zu bemerken, dass die Höhe des gleichseitigen Dreiecks zwischen den Endpunkten des Dreifusses auf welchem das Heliometer steht 1,25 Meter beträgt, und dass daher 1′ Aenderung in x einer Höhenänderung des Südpunktes um 0,36 Millimeter entspricht. Im Laufe von zehn Jahren hat nach obiger Zusammenstellung das Südende des Dreifusses gegen die Verbindungslinie der beiden anderen Eckpunkte sich nahezu um diesen Betrag gehoben und von 1895 ab scheint Ruhe eingetreten zu sein. In der Richtung senkrecht zum Meridian dagegen ist nur eine ganz geringe Drehung angedeutet.

Es lässt sich aus der Uebersicht wohl der Schluss ziehen, dass man für die Zwischenzeiten die für die Reduction der Positionswinkel erforderlichen Aufstellungsfehler völlig sicher den Mittelwerthen je zweier aufeinanderfolgenden Bestimmungen entnehmen kann, wie in der obigen zur Rechten stehenden Tabelle.

Indexfehler des Positionskreises.

Der Indexfehler des Positionskreises wurde durch Messung des Positionswinkels zwischen Sternen von bekannten aus Meridianbeobachtungen abgeleiteten Oertern und zu Anfang auch wohl durch Einstellung des Fernrohrs auf das Fadenkreuz eines im Norden vom Heliometer aufgestellten horizontalen Collimators bei auseinandergeschraubten Objectivhälften bestimmt. Da jedoch diese Collimatorbeobachtungen wie schon früher bemerkt, den Indexfehler nur in einer Lage geben, die bei den Beobachtungen am Himmel selbst garnicht vorkommt und die Genauigkeit der Bestimmung durch Sternbeobachtungen erheblich grösser ist, sofern nur die Sternörter genügend bekannt sind, so ist der Indexfehler schon seit längeren Jahren ausschliesslich auf letztere Weise von mir bestimmt worden.

In den Astr. Mitthlgg. IV. Seite 101 findet man den Indexfehler bestimmt durch Messungen der beiden Linien cf und ad des bekannten Hydrakreises im Jahre 1892 und ferner durch die beiden „Standard stars for Victoria“ in den Jahren 1889 und 1890. Die Standard stars sind später nicht regelmässig beobachtet worden, dagegen die beiden langen Linien in der Hydra noch zu wiederholten Malen in den Jahren 1897 und 1899. Da bei den älteren Messungen nachträglich in der Annahme der Aufstellungsfehler noch kleine Aenderungen vorgenommen sind, so werden hier alle Beobachtungen von Anfang an noch einmal zusammengestellt.

Positionswinkel von Hydra cf.

Tag	Stern-zeit	Stunden-winkel	Axe	Bar.	Th.	Messung	λ	J	Rfr.	Aberr.	Posit.-Kreis Jahres-Anf.	Mittel	Tages-Mittel
	h m	h m		mm	°	° ′	′	′	′	′	° ′	′	′
1892 Febr. 21	8 8.4	−0 13	f	740	+0.5	159 52.65	+1.29	−1.12	+0.40	−0.04	159 53.18	53.37	53.37
	8 31.4	+0 10				339 52.92	+1.31	−1.12	+0.49	−0.04	53.56		
	8 54.4	+0 33	v			339 50.28	+1.30	+1.12	+0.58	−0.04	53.24	53.37	
	9 11.9	+0 51				159 50.48	+1.29	+1.12	+0.65	−0.04	53.50		
März 3	7 49.8	−0 32	f	751	−6	159 52.72	+1.27	−1.12	+0.34	−0.05	159 53.16	53.43	53.50
	8 12.8	−0 9				339 53.13	+1.30	−1.12	+0.43	−0.05	53.69		
	8 39.3	+0 18	v			339 50.55	+1.31	+1.12	+0.53	−0.05	53.46	53.57	
	8 56.3	+0 35				159 50.70	+1.30	+1.12	+0.60	−0.05	53.67		
9	8 12.8	−0 9	f	735	−2	339 52.70	+1.30	−1.12	+0.42	−0.05	159 53.25	53.16	53.13
	8 25.8	+0 4				159 52.48	+1.30	−1.12	+0.46	−0.05	53.07		
	8 42.3	+0 21	v			159 50.55	+1.31	+1.12	+0.53	−0.05	53.46	53.10	
	8 56.8	+0 35				339 49.78	+1.30	+1.12	+0.58	−0.05	52.73		
1897 Febr. 17	8 5.8	−0 16	f	760	−2	339 53.28	+1.34	−1.11	+0.40	−0.18	159 53.73	53.63	53.77
	8 23.8	+0 2				159 52.99	+1.35	−1.11	+0.47	−0.18	53.52		
	8 41.8	+0 20	v			159 51.25	+1.39	+1.11	+0.53	−0.18	54.10	53.91	
	9 1.3	+0 40				339 50.75	+1.41	+1.11	+0.62	−0.18	53.71		
März 17	7 49.6	−0 32	f	742	+8	339 53.48	+1.27	−1.11	+0.33	−0.20	53.77	53.68	53.70
	8 3.6	−0 18				159 53.20	+1.31	−1.11	+0.38	−0.20	53.58		
	8 32.1	+0 10	v			159 50.97	+1.37	+1.11	+0.48	−0.20	53.73	53.72	
	8 45.6	+0 21				339 50.67	+1.39	+1.11	+0.53	−0.20	53.70		
März 30	8 8.9	−0 13	f	738	+2	339 53.77	+1.33	−1.11	+0.40	−0.20	54.19	53.99	53.86
	8 20.4	−0 1				159 53.30	+1.35	−1.11	+0.44	−0.20	53.78		
	8 35.9	+0 14	v			159 51.07	+1.38	+1.11	+0.49	−0.20	53.85	53.73	
	8 53.9	+0 32				339 50.73	+1.40	+1.11	+0.56	−0.20	53.60		
1899 Febr. 21	7 20.7	−1 1	f	759	0	339 54.40	+1.21	−1.11	+0.28	−0.27	159 54.46	54.54	54.25
	7 37.2	−0 44				159 54.43	+1.27	−1.11	+0.29	−0.27	54.61		
	9 34.1	+1 12	v		−1	159 51.02	+1.45	+1.11	+0.76	−0.27	54.07	53.95	
	9 56.4	+1 15				339 50.77	+1.45	+1.11	+0.77	−0.27	53.83		
März 15	7 28.6	−0 53	f	756	+7	339 53.88	+1.22	−1.11	+0.25	−0.29	53.95	54.33	54.30
	7 47.6	−0 34				159 54.48	+1.30	−1.11	+0.32	−0.29	54.70		
	9 14.6	+0 53	v			159 51.62	+1.45	+1.11	+0.65	−0.29	54.54	54.27	
	9 32.1	+1 10			5	339 51.00	+1.45	+1.11	+0.73	−0.29	54.00		
März 18	8 28.0	−0 6	f	744	+1	159 53.92	+1.37	−1.11	+0.43	−0.29	54.32	54.42	54.29
	8 48.0	+0 26				339 53.93	+1.43	−1.11	+0.55	−0.29	54.51		
23	8 35.8	+0 14	v	743	−6	159 51.53	+1.41	+1.11	+0.51	−0.29	54.27	54.15	
	8 55.1	+0 34				339 51.18	+1.43	+1.11	+0.60	−0.29	54.03		

Positionswinkel von Hydra ad.

Tag	Stern-zeit	Stunden-winkel	Axe	Bar.	Th.	Messung	λ	J	Rfr.	Aberr.	Posit.-Kreis Jahres-Anf.	Mittel	Tages-Mittel
1892 März 4	7 52.9	−0 30	f	752	−6	163 53.50	+1.28	−1.12	+0.28	−0.05	163 53.89	54.09	54.09
	8 8.9	−0 14				343 53.80	+1.30	−1.12	+0.35	−0.05	54.28		
	8 35.9	+0 13	v			343 51.25	+1.31	+1.12	+0.48	−0.05	54.11	54.10	
	8 52.9	+0 30				163 51.15	+1.30	+1.12	+0.56	−0.05	54.08		
8	7 54.7	−0 28	f	743	−4	163 53.82	+1.28	−1.12	+0.28	−0.05	54.21	54.17	54.22
	8 12.2	−0 11				343 53.65	+1.29	−1.12	+0.36	−0.05	54.13		
	8 34.7	+0 12	v			343 51.42	+1.31	+1.12	+0.46	−0.05	54.26	54.26	
	8 51.2	+0 28				163 51.35	+1.30	+1.12	+0.54	−0.05	54.26		
19	8 8.2	−0 15	f	757	+3	163 53.52	+1.29	−1.12	+0.34	−0.05	53.98	54.03	54.00
	8 26.2	+0 3				343 53.53	+1.30	−1.12	+0.42	−0.05	54.08		
	8 46.7	+0 24	v			343 51.18	+1.31	+1.12	+0.51	−0.05	54.07	53.97	
	9 6.2	+0 43				163 50.88	+1.30	+1.12	+0.61	−0.05	53.86		

Tag			Sternzeit	Stundenwinkel	Axe	Bar.	Th.	Messung	λ	J	Rfr.	Aberr.	Posit.-Kreis Jahres-Anf.	Mittel	Tages-Mittel
			h m	h m		mm	°	° ′	′	′	′	′	° ′	′	′
1897	März	11	7 42.8	−0 41	f	750	+1	343 54.72	+1.25	−1.11	+0.22	−0.19	163 54.89	54.73	54.79
			8 2.9	−0 20				163 54.24	+1.31	−1.11	+0.32	−0.19	54.57		
			8 30.6	+0 7	v			163 52.23	+1.36	+1.11	+0.43	−0.19	54.94	54.85	
			8 52.8	+0 30				343 51.90	+1.40	+1.11	+0.54	−0.19	54.76		
		16	7 42.1	−0 41	f	743	+5	343 54.70	+1.25	−1.11	+0.22	−0.19	54.87	54.83	54.82
			7 58.6	−0 25				163 54.50	+1.30	−1.11	+0.29	−0.19	54.79		
			8 34.1	+0 11	v			163 52.07	+1.37	+1.11	+0.44	−0.19	54.80	54.82	
			8 49.6	+0 26				343 52.00	+1.40	+1.11	+0.51	−0.19	54.83		
	Apr.	3	7 57.4	−0 26	f	737	+2	343 54.80	+1.30	−1.11	+0.28	−0.20	55.07	54.95	54.83
			8 9.9	−0 13				163 54.48	+1.32	−1.11	+0.34	−0.20	54.83		
			8 28.9	+0 6	v			163 52.05	+1.36	+1.11	+0.42	−0.20	54.74	54.71	
			8 45.4	+0 22				343 51.88	+1.39	+1.11	+0.49	−0.20	54.67		
1899	Febr.	21	7 58.8	−0 24	f	759	0	163 55.02	+1.33	−1.11	+0.31	−0.26	55.29	55.01	55.05
			8 13.8	−0 9				343 54.37	+1.36	−1.11	+0.37	−0.26	54.73		
			8 54.4	+0 31	v		−1	343 52.25	+1.43	+1.11	+0.57	−0.26	55.10	55.08	
			9 8.4	+0 45				163 52.13	+1.44	+1.11	+0.64	−0.26	55.06		
	März	15	8 6.1	−0 17	f	756	+7	163 54.87	+1.35	−1.11	+0.33	−0.29	55.15	55.43	55.29
			8 20.6	−0 3				343 55.32	+1.38	−1.11	+0.40	−0.29	55.70		
			8 37.6	+0 14	v			343 52.27	+1.41	+1.11	+0.48	−0.29	54.98	55.15	
			8 55.6	+0 32			5	163 52.50	+1.43	+1.11	+0.56	−0.29	55.31		
		18	7 52.5	−0 31	f	744	+1	343 55.28	+1.31	−1.11	+0.28	−0.28	55.48	55.44	55.28
			8 9.0	−0 14				163 55.10	+1.35	−1.11	+0.34	−0.28	55.40		
		23	9 10.5	+0 47	v	743	−7	343 52.12	+1.44	+1.11	+0.65	−0.28	55.04	55.11	
			9 29.2	+1 6				163 52.15	+1.45	+1.11	+0.75	−0.28	55.18		

In dem Werke: A. Auwers, Die Venusdurchgänge 1874 und 1882, Fünfter Band, Seite 362 findet man die aus Meridianbeobachtungen abgeleiteten Oerter der vier Sterne folgendermaassen:

Aequinoctium und Epoche 1875			Praec. 1875	Säc. Var.	E. B.	Praec. 1875	Säc. Var.	E. B.
	h m s	° ′ ″	s	s	s	″	″	″
Hydra a	8 23 8.260	−0 32 42.03	+3.0620	−0.0041	−0.0022	−11.726	−0.359	−0.006
c	21 49.508	+0 39 23.05	+3.0847	−0.0044	−0.0021	−11.633	−0.364	−0.001
d	21 4.120	+1 14 13.22	+3.0958	−0.0046	+0.0101	−11.578	−0.365	+0.011
f	19 6.156	+2 30 27.64	+3.1204	−0.0049	−0.0029	−11.438	−0.371	−0.046

Aus diesen Daten erhält man

	1892.0	1897.0	1899.0
		Linie cf	
$\Delta\alpha$	−2m 42.759s	−2m 42.585s	−2m 42.516s
$\Delta\delta$	+1° 51′ 7.15″	+1° 51′ 7.91″	+1° 51′ 8.21″
$\frac{1}{2}(\delta' + \delta)$	+1 31 38.30	+1 30 40.15	+1 30 16.85
		Linie ad	
$\Delta\alpha$	−2m 3.357s	−2m 3.127s	−2m 3.035s
$\Delta\delta$	+1° 46′ 58.04″	+1° 46′ 58.86″	+1° 46′ 59.20″
$\frac{1}{2}(\delta' + \delta)$	+0 17 27.04	+0 16 28.44	+0 16 5.03

Darans folgen nach strenger Berechnung der sphärischen Dreiecke die Positionswinkel der Verbindnngslinien bezogen auf die Mittelpnnkte der Bogen

	1892.0	1897.0	1899.0	jährl. Aenderg.
cf	339° 53.′626	339° 54.′932	339° 55.′448	+ 0.′260
ad	343 55.061	343 56.815	343 57.321	+ 0.252

Zur Bestimmnng des Indexfehlers des Positionskreises hat man demnach folgende Vergleichungen

	Epoche	Pos.-Kreis	Pos.-W. aus Merid. Beobb.	Indexfehler
Hydra cf	1892.17	159° 53.′33	159° 53.′67	+ 0.′34
	97.20	53.78	54.98	+ 1.20
	99.19	54.28	55.50	+ 1.22
ad	1892.19	163 54.10	163 55.11	+ 1.01
	97.22	54.81	56.87	+ 2.06
	99.19	55.21	57.38	+ 2.17

Dazn kommen noch die frühere Bestimmnng des Indexfehlers ans zahlreichen Beobachtungen der „Standard stars for Victoria" bei Gelegenheit der Bestimmnng der Sonnenparallaxe in den Jahren 1889 und 1890 (Vergl. IV. Seite 102) nnd ferner Beobachtungen für den Indexfehler in den Jahren 1894 nnd 1899.

Die Oerter dieser Sterne findet man im Anfsatz:

> David Gill, On the definitive places of the stars nsed for comparison with the planet Victoria in the observations for parallax 1889. Astr. Nachr. Bd. 130 Seite 161.

Die Reduction der fernerhin erhaltenen Beobachtnngen ist in nachstehender Tabelle enthalten.

Positionswinkel-Messnngen der Standard stars.

Tag			Sternzeit	Stunden-Winkel	Axe	Bar.	Th.	Messung	λ	J	Refr.	Aberr. usw.	Pos.-Kreis Jahres-Anfang	Mittel	Tages-Mittel
			h m	h m		mm	°	° ′	′	′	′	′	° ′	′	′
1894	Juli	2	18 47.4	− 0 52	f	750	+ 22	97 9.00	+ 1.19	− 1.12	+ 0.59	+ 0.23	277 9.89	9.82	9.83
			19 13.4	− 0 26				277 8.97	+ 1.24	− 1.12	+ 0.42	+ 0.23	9.74		
			19 40.9	+ 0 1	v		+ 21	277 6.93	+ 1.30	+ 1.12	+ 0.25	+ 0.23	9.83	9.83	
			20 0.9	+ 0 21				97 7.02	+ 1.32	+ 1.12	+ 0.13	+ 0.23	9.82		
1899	Juli	10	19 34.3	− 0 5	f	750	+ 14	277 6.70	+ 1.38	− 1.12	+ 0.30	+ 0.29	277 7.55	7.50	7.09
			19 50.3	+ 0 11				97 6.67	+ 1.41	− 1.12	+ 0.20	+ 0.29	7.45		
			20 9.3	+ 0 30	v			97 3.55	+ 1.43	+ 1.12	+ 0.10	+ 0.29	6.49	6.68	
			20 31.3	+ 0 52				277 4.08	+ 1.43	+ 1.12	− 0.05	+ 0.29	6.87		
		12	18 14.5	− 1 26	f	746	+ 18	277 6.22	+ 1.19	− 1.12	+ 0.87	+ 0.29	277 7.45	7.28	7.23
			18 28.0	− 1 12				97 5.93	+ 1.23	− 1.12	+ 0.77	+ 0.29	7.10		
			18 49.5	− 0 51	v			97 3.83	+ 1.30	+ 1.12	+ 0.58	+ 0.29	7.12	7.18	
			19 6.5	− 0 34				277 4.03	+ 1.34	+ 1.12	+ 0.45	+ 0.29	7.23		

Tag			Stern-zeit	Stunden-Winkel	Axe	Bar.	Th.	Messung	i	J	Refr.	Aberr. usw.	Pos.-Kreis Jahres-Anfang	Mittel	Tages Mittel
1899	Juli	15	19ʰ 7ᵐ.6	−0ʰ 33ᵐ	f	752ᵐᵐ	+14°	277° 6′.30	+1′.34	−1′.12	+0′.48	+0′.30	277° 7′.30	7′.31	7′.11
			19 21.6	−0 19				97 6.42	+1.36	−1.12	+0.38	+0.30	7.32		
			19 40.6	0 0	v			97 3.87	+1.39	+1.12	+0.27	+0.30	6.95	6.91	
			19 56.6	+0 16				277 3.87	+1.41	+1.12	+0.17	+0.30	6.87		
		17	19 20.9	−0 20	f	748	+14	97 6.20	+1.36	−1.12	+0.40	+0.30	277 7.14	7.22	7.14
			19 38.9	−0 1				277 6.45	+1.39	−1.12	+0.27	+0.30	7.29		
			20 1.4	+0 21	v			277 3.80	+1.42	+1.12	+0.13	+0.30	6.77	7.06	
			20 17.4	+0 37				97 4.47	+1.43	+1.12	+0.03	+0.30	7.35		
	Aug.	4	19 8.3	−0 32	f	747	+20	97 6.10	+1.34	−1.12	+0.47	+0.31	277 7.10	7.27	7.21
			19 23.3	−0 17				277 6.50	+1.37	−1.12	+0.37	+0.31	7.43		
			19 46.8	+0 7	v			277 4.20	+1.40	+1.12	+0.20	+0.31	7.23	7.16	
			20 2.8	+0 23				97 4.10	+1.42	+1.12	+0.13	+0.31	7.08		

Die Oerter der beiden Standard stars sind nach obiger Quelle.

	Aequinoctium 1889.0		Epoche 1889.55 Präcession 1850	1900	1850	1900	E. B.	
BD. −4°.4883	19ʰ 35ᵐ 56ˢ.005	−4° 32′ 49″.33	+3ˢ.1712	+3ˢ.1692	+7″.987	+8″.197	−0ˢ.0014	+0″.004
−4.4926	43 4.463	−4 46 18.32	+3.1747	+3.1725	+8.556	+8.763	−0.0007	−0.016

Daraus folgt

Epoche	1889.55	1890.55	1899.55
Aequinoctium	89.0	90.0	99.0
$\Delta\alpha$	+7ᵐ 8ˢ.458	+7ᵐ 8ˢ.462	+7ᵐ 8ˢ.498
$\Delta\delta$	−0° 13′ 28″.99	−0° 13′ 28″.44	−0° 13′ 23″.53
$\frac{1}{2}(\delta' + \delta)$	−4 39 33.83	−4 39 25.40	−4 38 9.15
Pos.-W.	97° 11′ 50″.64	97° 11′ 32″.94	97° 8′ 54″.35
Abstand	6456″.49	6456″.52	6456″.63

Zur Bestimmung des Indexfehlers aus den Standard stars hat man also folgende Vergleichungen

Epoche	Aequinoct.	Posit.-Kreis	Posit.-Winkel	Indexfehler	Zahl
1889.54	1889.0	277° 10′.80	277° 11′.84	+1′.04	21
90.65	90.0	10.14	11.55	+1.41	5
94.50	94.0	9.82	10.38	+0.56	4
99.55	99.0	7.16	8.92	+1.75	20

Uebersicht über sämmtliche Bestimmungen des Indexfehlers des Positionskreises aus Sternbeobachtungen.

Nr.				k	s	Red. auf 1895	(k 1895)	(k 1895) $\times \frac{s}{100}$
1	Standard stars		1889.9	+ 1'.12	107'.6	+ 0'.58	+ 1'.70	+ 1'.83
2	Hydra	c f	92.2	+ 0.34	118.3	+ 0.32	+ 0.66	+ 0.78
3		a d	92.2	+ 1.01	111.3	+ 0.32	+ 1.33	+ 1.48
4	Perseus	a p	94.1	+ 0.32	98.0	+ 0.10	+ 0.42	+ 0.41
5	Hydra	c f	97.2	+ 1.20	118.3	— 0.25	+ 0.95	+ 1.12
6		a d	97.2	+ 2.06	111.3	— 0.25	+ 1.81	+ 2.01
7	Hydra	c f	99.2	+ 1.22	118.3	— 0.48	+ 0.74	+ 0.88
8		a d	99.2	+ 2.17	111.3	— 0.48	+ 1.69	+ 1.88
9	Standard stars		99.5	+ 1.75	107.6	— 0.51	+ 1.24	+ 1.33

In dieser Zusammenstellung sind die für die Sonnenparallaxe ausgeführten Beobachtungen der Standard stars in den Jahren 1889 und 90 zu einem Werthe vereinigt worden und die vereinzelt darstehende Beobachtung von 1894 ist ausgeschlossen. Die Einzelheiten der Beobachtung von Perseus *ap* zur Orientirung dieser Sterngruppe werden weiter Unten mitgetheilt.

In den Werthen k ist wenn man die Bestimmungen durch die verschiedenen Sternpaare betrachtet, durchweg eine kleine Zunahme mit der Zeit angedeutet, nämlich

Nr.			
9 minus 1	9.6 Jahre	Aenderung	+ 0'.63
8 „ 3	7.0		+ 1.16
7 „ 2	7.0		+ 0.88

Bei der Schwierigkeit die Sicherheit der einzelnen Bestimmungen und die dabei unterlaufenden Fehler zu ermitteln, dürfte hier eine Ausgleichung nach d. M. d. kl. Q. wohl nicht am Platze sein und man wird sich damit begnügen können, darüber einen Ueberschlag zu machen. Nimmt man einfach die Summen der drei vorstehenden Zwischenzeiten und die Summe der Aenderungen, so ergiebt sich die jährliche Aenderung von k zu + 0'.113 und reducirt man, wie es in obiger Tabelle geschehen ist, die einzelnen Werthe damit auf die Epoche 1895,0 und giebt denselben die Entfernung der Sterne s als Gewicht, so erhält man die weiteren Columnen der Tabelle.

Das Endresultat würde sein

Indexfehler des Positionskreises $k = +1'.17 + 0'.113\ (t - 1895.0)$

Verbesserung der angenommenen Drehungs-Constante im Positionswinkel aus Beobachtungen von Sternpaaren symmetrisch zum Meridian.

Die Drehungs-Constante μ war bei der Reduction der Beobachtungen der Standard stars 1889.90 zu 0.18, 1899 zu + 0.220 und bei sämmtlichen Beob-

achtungen der Hydrasterne zu + 0'.185 angenommen. Will man Positionswinkel-Messungen zu einer Prüfung dieser Constante verwenden, so können dabei wohl nur solche Beobachtungen verwandt werden, die symmetrisch zu beiden Seiten des Meridians angestellt sind. Die Standard stars wurden bei Gelegenheit der Beobachtungen der Victoria aber in beliebigen Stundenwinkel beobachtet, je nach der Zeit in der der Himmel klar war und es können davon für den vorliegenden Zweck aus der damaligen Zeit nur die von 1889 Juli 9 verwandt werden, während die Beobachtungen von 1899 zur Bestimmung des Indexfehlers und der Drehungs-Constanten besonders ausgeführt worden sind.

Hydra c f		Hydra a d		Stand. stars.	
1892 Febr. 21	0'.000	1892 März 4	− 0'.005	1889 Juli 9	− 0'.030
März 3	− 0.070	8	− 0.045		
9	+ 0.030	19	+ 0.030		
1897 Febr. 17	− 0.140	1897 März 11	− 0.060	1899 Juli 10	+ 0.410
März 17	− 0.020	16	+ 0.005	12	+ 0.050
30	+ 0.130	Apr. 3	+ 0.120	15	+ 0.200
				17	+ 0.078
1899 Febr. 21	+ 0.295	1899 Febr. 21	− 0.035	Aug. 4	+ 0.055
März 15	+ 0.030	März 15	+ 0.140		
18. 23	+ 0.135	18. 23	+ 0.165		

In Anbetracht, dass die Coefficienten der Durchbiegung proportional dem sinus der Zenithdistanz angenommen werden, nämlich für

Hydra c f	0.767
Hydra a d	0.780
Std. st.	0.831

erhält man für die Verbesserung der Ausgangswerthe nachstehende leicht verständliche Zusammenstellung.

				Gew.	Red. auf 1895.0	μ 1895
Std. st.	1889.6	$\mu = +0'.18 - \frac{0'.030}{0.831}$	$= +0'.14$	1	+ 0'.12	+ 0'.26
Hydra c f	92.2	$+0.185 - \frac{0.013}{0.767}$	+ 0.17	3	+ 0.06	+ 0.23
a d		$+0.185 - \frac{0.007}{0.780}$	+ 0.18	3	+ 0.06	+ 0.24
Hydra c f	97.2	$+0.185 - \frac{0.010}{0.767}$	+ 0.17	3	− 0.05	+ 0.12
a d		$+0.185 + \frac{0.022}{0.780}$	+ 0.21	3	− 0.05	+ 0.16
Hydra c f	99.2	$+0.185 + \frac{0.153}{0.767}$	+ 0.38	3	− 0.10	+ 0.28
a d		$+0.185 + \frac{0.090}{0.780}$	+ 0.30	3	− 0.10	+ 0.20
Std. st.	99.6	$+0.220 + \frac{0.159}{0.831}$	+ 0.41	5	− 0.10	+ 0.31

In der Reihe für μ ist eine allmählige Zunahme dieser Grösse nicht zu verkennen und zwar beträgt dieselbe nach einer graphischen Bestimmung mit Berücksichtigung der angesetzten Gewichte jährlich $+0.'023$, womit man die Columne μ 1895 erhält, die recht befriedigend übereinstimmt. Man hat deshalb sowie k auch μ als Function der Zeit

$$\mu = +0.'23 \quad +0.'023 \; (t - 1895.0)$$

Dass die Drehungsconstante sich im Laufe eines Jahrzehnts um eine viertel Minute ändert kann wohl nicht befremden, wenn man erwägt, dass das Gewicht des Fernrohrs beständig auf das Ende der Declinationsachse wirkt; auch würden äusserst kleine Lockerungen in den Befestigungsschrauben schon diesen Effect hervorbringen.

Da der Durchmesser des Positionskreises 365 Millimeter beträgt, so entspricht eine Veränderung der beiden zur Ablesung des Kreises dienenden Indices um eine Bogenminute einer linearen Verschiebung von $\frac{1}{20}$ Millimeter und bei den grössten am Himmel messbaren Sternabständen, nämlich zwei Grad würde ein Fehler von einer Minute einem Fehler von 2 Bogensecunden im Abstande entsprechen. Nach vorstehenden Uebersichten ist die Instrumental-Correction einer Messung wohl auf 0.1 Minuten sicher, also $0.''2$ in der Ortsbestimmung durch Positionswinkel-Messung zu verbürgen. Da die Winkelmessungen den Distanzmessungen unter allen Umständen nicht gleichwerthig sind (Vrgl. frühere Ermittelungen darüber Astr. Mitthlgg. IV Seite 283) so wird es sich immer empfehlen vorzugsweise Distanzen zu messen und die Winkelmessungen mit Benutzung von Meridiankreis-Beobachtungen nur zur Orientirung von Sterngruppen zu verwenden.

Uebersicht über die angewandten Instrumental-Constanten und Aufstellungsfehler.

I. Reduction der Distanzen.

Die Temperatur des Fernrohres wird wie bisher nach dem Ausdruck berechnet

$$t = O + \tfrac{1}{4}\,(o - O)$$

wo O und o die berichtigten Ablesungen der Thermometer am Objectiv- und am Ocularende sind.

Die der Temperatur t entsprechende Normal-Ocularstellung ist

$$N = 21{,}18 + 0.019\,t$$

und ist Oc die bei der Beobachtung wirklich abgelesene Stellung der Ocularscala, so ist die Reduction einer Distanzmessung s auf die normale Ocularstellung ausgedrückt in Einheiten der vierten Decimale eines Skalentheils

$$+\,366\;(N - Oc)\,\frac{s}{100}$$

Die Zahl 366 entspricht nicht genau dem reciproken Werthe der Brennweite, sondern ist auf empirischem Wege bestimmt. (Vrgl. darüber Theil IV Seite 42).

Die Reduction einer bei t^0 C gemessenen Distanz auf 0^0 C in Einheiten der vierten Decimale eines Skalentheils ist wie bisher

$$-8\frac{s}{100}t$$

Ueber die Correction der Ablesungen der Skala für Theilungsfehler und für den Gang der Mikrometerschraube vergl. IV Seite 30 und 32.

Die Fortsetzung der an letzterer Stelle befindlichen Gangtafel lautet

1890 Apr. 18	bis	1894 Apr. 18	−8
1894 Apr. 19		1898 Aug. 15	−7
1898 Nov. 1		1898 Nov. 20	0
1898 Nov. 21		1899 Dec.	−4

Berechnung der Refraction Vergl. IV. S. 106, 108 bis 110.

Verwandlung der in Skalentheilen ausgedrückten Distanzen in Bogensecunden nach dem Ausdruck

$$S = 40\overset{''}{.}01732 \;\ldots\; 1{,}602248$$

Verbesserung der Distanzmessungen für systematische Correctionen nach der Tabelle B II auf Seite 40 dieser Abhandlung.

II. Reduction der Positionswinkel.

Biegungs-Constanten: $\alpha = +0\overset{'}{.}87 \qquad \beta = -0\overset{'}{.}27$

Abweichung der Stundenaxe vom Himmelspol x und y, Seite 48

Indexfehler des Positionskreises $k = +1\overset{'}{,}17 + 0\overset{'}{,}113\;(t - 1895)$

Biegung des Fernrohres $\mu = +0{,}23 + 0{,}023\;(t - 1895)$

Collimationsfehler des Fernrohres $C = -0\overset{'}{,}07$

Neigung der Declinationsaxe gegen die Stundenaxe $i = +0\overset{'}{,}11$

Die Coëfficienten zur Berechnung der Aufstellungsfehler finden sich in Theil IV Seite 111 in abgekürzter Form und ausführliche Tafeln sind handschriftlich vorhanden.

Triangulation zwischen helleren Sternen der beiden Sternhaufen im Perseus.

Einige einleitende Bemerkungen über diese Triangulation und die genäherten Oerter der beobachteten Sterne finden sich schon auf Seite 4 dieser Abhandlung und es werden jetzt die einzelnen Messungen mit ihren Reductionen erfolgen. Dieselben sind nach laufenden Nummern geordnet und dahinter steht die Bezeichnung der beiden mit einander verbundenen Sterne nach dem Verzeichniss auf Seite 4

Distanzmessungen.

Tag	Sternzeit	Bar.	Th.	t	N	O	N — O	Messung	Th. F.	Gang	Oc.-St.	Temp.	Refr.	Aberr.	Abstand	R	S
								Nr 1	g a								
1800	h m	mm	°	°	mm	mm	mm	s							s		
91 Oct 15	19 58.0	744	+ 15	+ 15.5	21.47	21.50	— 0.03	41.7333	— 50	+ 4	— 5	— 52	+ 203	+ 23	41.7456	3	3
92 Sept. 18	22 40.3	51	+ 8	+ 10.8	39	66	— 0.27	7465	— 59	+ 4	— 41	— 36	+ 153	+ 33	7519	2	3
Oct. 7	0 8.6	38	+ 12	+ 13.4	44	72	— 0.28	7370	— 59	+ 4	— 42	— 35	+ 200	+ 26	7464	3	3
96 Febr. 13	6 29.9	56	0	+ 0.9	20	12	+ 0.08	7299	— 44	+ 4	+ 12	— 3	+ 185	— 38	7415	2	3
								Nr. 2	g b								
91 Oct. 15	20 7.5	744	+ 15	+ 15.5	21.47	21.50	— 0.03	40.9561	— 58	+ 1	— 4	— 51	+ 230	+ 22	40.9701	3	3
92 Oct. 7	20 22.1	38	+ 12	+ 13.2	43	72	— 0.29	9623	— 57	+ 1	— 43	— 43	+ 145	+ 26	9652	3	3
94 Marz 23	8 45.2	57	+ 6	+ 8.3	34	20	+ 0.14	9581	— 58	+ 1	+ 21	— 27	+ 257	— 29	9746	2	2
96 Febr. 13	6 57.4	56	0	+ 0.7	19	12	+ 0.07	9558	— 56	+ 1	+ 10	— 2	+ 204	— 36	9679	2	3
								Nr. 3	g e								
91 Oct. 15	20 37.0	744	+ 15	+ 15.4	21.47	21.50	— 0.03	24.2999	— 59	— 5	— 8	— 30	+ 94	+ 13	24.3009	3	3
92 Oct. 7	20 46.6	38	+ 12	+ 13.0	43	72	— 0.29	3137	— 51	— 5	— 27	— 25	+ 104	+ 16	3149	3	3
94 Marz 23	8 55.7	57	+ 6	+ 8.2	33	20	+ 0.13	2971	— 51	— 5	+ 12	— 16	+ 181	— 18	3074	2	2
96 Febr. 17	6 57.0	60	— 1	— 0.6	17	12	+ 0.05	2984	— 51	+ 3	+ 4	+ 1	+ 122	— 22	3041	2	3
								Nr. 4	g d								
91 Oct. 15	20 49.0	744	+ 15	+ 15.4	21.47	21.50	— 0.03	23.9844	— 59	0	— 3	— 29	+ 128	+ 13	23.9894	3	3
92 Oct. 7	21 7.6	38	+ 12	+ 12.8	43	71	— 0.28	9955	— 51	0	— 24	— 34	+ 122	+ 16	9984	3	3
94 Marz 23	9 11.2	57	+ 6	+ 8.1	33	20	+ 0.13	9955	— 53	0	+ 11	— 15	+ 90	— 17	9971	3	3
96 Febr. 17	7 8.0	60	— 1	— 0.6	17	12	+ 0.05	9864	— 44	0	+ 4	+ 1	+ 93	— 22	9896	2	3
								Nr. 5	e g								
93 März 29	9 9.0	749	+ 7	+ 9.0	21.35	21.22	+ 0.13	14.0699	— 30	— 3	+ 7	— 10	+ 50	— 10	14.0703	2	3
94 Jan. 24	7 46.1	52	— 2	— 0.5	19	09	+ 0.10	0818	— 10	— 1	+ 5	+ 1	+ 54	— 12	0835	2	2
Marz 24	8 25.3	56	+ 7	+ 8.5	34	34	0.00	0786	— 10	— 1	0	— 9	+ 52	— 13	0805	3	3
								Nr 6	g f								
91 Oct. 17	20 40.9	747	+ 10	+ 12.3	21.42	21.50	— 0.08	20.1390	— 35	— 2	— 6	— 20	+ 83	+ 10	20.1420	2	2
93 März 29	9 18.0	49	+ 7	+ 8.8	35	22	+ 0.13	1444	— 36	— 3	+ 10	— 14	+ 90	— 14	1477	2	3
94 Marz 24	8 36.3	56	+ 6	+ 8.3	34	34	0.00	1476	— 36	— 3	0	— 13	+ 74	— 15	1483	3	3
96 Febr. 13	6 46.9	56	0	+ 0.8	20	12	+ 0.08	1486	— 28	— 2	+ 6	— 1	+ 59	— 18	1502	2	3
								Nr. 7	g h								
91 Oct. 17	20 51.9	747	+ 10	+ 12.1	21.42	21.50	— 0.08	9.8538	— 3	+ 3	— 3	— 10	+ 41	+ 5	9.8571	2	2
94 Jan. 24	8 6.1	52	— 2	— 0.6	17	09	+ 0.08	8638	— 13	+ 2	+ 3	0	+ 32	— 8	8656	2	2
Marz 24	6 49.8	56	+ 6	+ 8.0	33	20	+ 0.13	8602	— 13	+ 2	+ 5	— 6	+ 35	— 7	8618	3	3
								Nr. 8	g i								
91 Oct. 17	21 11.9	748	+ 10	+ 11.8	21.41	21.50	— 0.09	23.7374	— 59	+ 4	— 8	— 23	+ 102	+ 12	23.7402	2	2
94 Jan. 24	8 21.1	52	— 2	— 0.7	17	09	+ 0.08	7491	— 51	+ 4	+ 7	+ 1	+ 70	— 20	7502	2	2
März 24	9 1.3	56	+ 5	+ 7.9	33	20	+ 0.13	7529	— 51	+ 4	+ 11	— 15	+ 74	— 17	7525	3	3
								Nr. 9	g h								
91 Oct 17	21 30.4	748	+ 10	+ 11.5	21.40	21.50	— 0.10	26.3105	— 46	+ 3	— 10	— 24	+ 120	+ 13	26.3161	2	2
94 März 18	9 19.0	54	0	+ 0.7	19	10	+ 0.09	3156	— 53	— 5	+ 9	— 1	+ 77	— 20	3163	3	3
24	9 9.3	56	+ 5	+ 7.8	33	34	— 0.01	3139	— 53	— 5	— 1	— 16	+ 76	— 19	3121	3	3

Tag			Sternzeit	Bar.	Th.	t	N	O	N − O	Messung	Th. F.	Gang	Oc.-St.	Temp.	Refr.	Aberr.	Abstand	R.	S.
										Nr 10	g l								
1800			h m	mm	°	°	mm	mm	mm	s							s		
91	Oct.	28	20 50.0	752	+ 3	+ 5.4	21.28	21.14	+ 0.14	24.0601	− 59	− 1	+ 12	− 10	+ 83	+ 9	24.0635	2	2
94	März	20	9 4.5	52	+ 3	+ 4.7	27	11	+ 0.16	0519	− 51	− 1	+ 14	− 9	+ 200	− 18	0654	3	3
		26	8 23.5	49	+ 8	+ 10.2	37	18	+ 0.19	0563	− 59	− 1	+ 18	− 20	+ 163	− 17	0647	3	3
										Nr. 11	g m								
91	Oct.	28	21 0.0	752	+ 3	+ 5.3	21.28	21.14	+ 0.14	42.2936	− 50	− 5	+ 22	− 18	+ 138	+ 15	42.3038	2	2
94	März	20	9 18.0	52	+ 3	+ 4.6	27	11	+ 0.16	2779	− 59	− 5	+ 25	− 15	+ 378	− 33	3070	3	3
		26	8 39.5	49	+ 7	+ 9.8	37	18	+ 0.19	2806	59	− 5	+ 29	− 33	+ 302	− 29	3011	3	3
										Nr. 12	g n								
91	Oct.	20	22 39.8	738	+ 10	+ 11.6	21.40	21.50	− 0.10	36.7791	− 54	+ 4	− 14	− 34	+ 128	+ 18	36.7839	3	3
94	März	26	8 53.0	56	+ 5	+ 8.0	33	18	+ 0.15	7795	− 60	+ 4	+ 21	− 24	+ 258	− 26	7968	3	3
95	Nov.	16	22 37.5	48	+ 12	+ 13.2	43	34	+ 0.09	7875	− 63	+ 3	+ 13	− 39	+ 130	+ 3	7922	3	2
										Nr 13	g o								
91	Oct.	28	21 13.5	752	+ 3	+ 5.1	21.27	21.14	+ 0.13	44.2550	− 44	− 4	+ 21	− 18	+ 230	+ 16	44.2751	2	2
94	März	21	7 45.1	52	+ 6	+ 8.1	33	20	+ 0.13	2776	− 57	− 5	+ 21	− 29	+ 158	− 33	2831	2	2
		29	9 0.5	53	+ 9	+ 11.0	39	22	+ 0.17	2780	− 57	− 5	+ 28	− 39	+ 150	− 30	2827	2	3
										Nr. 14	g p								
91	Oct.	28	21 23.0	752	+ 3	+ 4.8	21.27	21.14	+ 0.13	56.5701	− 48	− 1	+ 27	− 22	+ 268	+ 22	56.5947	2	2
94	März	21	7 54.6	52	+ 6	+ 8.0	33	20	+ 0.13	5859	− 38	− 1	+ 27	− 36	+ 279	− 42	6048	2	2
		29	9 15.0	53	+ 8	+ 10.6	38	22	+ 0.16	5747	− 38	− 1	+ 33	− 48	+ 313	− 38	5968	2	3
										Nr. 15	a b								
91	Oct.	28	21 35.0	752	+ 3	+ 4.6	21.26	21.14	+ 0.12	14.9481	− 9	+ 1	+ 7	− 5	+ 55	+ 6	14.9536	2	2
95	März	15	6 47.4	57	0	+ 2.5	23	18	+ 0.05	9517	− 14	+ 1	+ 3	− 3	+ 43	− 11	9536	3	3
	Nov.	19	21 18.0	56	+ 3	+ 5.7	28	08	+ 0.20	9505	− 25	+ 1	+ 11	− 7	+ 59	0	9544	2	3
		21	21 11.6	57	+ 2	+ 2.5	23	18	+ 0.05	9493	− 25	+ 1	+ 8	− 3	+ 61	0	9530	2	2
		23	21 10.7	45	− 1	+ 0.8	19	04	+ 0.15	9500	− 25	+ 1	+ 8	0	+ 61	− 1	9544	3	3
										Nr. 16	a c								
91	Oct.	28	21 48.5	752	+ 3	+ 4.3	21.26	21.14	+ 0.12	19.0533	− 23	− 1	+ 8	− 7	+ 85	+ 7	19.0602	2	2
94	März	18	8 56.0	54	0	+ 1.1	20	10	+ 0.10	0571	− 23	− 1	+ 7	− 2	+ 93	− 15	0630	3	3
95	März	15	6 58.4	57	0	+ 2.1	22	18	+ 0.04	0627	− 38	− 1	+ 3	− 3	+ 82	− 15	0655	3	3
										Nr. 17	a d								
91	Oct.	29	21 56.9	756	+ 3	+ 5.0	21.27	21.11	+ 0.16	23.9662	− 59	+ 1	+ 14	− 10	+ 90	+ 8	23.9706	2	3
93	März	12	8 13.7	46	+ 7	+ 9.1	35	42	− 0.07	9646	− 51	+ 1	− 6	− 18	+ 159	− 20	9711	2	3
95	März	15	7 11.4	57	0	+ 1.9	22	18	+ 0.04	9633	− 44	+ 1	+ 3	− 4	+ 125	− 19	9695	3	3
										Nr. 18	a e								
91	Oct.	13	22 50.5	741	+ 10	+ 11.2	21.39	21.49	− 0.10	30.7139	− 51	− 4	− 11	− 28	+ 103	+ 17	30.7165	2	3
		29	21 43.4	56	+ 3	+ 5.3	27	11	+ 0.16	7048	− 56	+ 5	+ 18	− 13	+ 129	+ 11	7142	2	3
95	März	15	7 24.9	57	0	+ 1.7	21	18	+ 0.03	7038	− 69	+ 5	+ 3	− 4	+ 166	− 24	7115	3	3
96	Febr.	13	7 32.9	56	− 1	+ 0.5	19	12	+ 0.07	7040	− 69	+ 4	+ 8	− 1	+ 175	− 28	7129	2	3
										Nr. 19	a p								
92	Sept.	18	22 21.8	751	+ 8	+ 11.5	21.39	21.66	− 0.27	98.0265	− 43	0	− 10	− 86	+ 383	+ 78	98.0587	2	3
	Oct.	11	19 51.1	46	+ 7	+ 11.2	39	70	− 0.31	0131	− 43	0	− 11	− 88	+ 541	+ 57	0587	3	3
93	März	12	7 17.2	46	+ 7	+ 9.5	36	42	− 0.06	0206	− 43	0	− 2	− 75	+ 457	− 82	0461	2	3
		28	8 15.3	52	+ 8	+ 9.3	36	22	+ 0.14	0122	− 43	0	+ 5	− 73	+ 525	− 70	0466	2	2
95	Nov.	21	21 25.6	57	+ 2	+ 2.4	23	18	+ 0.05	0113	− 43	0	+ 2	− 19	+ 452	0	0505	2	2
										Nr. 20	b c								
91	Oct.	29	22 9.9	756	+ 2	+ 4.8	21.27	21.11	+ 0.16	17.0808	− 7	− 1	+ 10	− 7	+ 57	+ 6	17.0866	2	3
93	März	12	8 25.2	46	+ 7	+ 8.6	34	42	− 0.08	0842	− 15	− 1	− 5	− 12	+ 119	− 14	0914	2	3
95	Apr.	10	9 51.9	50	+ 13	+ 15.5	47	48	− 0.01	0690	− 17	− 1	− 1	− 21	+ 176	− 9	0817	3	3
										Nr. 21	b d								
91	Oct.	29	22 20.4	756	+ 2	+ 4.5	21.26	21.11	+ 0.15	31.5891	− 70	− 1	+ 18	− 11	+ 92	+ 11	31.5930	2	3
93	März	12	8 33.7	46	+ 7	+ 8.5	34	42	− 0.08	5910	− 67	− 1	− 9	− 21	+ 204	− 26	5990	2	3
95	Apr.	10	10 7.4	50	+ 13	+ 15.2	46	48	− 0.02	5736	− 63	− 1	− 2	− 38	+ 353	− 17	5968	3	3

Tag			Sternzeit	Bar.	Th.	t	N	O	N—O	Messung	Th. F.	Gang	Oc.-St.	Temp.	Refr.	Aberr.	Abstand	R.	S.
										Nr 22	bh								
1800			h m	mm	°	°	mm	mm	mm	s							s		
91	Oct.	29	22 27.4	757	+ 2	+ 4.4	21.26	21.11	+ 0.15	40.4506	— 62	+ 1	+ 22	— 15	+ 153	+ 14	40.4619	2	3
93	März	12	8 43.7	46	+ 7	+ 8.3	33	42	— 0.09	4438	— 53	+ 1	— 13	— 28	+ 268	— 33	4580	2	3
95	Apr.	10	10 37.9	50	+ 13	+ 14.5	46	48	— 0.02	4250	— 55	+ 1	— 3	— 47	+ 339	— 22	4463	3	3
	Nov.	19	22 24.0	56	+ 2	+ 4.8	27	08	+ 0.19	4411	— 54	+ 1	+ 28	— 16	+ 153	+ 1	4524	2	3
										Nr. 23	bl								
91	Oct.	30	20 37.5	761	+ 1	+ 2.5	21.23	21.13	+ 0.10	48.1643	— 65	— 3	+ 18	— 10	+ 257	+ 17	48.1857	2	2
94	März	21	8 6.1	52	+ 6	+ 7.7	32	20	+ 0.12	1759	— 46	— 3	+ 21	— 30	+ 247	— 36	1912	2	2
95	Nov.	16	21 12.5	48	+ 12	+ 13.8	45	34	+ 0.11	1721	— 71	— 3	+ 20	— 53	+ 222	+ 4	1840	2	2
		19	22 37.0	56	+ 2	+ 4.6	27	08	+ 0.19	1739	— 71	— 3	+ 34	— 18	+ 187	+ 1	1869	2	3
		21	21 34.6	57	+ 2	+ 2.3	23	18	+ 0.05	1792	— 71	— 3	+ 9	— 9	+ 214	0	1932	2	2
										Nr. 24	cd								
91	Oct.	30	20 53.6	761	+ 1	+ 2.4	21.23	21.13	+ 0.10	17.8493	— 11	+ 3	+ 6	— 4	+ 61	+ 6	17.8554	2	2
94	März	21	8 14.6	52	+ 6	+ 7.6	32	20	+ 0.12	8491	— 20	+ 3	+ 8	— 11	+ 76	— 18	8534	2	2
95	Apr.	11	11 24.3	51	+ 8	+ 9.4	36	38	— 0.02	8269	— 26	+ 3	— 1	— 14	+ 245	— 9	8467	3	3
										Nr. 25	ee								
91	Oct.	30	21 19.0	761	+ 1	+ 2.3	21.23	21.13	+ 0.10	17.6493	— 6	— 3	+ 6	— 4	+ 52	+ 6	17.6544	2	2
94	März	21	8 24.1	52	+ 5	+ 7.4	32	20	+ 0.12	6628	— 23	— 3	+ 7	— 10	+ 116	— 13	6702	2	2
95	Oct.	24	21 57.9	35	+ 2	+ 4.3	25	11	+ 0.14	6598	— 32	— 2	+ 8	— 6	+ 51	+ 7	6624	2	2
										Nr. 26	eh								
91	Oct.	30	21 28.5	761	+ 1	+ 2.3	21.23	21.13	+ 0.10	25.7470	— 47	+ 4	+ 9	— 5	+ 121	+ 9	25.7561	2	2
94	März	21	8 36.1	52	+ 5	+ 7.2	31	20	+ 0.11	7466	— 58	+ 4	+ 10	— 15	+ 140	— 19	7583	2	3
95	Oct.	24	22 7.9	35	+ 2	+ 4.2	26	11	+ 0.15	7503	— 60	+ 4	+ 11	— 9	+ 105	+ 11	7565	2	2
										Nr. 27	cl								
91	Oct.	30	21 43.0	761	+ 1	+ 2.2	21.22	21.13	+ 0.09	36.5951	— 3	— 2	+ 12	— 6	+ 214	+ 13	36.6179	2	2
94	März	21	8 46.1	52	+ 5	+ 7.0	31	20	+ 0.11	6145	— 57	— 2	+ 15	— 21	+ 149	— 27	6202	2	3
95	Oct.	31	21 2.7	53	+ 3	+ 3.9	26	09	+ 0.17	6028	— 69	— 1	+ 23	— 12	+ 196	+ 12	6177	2	2
										Nr. 28	de								
91	Oct.	30	22 1.0	761	+ 1	+ 2.0	21.22	21.13	+ 0.09	9.9335	— 3	+ 1	+ 3	— 2	+ 29	+ 3	9.9368	2	2
94	März	23	8 17.7	57	+ 6	+ 8.6	34	20	+ 0.14	9378	— 13	+ 1	+ 5	— 7	+ 41	— 7	9398	2	2
95	Oct.	31	21 14.7	53	+ 3	+ 3.8	26	09	+ 0.17	9348	— 5	+ 1	+ 6	— 3	+ 51	+ 3	9401	2	2
										Nr. 29	df								
91	Nov.	2	22 24.9	760	+ 2	+ 4.6	21.26	21.19	+ 0.07	20.3792	— 38	+ 2	+ 5	— 8	+ 71	+ 7	20.3831	2	3
94	März	23	8 28.7	57	+ 5	+ 8.5	34	20	+ 0.14	3821	— 38	+ 2	+ 10	— 14	+ 144	— 15	3910	2	2
95	Oct.	31	21 26.2	53	+ 3	+ 3.7	25	19	+ 0.16	3838	— 33	+ 2	+ 11	— 6	+ 73	+ 7	3892	2	2
										Nr. 30	ef								
91	Nov.	2	22 44.9	760	+ 2	+ 4.2	21.26	21.19	+ 0.07	15.8965	— 3	+ 2	+ 4	— 6	+ 48	+ 4	15.9014	2	3
93	März	22	7 50.3	55	+ 6	+ 6.8	31	21	+ 0.10	8999	— 3	+ 2	+ 6	— 9	+ 85	— 12	9069	2	2
95	Oct.	31	21 37.2	53	+ 3	+ 3.6	25	09	+ 0.16	8893	— 17	+ 2	+ 10	— 5	+ 47	+ 5	8935	2	2
										Nr. 31	eh								
91	Nov.	3	20 31.9	754	+ 1	+ 3.2	21.24	21.19	+ 0.05	22.0055	— 53	0	+ 4	— 6	+ 131	+ 7	22.0138	2	2
93	März	22	8 2.3	55	+ 5	+ 6.6	30	21	+ 0.09	0188	— 53	0	+ 7	— 11	+ 65	— 16	0180	2	2
95	Oct.	31	21 55.2	53	+ 2	+ 3.4	25	09	+ 0.16	0076	— 41	0	+ 12	— 7	+ 88	+ 7	0135	2	2
										Nr. 32	el								
91	Nov.	3	21 23.4	754	+ 1	+ 2.4	21.23	21.19	+ 0.04	33.4391	— 74	+ 1	+ 5	— 7	+ 142	+ 10	33.4468	2	2
93	März	24	7 54.7	57	+ 7	+ 9.5	36	29	+ 0.07	4415	— 70	+ 1	+ 9	— 26	+ 190	— 25	4494	2	2
95	Nov.	16	22 53.5	48	+ 12	+ 13.0	43	34	+ 0.09	4492	— 63	+ 1	+ 11	— 35	+ 116	+ 3	4525	3	2
										Nr. 33	fl								
91	Nov.	3	20 41.9	754	+ 1	+ 2.9	21.24	21.19	+ 0.05	25.0934	— 52	— 1	+ 5	— 6	+ 143	+ 7	25.1030	2	2
93	März	22	8 13.3	55	+ 5	+ 6.4	30	21	+ 0.09	0938	— 52	— 1	+ 8	— 13	+ 111	— 19	0972	2	2
95	Nov.	16	23 3.5	48	+ 12	+ 13.0	43	34	+ 0.09	0951	— 51	— 1	+ 8	— 26	+ 68	+ 2	0971	3	2

Tag	Sternzeit	Bar.	Th.	t	N	O	$N-O$	Messung	Th. F.	Gang	Oc.-St.	Temp.	Refr.	Aberr.	Abstand	R.	S.
								Nr. 34	fm								
1800	h m	mm	°	°	mm	mm	mm	s							s		
93 Nov. 3	21 11.4	754	+ 1	+ 2.6	21.23	21.19	+ 0.04	37.7636	− 54	+ 4	+ 6	− 8	+ 140	+ 11	37.7735	2	2
93 März 22	8 42.3	55	+ 5	+ 5.8	29	21	+ 0.08	7596	− 54	+ 4	+ 11	− 17	+ 243	− 28	7755	2	2
95 Nov. 16	21 24.5	48	+ 12	+ 13.7	44	34	+ 0.10	7654	− 65	+ 3	+ 14	− 41	+ 156	+ 3	7724	2	2
19	23 11.0	50	+ 2	+ 4.2	26	08	+ 0.18	7655	− 65	+ 3	+ 25	− 18	+ 133	+ 1	7739	2	3
25	21 37.7	45	− 1	+ 0.3	19	16	+ 0.03	7669	− 65	+ 3	+ 4	− 1	+ 158	− 2	7766	3	3
								Nr. 35	hl								
91 Nov. 3	21 37.4	754	+ 1	+ 2.4	21.23	21.19	+ 0.04	14.2427	− 10	− 4	+ 2	− 3	+ 62	+ 4	14.2476	2	2
95 Nov. 25	22 58.2	54	− 2	− 0.4	17	16	+ 0.01	2538	− 22	− 4	+ 1	0	+ 48	− 1	2560	3	3
27	22 48.3	49	− 1	+ 6.1	18	16	+ 0.02	2443	− 22	− 4	+ 1	0	+ 49	− 1	2466	3	3
								Nr. 36	hk								
91 Nov 5	21 8.6	760	0	+ 2.3	21.23	21.14	+ 0.09	18.7873	− 27	+ 4	+ 6	− 3	+ 101	+ 4	18.7958	2	2
93 März 23	7 29.4	55	+ 9	+ 9.8	37	29	+ 0.08	7991	− 26	+ 3	+ 6	− 14	+ 71	− 15	8016	3	2
96 Jan 27	7 36.4	60	− 2	− 1.7	15	00	+ 0.15	8059	− 34	+ 3	+ 8	+ 2	+ 71	− 16	8094	2	2
								Nr. 37	hl								
91 Nov. 5	21 21.6	760	0	+ 2.2	21.22	21.14	+ 0.08	28.5245	− 45	0	+ 6	− 5	+ 86	+ 7	28.5296	2	2
93 März 23	7 38.4	55	+ 8	+ 9.6	36	29	+ 0.07	5334	− 53	− 1	+ 7	− 22	+ 147	− 21	5391	3	2
95 Nov. 23	22 10.7	46	− 2	− 0.4	17	04	+ 0.13	5371	− 64	− 1	+ 13	+ 1	+ 86	− 1	5404	3	3
								Nr. 38	hn								
92 Sept. 18	22 6.3	752	+ 11	+ 11.2	21.39	21.66	− 0.27	37.8538	− 54	+ 3	− 88	− 34	+ 128	+ 31	37.8524	2	3
93 März 28	8 3.8	52	+ 8	+ 9.7	37	22	+ 0.15	8453	− 54	+ 3	+ 21	− 29	+ 236	− 26	8604	2	3
94 Jan. 24	5 27.6	52	− 1	+ 0.1	18	09	+ 0.09	8541	− 52	− 3	+ 13	0	+ 137	− 57	8579	2	2
								Nr. 39	lk								
91 Nov. 5	21 32.6	760	0	+ 2.0	21.22	21.14	+ 0.08	9.2919	− 16	+ 4	+ 8	− 2	+ 86	+ 2	9.2946	2	2
93 März 23	8 0.9	55	+ 8	+ 9.2	35	29	+ 0.06	2921	− 17	− 5	+ 2	− 7	+ 57	− 7	2944	3	2
96 Jan. 27	7 45.4	60	− 2	− 1.8	14	00	+ 0.14	2909	− 6	− 4	+ 5	+ 1	+ 56	− 8	2953	2	2
								Nr. 40	ll								
91 Nov. 5	21 44.6	760	0	+ 1.9	21.22	21.14	+ 0.08	35.1424	− 62	− 2	+ 10	− 6	+ 103	+ 9	35.1476	2	2
93 März 23	8 10.9	55	+ 8	+ 9.0	35	29	+ 0.06	1456	− 65	− 3	+ 8	− 25	+ 171	− 26	1516	3	2
95 Nov. 14	22 57.5	46	+ 7	+ 8.6	34	28	+ 0.06	1511	− 57	− 2	+ 6	− 24	+ 98	+ 4	1536	3	3
								Nr. 41	lo								
91 Nov. 5	21 56.6	760	0	+ 1.7	21.21	21.14	+ 0.07	27.3635	− 50	+ 2	+ 7	− 4	+ 140	+ 7	27.3737	2	2
93 März 23	8 22.9	55	+ 8	+ 8.7	34	29	+ 0.05	3670	− 56	− 6	+ 5	− 19	+ 146	− 20	3720	3	2
94 Jan. 24	7 23.6	52	− 1	− 0.4	17	09	+ 0.08	3688	− 56	− 6	+ 6	+ 1	+ 132	− 22	3745	2	2
								Nr. 42	kl								
92 Oct. 21	21 23.4	739	+ 3	+ 5.6	21.28	21.22	+ 0.06	30.3839	− 66	+ 2	+ 7	− 14	+ 96	+ 15	30.3879	3	3
93 März 23	8 44.4	55	+ 7	+ 6.3	34	29	+ 0.05	3891	− 66	+ 2	+ 6	− 20	+ 144	− 23	3934	3	2
95 Nov. 23	22 23.2	46	− 2	− 0.6	17	04	+ 0.13	3943	− 69	+ 2	+ 16	+ 1	+ 90	− 2	3981	3	3
								Nr. 43	kn								
91 Nov. 7	20 44.8	756	0	+ 2.2	21.22	21.24	− 0.02	30.9498	− 69	+ 1	− 2	− 7	+ 89	+ 6	30.9516	3	3
93 März 23	9 1.4	55	+ 7	+ 8.0	33	29	+ 0.04	9388	− 69	+ 1	+ 5	− 25	+ 237	− 23	9514	3	2
94 Jan. 24	7 1.6	52	− 1	− 0.4	17	09	+ 0.08	9520	− 69	+ 1	+ 9	+ 1	+ 133	− 25	9570	2	2
								Nr. 44	ko								
91 Nov. 7	20 54.3	756	0	+ 2.1	21.22	21.24	− 0.02	19.2726	− 27	− 5	− 1	− 3	+ 170	+ 4	19.2864	3	3
93 März 23	9 10.4	55	+ 7	+ 7.9	33	29	+ 0.04	2819	− 27	− 5	+ 3	− 13	+ 144	− 15	2906	3	2
94 Jan. 24	7 13.1	52	− 1	− 0.4	17	09	+ 0.08	2838	− 27	− 5	+ 6	+ 1	+ 133	− 16	2930	2	2
								Nr. 45	lm								
91 Nov. 7	21 4.3	756	0	+ 2.0	21.22	21.24	− 0.02	18.4617	− 21	+ 1	− 1	− 3	+ 58	+ 4	18.4655	3	3
93 März 24	8 8.2	57	+ 7	+ 9.2	35	29	+ 0.06	4611	− 21	+ 1	+ 4	− 14	+ 115	− 14	4682	2	2
94 Jan. 24	6 43.6	52	− 1	− 0.3	17	09	+ 0.08	4629	− 21	+ 1	+ 5	0	+ 86	− 15	4685	2	2

Tag	Stern-zeit	Bar.	Th.	t	N	O	N — O	Messung	Th. F.	Gang	Oc.-St.	Temp.	Refr.	Aberr.	Abstand	R.	S.
								Nr. 46	l n								
1800	h m	mm	°	°	mm	mm	mm	s							s		
93 März 24	8 17.7	757	+ 7	+ 9.0	21.35	21 29	+ 0.06	15.8371	— 3	+ 3	+ 4	— 11	+ 71	— 12	15.8423	2	2
95 Nov. 27	21 21.3	49	— 1	+ 0.7	19	16	+ 0.03	8401	— 17	+ 2	+ 2	— 1	+ 79	— 1	8465	3	3
96 Jan. 27	7 53.9	60	— 2	— 1.8	14	00	+ 0.14	8270	— 17	+ 3	+ 9	+ 2	+ 93	— 13	8317	2	2
								Nr. 47	l o								
92 Apr. 5	9 6.1	746	+ 15	+ 18.0	21.52	21.52	0.00	39.3363	— 52	+ 3	0	— 57	+ 118	— 24	39.3351	2	3
93 März 27	8 0.0	54	+ 6	+ 7.5	32	29	+ 0.03	3326	— 52	+ 3	+ 4	— 24	+ 112	— 31	3338	2	2
95 Nov. 23	22 34.7	46	— 2	— 0.7	17	04	+ 0.13	3238	— 58	+ 3	+ 17	+ 2	+ 133	— 1	3334	3	3
								Nr. 48	m n								
91 Nov. 7	21 56.8	756	0	+ 1.3	21.21	21.24	— 0.03	16.9993	— 7	0	— 2	— 2	+ 56	+ 4	17.0042	3	3
93 März 24	8 30.2	57	+ 7	+ 8.8	35	29	+ 0.06	17.0081	— 15	0	+ 4	— 12	+ 64	— 13	0109	2	2
94 Jan. 24	6 30.6	52	— 1	— 0.2	18	09	+ 0.09	0061	— 15	0	+ 6	0	+ 50	— 13	0089	2	2
								Nr. 49	m p								
91 Nov. 7	22 10.8	755	0	+ 1.2	21.20	21.24	— 0.04	38.0000	— 54	0	— 6	— 4	+ 147	+ 9	38.0092	3	3
93 März 27	7 49.5	54	+ 6	+ 7.7	32	14	+ 0.18	0081	— 54	0	+ 25	— 24	+ 108	— 26	0110	2	2
94 Jan. 24	6 12.6	52	— 1	— 0.1	18	09	+ 0.09	0137	— 54	0	+ 13	0	+ 116	— 31	0181	2	2
95 Nov. 23	22 54.7	46	— 2	— 1.0	16	04	+ 0.12	0000	— 65	0	+ 17	+ 3	+ 129	— 1	0083	3	3
96 Jan. 27	8 4.4	60	— 3	— 1.9	14	00	+ 0.14	0083	— 65	0	+ 19	+ 6	+ 112	— 32	0123	2	2
								Nr. 50	n o								
92 Apr. 5	9 22.6	746	+ 15	+ 17.5	21.51	21.52	— 0.01	31.1551	— 69	— 3	— 1	— 44	+ 158	— 19	31.1573	2	3
93 März 27	8 9.0	54	+ 6	+ 7.2	31	14	+ 0.17	1516	— 69	— 3	+ 19	— 18	+ 113	— 22	1566	2	2
95 Nov. 16	22 11.0	48	+ 12	+ 13.3	44	34	+ 0.10	1594	— 59	— 2	+ 11	— 33	+ 93	+ 2	1606	2	2
								Nr. 51	u p								
92 Apr. 5	9 40.1	746	+ 14	+ 16.9	21.50	21.52	— 0.02	24.7106	— 48	+ 4	— 2	— 34	+ 73	— 15	24.7084	2	3
7	9 19.7	43	+ 14	+ 15.2	46	50	— 0.04	7165	— 50	— 4	— 4	— 30	+ 75	— 14	7138	3	3
93 März 27	8 20.0	54	+ 6	+ 7.1	31	14	+ 0.17	7177	— 50	— 4	+ 15	— 14	+ 83	— 17	7190	2	2
94 Jan. 24	5 58.6	52	— 1	— 0.1	18	09	+ 0.09	7124	— 52	+ 5	+ 8	0	+ 84	— 20	7149	2	2
96 Febr. 13	7 43.4	56	— 1	+ 0.4	19	12	+ 0.07	7113	— 51	— 3	+ 6	— 1	+ 88	— 23	7129	2	3
								Nr. 52	o p								
93 März 27	8 31.5	754	+ 5	+ 6.8	21.31	21.14	+ 0.17	25.1853	— 52	— 3	+ 15	— 14	+ 177	— 18	25.1958	2	2
30	8 46.9	45	+ 7	+ 10.1	37	34	+ 0.03	1830	— 52	— 3	+ 3	— 20	+ 188	— 17	1929	2	3
94 Jan. 24	5 27.6	52	— 1	+ 0.1	18	09	+ 0.09	1968	— 52	— 3	+ 8	0	+ 87	— 21	1967	2	2
								Nr. 53	a l								
92 Oct. 11	20 10.6	746	+ 7	+ 10.4	21.38	21.70	— 0.32	55.5330	— 32	— 1	— 65	— 46	+ 344	+ 34	55.5564	3	3
21	21 46.9	39	+ 3	+ 5.3	28	22	+ 0.06	5383	— 32	— 1	+ 12	— 23	+ 248	+ 26	5613	3	3
93 März 12	7 30.2	46	+ 7	+ 9.3	36	42	— 0.06	5478	— 39	— 1	— 12	— 41	+ 226	— 45	5566	2	3
28	8 25.3	52	+ 8	+ 9.0	35	22	+ 0.13	5436	— 32	— 1	+ 26	— 40	+ 236	— 39	5586	2	2
95 Nov. 23	23 37.5	47	— 2	— 1.5	15	04	+ 0.11	5336	— 28	— 1	+ 22	— 7	+ 187	— 2	5507	3	3
								Nr. 54	a f								
92 Oct. 11	20 24.1	746	+ 7	+ 10.0	21.37	21.70	— 0.33	44.3038	— 64	+ 3	— 54	— 35	+ 148	+ 26	44.3062	3	3
21	22 0.4	39	+ 3	+ 5.0	27	22	+ 0.05	2995	— 70	— 5	+ 8	— 18	+ 148	+ 21	3079	3	3
93 März 12	7 40.7	46	+ 7	+ 9.2	35	42	— 0.07	2984	— 64	+ 3	— 11	— 32	+ 258	— 36	3102	2	3
28	8 35.8	52	+ 7	+ 8.8	35	22	+ 0.13	2852	— 70	— 5	+ 21	— 31	+ 324	— 30	3061	2	2
95 Nov. 25	22 36.2	54	— 2	— 0.3	17	16	+ 0.01	2938	— 48	— 4	+ 2	— 1	+ 151	— 3	3035	3	3
								Nr. 55	f l								
92 Oct. 11	20 38.6	746	+ 7	+ 9.7	21.36	21.70	— 0.34	43.4241	— 70	+ 1	— 56	— 35	+ 202	+ 26	43.4299	3	3
24	20 31.5	41	+ 2	+ 5.2	27	11	+ 0.16	4148	— 70	+ 1	+ 26	— 18	+ 203	+ 18	4308	3	3
93 März 12	7 53.7	46	+ 7	+ 9.0	35	42	— 0.07	4386	— 70	+ 1	— 11	— 31	+ 126	— 36	4365	2	3
29	7 54.0	49	+ 9	+ 10.9	39	22	+ 0.17	4360	— 70	+ 1	+ 27	— 38	+ 125	— 30	4375	2	2
96 Jan. 27	8 16.4	60	— 3	— 1.9	14	00	+ 0.14	4276	— 43	+ 1	+ 23	+ 7	+ 135	— 36	4363	2	2
								Nr. 56	f p								
92 Oct. 11	20 51.6	746	+ 7	+ 9.3	21.36	21.70	— 0.34	64.9121	— 38	+ 1	— 81	— 48	+ 355	+ 39	64.9349	3	3
26	21 23.5	52	+ 2	+ 4.0	26	19	+ 0.07	9071	— 38	+ 1	+ 17	— 21	+ 324	+ 26	9360	3	3
93 März 29	8 7.5	49	+ 9	+ 10.6	38	22	+ 0.16	9193	— 38	+ 1	+ 38	— 56	+ 255	— 45	9349	2	3
95 Nov. 27	21 49.8	49	— 1	+ 0.6	19	16	+ 0.03	9155	— 21	+ 1	+ 7	— 3	+ 298	— 7	9430	3	3
96 Febr. 17	8 8.0	60	— 2	— 0.7	17	12	+ 0.05	9082	— 21	+ 1	+ 12	+ 4	+ 259	— 38	9279	2	3

Tag			Sternzeit	Bar.	Th.	t	N	O	$N-O$	Messung	Th. F.	Gang	Oc.-St.	Temp.	Refr.	Aberr.	Abstand	R.	S.
										Nr. 57	**1p**								
1800			h m	mm	°	°	mm	mm	mm	s							s		
92	Oct.	21	20 27.4	739	+ 4	+ 6.4	21.30	21.22	+ 0.08	48.2955	− 46	− 5	+ 14	− 31	+ 192	+ 23	48.3102	3	3
		26	20 31.0	51	+ 3	+ 4.9	27	19	+ 0.08	2980	− 46	− 5	+ 14	− 24	+ 196	+ 19	3134	3	3
	Nov.	25	22 30.4	55	− 2	− 0.8	16	00	+ 0.16	2937	− 38	− 4	+ 28	+ 4	+ 178	− 3	3102	2	2
93	März	29	8 21.5	49	+ 8	+ 10.3	38	22	+ 0.16	2807	− 38	+ 4	+ 28	− 51	+ 311	− 33	3028	2	3
96	Jan.	27	8 28.4	60	− 3	− 2.0	14	00	+ 0.14	2923	− 71	+ 4	+ 25	+ 10	+ 347	− 40	3188	2	2
										Nr. 58	**1m**								
92	Oct.	21	20 41.9	739	+ 3	+ 6.3	21.30	21.22	+ 0.08	51.9539	− 38	+ 1	+ 15	− 26	+ 147	+ 24	51.9662	3	3
		26	20 50.5	51	+ 2	+ 4.6	27	19	+ 0.08	9541	− 49	+ 1	+ 15	− 19	+ 149	+ 21	9659	3	3
	Nov.	25	22 43.4	55	− 2	− 1.1	16	00	+ 0.16	9150	− 49	+ 1	+ 30	+ 5	+ 154	− 4	9587	2	2
93	März	29	8 30.0	49	+ 8	+ 10.1	37	22	+ 0.15	9426	− 49	+ 1	+ 29	− 41	+ 315	− 35	9646	2	3
96	Jan.	27	8 45.9	60	− 3	− 2.1	14	00	+ 0.14	9319	− 41	+ 1	+ 27	+ 9	+ 362	− 43	9629	2	2
										Nr. 59	**bf**								
92	Oct.	21	20 59.4	739	+ 3	+ 6.0	21.29	21.22	+ 0.07	49.9592	− 46	+ 1	+ 13	− 24	+ 145	+ 23	49.9704	3	3
		26	21 8.0	51	+ 2	+ 4.2	26	19	+ 0.07	9550	− 46	+ 1	+ 13	− 17	+ 159	+ 19	9679	3	3
	Nov.	25	22 58.9	56	− 3	− 1.4	15	00	+ 0.15	9518	− 46	+ 1	+ 27	+ 6	+ 157	− 3	9690	2	2
93	März	29	8 43.5	49	+ 8	+ 9.7	37	22	+ 0.15	9499	− 46	+ 1	+ 27	− 39	+ 369	− 38	9778	2	3
95	Nov.	27	22 7.3	49	− 1	+ 0.4	19	16	+ 0.03	9727	− 53	0	+ 5	− 2	+ 154	− 5	9826	3	3
										Nr. 60	**hp**								
95	Apr.	10	9 21.9	749	+ 14	+ 16.2	21.48	21.48	0.00	54.0079	− 37	0	0	− 52	+ 252	− 32	54.0210	3	3
	Oct.	24	21 19.4	35	+ 2	+ 4.9	27	11	+ 0.16	0066	− 37	0	+ 31	− 16	+ 237	+ 23	0304	2	2
		31	22 43.2	53	+ 3	+ 4.0	26	09	+ 0.17	9977	− 37	0	+ 33	− 13	+ 259	+ 18	0237	2	2
										Nr. 61	**bm**								
95	Oct.	31	20 25.2	753	+ 4	+ 4.2	21.26	21.09	+ 0.17	82.7633	− 37	+ 3	+ 51	− 28	+ 278	+ 26	82.7928	2	2
	Nov.	14	22 33.0	46	+ 7	+ 8.6	34	28	+ 0.06	7726	− 37	+ 3	+ 18	− 55	+ 288	+ 10	7953	3	3
		16	20 55.0	48	+ 12	+ 13.9	45	34	+ 0.11	7683	− 37	+ 3	+ 33	− 92	+ 276	+ 7	7873	2	2
		25	21 56.7	54	− 2	+ 0.2	18	16	+ 0.02	7585	− 37	+ 4	+ 6	− 1	+ 292	− 5	7844	3	3
		27	22 20.8	49	− 1	+ 0.3	19	16	+ 0.03	7622	− 37	+ 3	+ 9	− 2	+ 283	− 7	7871	3	3

Aus verstehenden Messungen ergeben sich nachfolgende Mittelwerthe ausgedrückt in Scalentheilen und in Bogensecunden, sowie die aus der inneren Uebereinstimmung berechneten wahrscheinlichen Fehler einer Abstandsmessung.

Die bei der Rechnung dieser Beobachtungen verwandten systematischen Correctionen und der Werth für einen Scalentheil sind nicht die auf Seite 40 unter II und 44 angegebenen, sondern gehören einer etwas älteren Zeit an. Die systematischen Correctionen sind nämlich die in der betreffenden Tabelle mit B I bezeichneten und der Scalenwerth ist der entsprechende $S = 40\overset{''}{.}01586 \ldots 1{,}602232$.

In Anbetracht der hierüber noch stattfindenden Unsicherheit ist es aber nicht als erforderlich betrachtet worden, auf Grund der kleinen bei Abfassung des Druckmanuscripts eingeführten Aenderungen die umständlichen Reductionen und Auflösungen der Bedingungsgleichungen noch einmal von Neuem auszuführen, weil das Endresultat dadurch wohl kaum um nennenswerthe Beträge abgeändert worden wäre. Rechnet man z. B. die grösste aller gemessenen Abstände nämlich *ap* noch einmal mit den als endgültig betrachteten Reductionswerthen, so erhält man

$$98.0521^{s} = 3923.78'' - 0.07'' = 3923.71''$$

während nebenstehende ältere Rechnung ergab

$$3923.64 + 0.03 = 3923.67$$

Die Sterngruppe erleidet dadurch also in der weitesten Ausdehnung eine Aenderung von 0.04 und die Entfernung der äussersten Sterne von der Mitte ändert sich um eine Grösse 0.02, die sich durch die Messungen mit dem Heliometer garnicht verbürgen lässt.

Abstandsmessungen im Perseus.

Nr.	Sterne	Epoche 1890 +	Scalen-theile	Zahl	Bogen-secunden	Syst. Corr.	Corrig. Abstand	w. F. einer Beob. ±	w. F. des Mittels ±
			s		"	"	"	"	"
1	a g	3.35	41.7464	4	1670.52	+ 0.11	1670.63	0.115	0.058
2	b g	3.71	40.9695	4	1639.43	+ 0.10	1639.53	0.107	0.054
3	c g	8.73	24.3068	4	972.66	+ 0.14	972.80	0.162	0.081
4	d g	8.73	23.9936	4	960.13	+ 0.14	960.27	0.131	0.066
5	e g	3.85	14.0781	3	563.35	+ 0.22	563.57	0.153	0.088
6	f g	3.85	20.1471	4	806.20	+ 0.17	806.37	0.095	0.048
7	g h	3.36	9.8615	3	394.62	+ 0.23	394.85	0.115	0.066
8	g i	3.36	23.7476	3	950.28	+ 0.14	950.42	0.176	0.101
9	g k	3.41	26.3148	3	1053.01	+ 0.12	1053.13	0.064	0.037
10	g l	3.42	24.0645	3	962.96	+ 0.14	963.10	0.026	0.015
11	g m	8.42	42.3040	3	1692.83	+ 0.11	1692.94	0.080	0.046
12	g n	3.97	36.7910	8	1472.22	+ 0.10	1472.32	0.177	0.102
13	g o	8.42	44.2803	3	1771.92	+ 0.12	1772.04	0.122	0.070
14	g p	3.42	56.5988	3	2264.85	+ 0.08	2264.93	0.144	0.083
15	a b	4.74	14.9538	5	598.39	+ 0.22	598.61	0.016	0.007
16	a c	3.74	19.0629	3	762.82	+ 0.18	763.00	0.072	0.042
17	a d	3.41	23.9704	3	959.20	+ 0.14	959.34	0.022	0.013
18	a e	3.74	30.7138	4	1229.04	+ 0.11	1229.15	0.058	0.029
19	a p	3.57	98.0521	5	3928.64	+ 0.03	3923.67	0.169	0.076
20	b c	3.43	17.0866	3	683.74	+ 0.20	683.94	0.131	0.076
21	b d	3.43	31.5963	3	1264.35	+ 0.11	1264.46	0.082	0.047
22	b h	4.05	40.4547	4	1618.83	+ 0.10	1618.93	0.184	0.092
23	b i	4.74	48.1882	5	1928.29	+ 0.12	1928.41	0.104	0.046
24	c d	3.77	17.8518	3	714.36	+ 0.20	714.56	0.123	0.071
25	c e	3.95	17.6623	8	706.77	+ 0.20	706.97	0.213	0.123
26	c h	3.95	25.7553	3	1030.62	+ 0.13	1030.75	0.047	0.027
27	c i	3.95	36.6186	8	1465.32	+ 0.10	1465.42	0.038	0.022
28	d e	3.95	9.9389	3	397.71	+ 0.23	397.94	0.049	0.028
29	d f	8.96	20.3878	8	815.84	+ 0.17	816.01	0.112	0.065
30	e f	3.31	15.9006	8	636.28	+ 0.21	636.49	0.182	0.105
31	e h	3.31	22.0151	3	880.95	+ 0.15	881.10	0.068	0.039
32	e l	3.31	33.4496	3	1338.52	+ 0.12	1338.64	0.077	0.044
33	f l	3.31	25.0991	3	1004.36	+ 0.13	1004.49	0.091	0.052
34	f m	4.55	37.7744	5	1511.57	+ 0.10	1511.67	0.045	0.020
35	b i	4.55	14.2501	3	570.23	+ 0.22	570.45	0.139	0.080
36	h k	3.71	18.8023	3	752.39	+ 0.18	752.57	0.184	0.106
37	h l	3.66	28.5364	3	1141.91	+ 0.12	1142.03	0.159	0.092
38	h n	3.84	37.8569	3	1514.88	+ 0.10	1514.98	0.111	0.064
39	i k	3.72	9.2948	3	371.94	+ 0.23	372.17	0.013	0.007
40	i l	3.65	35.1509	3	1406.59	+ 0.10	1406.69	0.083	0.048
41	i o	3.05	27.3734	3	1095.37	+ 0.12	1095.49	0.034	0.020
42	k l	8.98	30.3931	8	1216.21	+ 0.12	1216.33	0.138	0.080
43	k n	3.05	30.9583	3	1238.62	+ 0.12	1238.74	0.086	0.050

Nr.	Sterne	Epoche 1890 +	Scalentheile	Zahl	Bogensecunden	Syst. Corr.	Corrig. Abstand	w. F. einer Beob. ±	w. F. des Mittels ±
			s						
44	k o	3.05	19.2900	3	771.″91	+ 0.″18	772.″09	0.″090	0.″052
45	l m	3.05	18.4674	3	738.99	+ 0.19	739.18	0.045	0.026
46	l n	5.07	15.8412	3	633.90	+ 0.21	634.11	0.162	0.093
47	l o	3.19	39.3341	3	1573.99	+ 0.10	1574.09	0.024	0.014
48	m n	3.05	17.0080	3	680.59	+ 0.20	680.79	0.093	0.054
49	m p	4.22	38.0118	5	1521.07	+ 0.10	1521.17	0.208	0.093
50	n o	3.79	31.1582	3	1246.82	+ 0.12	1246.94	0.082	0.047
51	n p	3.59	24.7138	5	988.94	+ 0.13	989.07	0.206	0.093
52	o p	3.52	25.1958	3	1008.23	+ 0.13	1008.36	0.111	0.064
53	a i	3.58	55.5567	5	2223.15	+ 0.09	2223.24	0.211	0.094
54	a f	3.58	44.3068	5	1772.97	+ 0.12	1773.09	0.134	0.060
55	f i	3.58	43.4342	5	1738.06	+ 0.11	1738.17	0.192	0.086
56	f p	4.18	64.9357	5	2598.46	0.00	2598.46	0.148	0.066
57	i p	3.56	48.3111	5	1933.21	+ 0.12	1933.33	0.157	0.070
58	i m	3.56	51.9637	5	2079.37	+ 0.11	2079.48	0.123	0.055
59	h f	3.53	49.9735	5	1999.73	+ 0.12	1999.85	0.172	0.077
60	h p	5.64	54.0250	3	2161.86	+ 0.10	2161.96	0.131	0.076
61	h m	5.88	82.7894	5	3312.89	— 0.02	3312.87	0.121	0.054

Theilt man dieses Verzeichniss der wahrscheinlichen Fehler einer Distanzmessung nach der Grösse der Abstände in Gruppen ab, nämlich folgendermaassen

Gruppe	Abstände	Zahl	Mittl. Abstd.	w. F. 1 Beob.	$\mathrm{I} = \sqrt{\frac{4000}{s}}$	Product v I	$\mathrm{II} = \sqrt[4]{\frac{4000}{s}}$	Product v II
1	bis 600″	6	483″	± 0.″081	2.88	± 0.″23	1.70	± 0.14
2	600— 800	10	768	0.130	2.28	0.30	1.51	0.20
3	800—1000	9	988	0.111	2.01	0.22	1.42	0.16
4	1000—1200	6	1055	0.084	1.95	0.16	1.40	0.10
5	1200—1400	6	1255	0.087	1.79	0.16	1.34	0.12
6	1400—1600	7	1494	0.098	1.64	0.16	1.28	0.13
7	1600—1800	7	1700	0.134	1.53	0.21	1.24	0.17
8	1800—2400	7	2083	0.149	1.39	0.21	1.18	0.18
9	2400—4000	3	3277	0.146	1.11	0.16	1.05	0.15

so zeigt sich hier wieder dieselbe Erscheinung wie bei der Beobachtung des Löwenbogens, (Siehe vorliegende Abhandlung Seite 27), dass die w. F. einer Distanzmessung nicht im Verhältniss der Quadratwurzel der Bogenlänge anwachsen, sondern dass die grösseren Abstände verhältnissmässig genauer als nach diesem Bildungsgesetz ausfallen. Auch hier würde wieder die Reduction mit dem theoretisch nicht begründeten Factor $\sqrt[4]{\frac{4000}{s}}$ eine bessere Uebereinstimmung hervorbringen.

Um aber die ohnehin schon mühsame Ausgleichung der Beobachtungen nicht noch mehr zu erschweren, ist wie früher bei der Praesepe kein Unterschied in der Genauigkeit der Messungen der einzelnen Distanzen angenommen worden.

Bei der Ausgleichung der Abstände ist wie früher schon bemerkt, in der Weise vorgegangen, dass zunächst zwei grosse über die ganze Gruppe gehende nebeneinanderliegende Vierecke mit ihren Diagonalen und zwei lange die äussersten Punkte verbindenden Linien für sich ausgeglichen sind und nachdem auf diese Weise sechs Punkte durch dreizehn Linien gegeneinander festgelegt waren sind die Bedingungsgleichungen für die übrigen Punkte nachträglich ausgeglichen worden.

Auf diese Weise erreicht man einerseits den Vortheil einer bedeutenden Vereinfachung der Ausgleichung gegenüber der ungeheueren Arbeit, welche die Ausgleichung der Praesepe-Triangulation veranlasste und ferner kommen dabei auch die in grösserer Anzahl veranstalteten Messungen der Grundlinien mehr zur Geltung.

Ausgleichung der Hauptfigur.

Die vorläufigen Werthe für die Abstände der Sterne sind aus den genäherten Rectascensionen und Declinationen für 1890 auf Seite 4 dieser Abhandlung durch strenge sphärische Rechnung abgeleitet worden. Sind α_1 und α_2 die Rectascensionen, δ_1 und δ_2 die Declinationen zweier durch eine Distanzmessung miteinander verbundenen Sterne 1 und 2, s der Abstand, p der Positionswinkel, δ das Mittel beider Declinationen, $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ die Verbesserungen der Rectascension und Declination, $x = \Delta\alpha \cos\delta$, $y = \Delta\delta$, Δs die Verbesserung des Abstandes, so hat man die Gleichung (Vergl. Theil IV Seite 129)

$$\Delta s = + x_2 \sin p - x_1 \sin p + y_2 \cos p - y_1 \cos p$$

Ungeachtet der hohen Declination des Perseus konnte $\cos\delta$ für die ganze Gruppe constant angenommen werden, denn die äussersten Declinationen sind

Grösste Declination für Sternpaar Nr. 34	*fm*	56° 50.'8	cos δ 0.5469	+ 0.0067
Kleinste „ 41	*io*	56 21.4	0.5536	
			Mittel 0.550	

Für Verbesserungen der angenommenen Abstände im Betrage von einer Secunde entstehen in der Ausgleichung also Fehler von höchstens 0."0034 wenn für $\cos\delta$ der Mittelwerth 0.550 in der ganzen Gruppe angenommen wird.

Demnach führt die Ausgleichung des grossen Sechsecks *a b i p m f* auf folgende 13 Bedingungsgleichungen

Nr.	Sterne	Beob. + syst. Corr.	Vorläuf. Annahme	Beob.-Rechn. n									
1	15 ab	598.61	598.30	+ 0.41	=	− 0.336	x a	+ 0.336	x b	+ 0.942	y a	− 0.942	y b
2	23 bi	1928.41	1928.31	+ 0.10		− 0.999	b	+ 0.999	i	+ 0.049	b	− 0.049	i
3	57 ip	1933.33	1931.86	+ 1.47		− 0.936	i	+ 0.936	p	− 0.351	i	+ 0.351	p
4	49 mp	1521.17	1519.41.	+ 1.76		− 0.608	m	+ 0.608	p	+ 0.794	m	− 0.794	p
5	34 fm	1511.67	1513.00	− 1.33		− 0.985	f	+ 0.985	m	− 0.174	f	+ 0.174	m
6	54 af	1773.09	1771.44	+ 1.65		− 0.839	a	+ 0.839	f	− 0.544	a	+ 0.544	f
7	53 ai	2223.24	2222.72	+ 0.52		− 0.955	a	+ 0.955	i	+ 0.296	a	− 0.296	i
8	59 bf	1999.85	1998.39	+ 1.46		− 0.645	b	+ 0.645	f	− 0.764	b	+ 0.764	f
9	58 im	2079.48	2077.86	+ 1.62		− 0.421	i	+ 0.421	m	− 0.907	i	+ 0.907	m
10	56 fp	2598.46	2598.49	− 0.03		− 0.932	f	+ 0.932	p	+ 0.363	f	− 0.363	p
11	19 ap	3923.67	3921.96	+ 1.71		− 1.000	a	+ 1.000	p	− 0.005	a	+ 0.005	p
12	61 bm	3312.87	3312.02	+ 0.85		− 0.841	b	+ 0.841	m	− 0.541	b	+ 0.541	m
13	55 bi	1738.17	1737.84	+ 0.33		− 0.360	f	+ 0.360	i	+ 0.933	f	− 0.933	i

Die Coordinaten eines der 6 Punkte, den man als Ausgangspunkt betrachtet, sind willkürlich, man kann also setzen

$$x_a = 0 \qquad y_a = 0$$

und ferner kann man noch annehmen, dass die längste Linie *ap* durch die Ausgleichung des Netzes keine Drehung erfahren soll, da der Positionswinkel *ap* doch noch durch besondere Beobachtungen bestimmt werden muss, es wird daher noch gesetzt

$$y_p = y_a = 0$$

Es bleiben also die Gleichungen

1	+ 0.41	=			+ 0.336	x b		y	− 0.942	y b
2	+ 0.10		− 0.999	x b	+ 0.999	i	+ 0.049	b	− 0.049	i
3	+ 1.47		− 0.936	i	+ 0.936	p	− 0.351	i		
4	+ 1.76		− 0.608	m	+ 0.608	p	+ 0.794	m		
5	− 1.33		− 0.985	f	+ 0.985	m	− 0.174	f	+ 0.174	m
6	+ 1.65				+ 0.839	f			+ 0.544	f
7	+ 0.52				+ 0.955	i			− 0.296	i
8	+ 1.46		− 0.645	b	+ 0.645	f	− 0.764	b	+ 0.764	f
9	+ 1.62		− 0.421	i	+ 0.421	m	− 0.907	i	+ 0.907	m
10	− 0.03		− 0.932	f	+ 0.932	p	+ 0.363	f		
11	+ 1.71				+ 1.000	p				
12	+ 0.85		− 0.841	b	+ 0.841	m	− 0.541	b	+ 0.541	m
13	+ 0.33		− 0.360	f	+ 0.360	i	+ 0.933	f	− 0.933	i

Aus diesen 13 Gleichungen mit 9 Unbekannten folgen die Endgleichungen, in welchen die gleichlautenden Ziffern links von der Diagonale fortgelassen sind.

			xb	xf	xi	xm	xp	yb	yf	yi	ym
1	− 1.619	=	+ 2.234	− 0.416	− 0.998	− 0.707		+ 0.582	− 0.493	+ 0.049	− 0.455
2	+ 3.548			+ 3.089	− 0.130	− 0.970	− 0.869	− 0.493	+ 0.446	+ 0.336	− 0.171
3	− 1.842				+ 3.093	− 0.177	− 0.876	+ 0.049	+ 0.336	+ 0.043	− 0.382
4	− 0.983					+ 2.224	− 0.370	− 0.455	− 0.171	− 0.382	+ 0.525
5	+ 4.128						+ 3.115		+ 0.338	− 0.329	+ 0.483
6	− 1.956							+ 1.766	− 0.584		− 0.293
7	+ 2.540								+ 1.913	− 0.871	− 0.030
8	− 2.452									+ 1.907	− 0.828
9	+ 3.095										+ 1.778

Die Auflösung der Endgleichungen ergiebt die Werthe der Unbekannten

$xb =$	$+0''.263$	$yb =$	$-0''.342$
f	$+1.816$	f	$+0.256$
i	$+0.346$	i	-0.649
m	$+0.311$	m	$+1.156$
p	$+1.693$		

und die Substitution dieser 9 Verbesserungen in die obenstehenden Bedingungsgleichungen giebt

	Beobachtung	Rechnung	Beob.-Rechn.
1	+ 0″.41	+ 0″.41	0″.00
2	+ 0.10	+ 0.10	0.00
3	+ 1.47	+ 1.49	− 0.02
4	+ 1.76	+ 1.77	− 0.01
5	− 1.33	− 1.33	0.00
6	+ 1.65	+ 1.66	− 0.01
7	+ 0.52	+ 0.52	0.00
8	+ 1.46	+ 1.46	0.00
9	+ 1.62	+ 1.62	0.00
10	− 0.03	− 0.02	− 0.01
11	+ 1.71	+ 1.69	+ 0.02
12	+ 0.85	+ 0.85	0.00
13	+ 0.33	+ 0.32	+ 0.01

Die Ausgleichung führt also zu dem überraschenden Resultat, dass die grossen Distanzen überall innerhalb weniger hundertel Secunden dargestellt werden. Nachdem nun die sechs Hauptpunkte fest und unabänderlich miteinander in Verbindung gebracht sind, sind die übrigen Punkte durch eine Ausgleichung zweiter Ordnung einzuschalten.

Die Bedingungsgleichnngen der noch übrigbleibenden 48 Abstände lauten in ihrer ursprünglichen Form folgendermaassen

Lfde. Nr.	Abstd. Nr.	Beob. + syst. Corr.	Rechn.	Beob.-Rechn. n					
1	1	1670″.63	1670″.55	+ 0″.08	=	− 0.995 *x a*	+ 0.995 *x g*	− 0.104 *y a*	+ 0.104 *y g*
2	2	1639.53	1639.40	+ 0.13		− 0.893 *b*	+ 0.893 *g*	− 0.450 *b*	+ 0.450 *g*
3	3	972.80	972.43	+ 0.37		− 0.941 *c*	+ 0.941 *g*	− 0.337 *c*	+ 0.337 *g*
4	4	960.27	961.66	− 1.39		− 0.916 *d*	+ 0.916 *g*	+ 0.401 *d*	− 0.401 *g*
5	5	563.57	564.39	− 0.82		− 0.898 *e*	+ 0.898 *g*	+ 0.441 *e*	− 0.441 *g*
6	6	806.37	807.08	− 0.71		− 0.210 *f*	+ 0.210 *g*	+ 0.978 *f*	− 0.978 *g*
7	7	894.85	895.28	− 0.43		− 0.287 *g*	+ 0.287 *h*	+ 0.958 *g*	− 0.958 *h*
8	8	950.42	949.28	+ 1.14		− 0.481 *g*	+ 0.481 *i*	+ 0.877 *g*	− 0.877 *i*
9	9	1053.13	1051.81	+ 1.32		− 0.758 *g*	+ 0.758 *k*	+ 0.653 *g*	− 0.653 *k*
10	10	963.10	962.65	+ 0.45		− 0.836 *g*	+ 0.836 *l*	− 0.548 *g*	+ 0.548 *l*
11	11	1692.94	1691.86	+ 1.08		− 0.783 *g*	+ 0.783 *m*	− 0.622 *g*	+ 0.622 *m*
12	12	1472.32	1472.12	+ 0.20		− 0.966 *g*	+ 0.966 *n*	− 0.257 *g*	+ 0.257 *n*
13	13	1772.04	1770.81	+ 1.23		− 0.874 *g*	+ 0.874 *o*	+ 0.486 *g*	− 0.486 *o*

Lfde. Nr.	Abstd. Nr.	Beob. + syst. Corr.	Rechn.	Beob.-Rechn. n					
14	14	2264.93	2263.40	+ 1.53	=	− 0.998 *xg*	+ 0.998 *xp*	+ 0.068 *yg*	− 0.068 *yp*
15	16	763.00	763.29	− 0.29		− 0.979 *a*	+ 0.979 *c*	+ 0.202 *a*	− 0.202 *c*
16	17	959.34	958.09	+ 1.25		− 0.812 *a*	+ 0.812 *d*	− 0.584 *a*	+ 0.584 *d*
17	18	1229.15	1228.15	+ 1.00		− 0.939 *a*	+ 6.939 *e*	− 0.344 *a*	+ 0.344 *e*
18	20	683.94	684.01	− 0.07		− 0.801 *b*	+ 0.801 *c*	− 0.598 *b*	+ 0.598 *c*
19	21	1264.46	1263.50	+ 0.96		− 0.458 *b*	+ 0.458 *d*	− 0.889 *b*	+ 0.889 *d*
20	22	1618.93	1620.03	− 1.10		− 0.975 *b*	+ 0.975 *h*	− 0.221 *b*	+ 0.221 *h*
21	24	714.56	714.67	− 0.11		− 0.045 *c*	+ 0.045 *d*	− 0.999 *c*	+ 0.999 *d*
22	25	706.97	706.10	+ 0.57		− 0.577 *c*	+ 0.577 *e*	− 0.817 *c*	+ 0.817 *e*
23	26	1030.75	1031.29	− 0.54		− 0.999 *c*	+ 0.999 *h*	+ 0.049 *c*	− 0.049 *h*
24	27	1465.42	1464.36	+ 1.06		− 0.939 *c*	+ 0.939 *i*	+ 0.344 *c*	− 0.344 *i*
25	28	397.94	398.51	− 0.57		− 0.939 *d*	+ 0.939 *e*	+ 0.343 *d*	− 0.343 *e*
26	29	816.01	815.60	+ 0.41		− 0.878 *d*	+ 0.878 *f*	− 0.479 *d*	+ 0.479 *f*
27	30	636.49	635.89	+ 0.60		− 0.528 *e*	+ 0.528 *f*	− 0.850 *e*	+ 0.850 *f*
28	31	881.10	882.49	− 1.39		− 0.703 *e*	+ 0.703 *h*	+ 0.711 *e*	− 0.711 *h*
29	32	1338.64	1339.02	− 0.38		− 0.978 *e*	+ 0.978 *l*	− 0.208 *e*	+ 0.208 *l*
30	33	1004.49	1006.11	− 1.62		− 0.966 *f*	+ 0.966 *l*	+ 0.259 *f*	− 0.259 *l*
31	35	570.45	568.93	+ 1.52		− 0.603 *h*	+ 0.603 *i*	+ 0.798 *h*	− 0.798 *i*
32	36	752.57	750.46	+ 2.11		− 0.912 *h*	+ 0.912 *k*	+ 0.410 *h*	− 0.410 *k*
33	37	1142.03	1141.32	+ 0.71		− 0.607 *h*	+ 0.607 *l*	− 0.795 *h*	+ 0.795 *l*
34	38	1514.98	1514.27	+ 0.71		− 0.866 *h*	+ 0.866 *n*	− 0.500 *h*	+ 0.500 *n*
35	39	372.17	371.98	+ 0.19		− 0.920 *i*	+ 0.920 *k*	− 0.393 *i*	+ 0.393 *k*
36	40	1406.69	1405.64	+ 1.05		− 0.250 *i*	+ 0.250 *l*	− 0.968 *i*	+ 0.968 *l*
37	41	1095.49	1094.78	+ 0.71		− 1.000 *i*	+ 1.000 *o*	+ 0.026 *i*	− 0.026 *o*
38	42	1216.33	1214.85	+ 1.48		− 0.009 *k*	+ 0.009 *l*	− 1.000 *k*	+ 1.000 *l*
39	43	1238.74	1237.32	+ 1.42		− 0.509 *k*	+ 0.509 *n*	− 0.860 *k*	+ 0.860 *n*
40	44	772.09	771.75	+ 0.34		− 0.974 *k*	+ 0.974 *o*	+ 0.226 *k*	− 0.226 *o*
41	45	739.18	738.65	+ 0.53		− 0.705 *l*	+ 0.705 *m*	− 0.709 *l*	+ 0.709 *m*
42	46	634.11	634.39	− 0.28		− 0.972 *l*	+ 0.972 *n*	+ 0.237 *l*	− 0.237 *n*
43	47	1574.09	1572.99	+ 1.10		− 0.469 *l*	+ 0.469 *o*	+ 0.883 *l*	− 0.883 *o*
44	48	680.79	680.78	+ 0.01		− 0.139 *m*	+ 0.139 *n*	+ 0.990 *m*	− 0.990 *n*
45	50	1246.94	1245.10	+ 1.84		− 0.095 *n*	+ 0.095 *o*	+ 0.995 *n*	− 0.995 *o*
46	51	989.07	987.14	+ 1.93		− 0.843 *n*	+ 0.843 *p*	+ 0.539 *n*	− 0.539 *p*
47	52	1008.36	1007.48	+ 0.88		− 0.712 *o*	+ 0.712 *p*	− 0.702 *o*	+ 0.702 *p*
48	60	2161.96	2159.69	+ 2.27		− 0.995 *h*	+ 0.995 *p*	− 0.104 *h*	+ 0.104 *p*

Wenn aber hierin die bereits bekannten Werthe

$xa =$	0.000	$ya =$	0.000
b	+ 0.263	b	− 0.342
f	+ 1.816	f	+ 0.256
i	+ 0.346	i	− 0.649
m	+ 0.311	m	+ 1.156
p	+ 1.693	p	0.000

eingesetzt und die zugehörigen Coëfficienten beseitigt werden, so bleiben die Bedingungsgleichungen nachfolgender Gestalt übrig:

1	+ 0.08 =	*x*	+ 0.995 *xg*	*y*	+ 0.104 *yg*
2	+ 0.21		+ 0.893 *g*		+ 0.450 *g*
3	+ 0.37	− 0.941 *c*	+ 0.941 *g*	− 0.337 *c*	+ 0.337 *g*
4	− 1.39	− 0.916 *d*	+ 0.916 *g*	+ 0.401 *d*	− 0.401 *g*
5	− 0.82	− 0.898 *e*	+ 0.898 *g*	+ 0.441 *e*	− 0.441 *g*
6	− 0.58		+ 0.210 *g*		− 0.978 *g*
7	− 0.43	− 0.287 *g*	+ 0.287 *h*	+ 0.958 *g*	− 0.958 *h*
8	+ 0.41	− 0.481 *g*		+ 0.877 *g*	
9	+ 1.32	− 0.758 *g*	+ 0.758 *k*	+ 0.653 *g*	− 0.653 *k*

10	+ 0.45	=	− 0.836 xg	+ 0.836 xl	− 0.548 yg	+ 0.548 yl
11	+ 0.12		− 0.783 g	+	− 0.622 g	
12	+ 0.20		− 0.966 g	+ 0.966 n	− 0.257 g	+ 0.257 n
13	+ 1.23		− 0.874 g	+ 0.874 o	+ 0.486 g	− 0.486 o
14	− 0.16		− 0.998 g		+ 0.068 g	
15	− 0.29			+ 0.979 c		− 0.202 c
16	+ 1.25			+ 0.812 d		+ 0.584 d
17	+ 1.00			+ 0.939 e		+ 0.344 e
18	− 0.06			+ 0.801 c		+ 0.598 c
19	+ 0.78			+ 0.458 d		+ 0.889 d
20	− 0.92			+ 0.975 h		+ 0.221 h
21	− 0.11		− 0.045 c	+ 0.045 d	− 0.999 c	+ 0.999 d
22	+ 0.57		− 0.577 c	+ 0.577 e	− 0.817 c	+ 0.817 e
23	− 0.54		− 0.999 c	+ 0.999 h	+ 0.049 c	− 0.049 h
24	+ 0.51		− 0.939 c		+ 0.344 c	
25	− 0.57		− 0.939 d	+ 0.939 e	+ 0.343 d	− 0.348 e
26	− 1.31		− 0.878 d		− 0.479 d	
27	− 0.58		− 0.528 e		− 0.850 e	
28	− 1.39		− 0.703 e	+ 0.703 h	+ 0.711 e	− 0.711 h
29	− 0.38		− 0.978 e	+ 0.978 l	− 0.208 e	+ 0.208 l
30	+ 0.07			+ 0.966 l		− 0.259 l
31	+ 0.79		− 0.603 h		+ 0.798 h	
32	+ 2.11		− 0.912 h	+ 0.912 k	+ 0.410 h	− 0.410 k
33	+ 0.71		− 0.607 h	+ 0.607 l	− 0.795 h	+ 0.795 l
34	+ 0.71		− 0.866 h	+ 0.866 n	− 0.500 h	+ 0.500 n
35	+ 0.25			+ 0.920 k		+ 0.393 k
36	+ 0.51			+ 0.250 l		+ 0.968 l
37	+ 1.07			+ 1.000 o		− 0.026 o
38	+ 1.48		− 0.009 k	+ 0.009 l	− 1.000 k	+ 1.000 l
39	+ 1.42		− 0.509 k	+ 0.509 n	− 0.860 k	+ 0.860 n
40	+ 0.34		− 0.974 k	+ 0.974 o	+ 0.226 k	− 0.226 o
41	− 0.51		− 0.705 l		− 0.709 l	
42	− 0.28		− 0.972 l	+ 0.972 n	+ 0.237 l	− 0.237 n
43	+ 1.10		− 0.469 l	+ 0.469 o	+ 0.883 l	− 0.883 o
44	− 1.09			+ 0.139 n		− 0.990 n
45	+ 1.84		− 0.095 n	+ 0.095 o	+ 0.995 n	− 0.995 o
46	+ 0.50		− 0.848 n		+ 0.539 n	
47	− 0.33		− 0.972 o		− 0.702 o	
48	+ 0.58		− 0.995 h		− 0.104 h	

Die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate führt auf nachstehende 18 Gleichungen mit 18 Unbekannten:

18 Gleichungen mit 18 Unbekannten.

n	xc	xd	xe	xg	xh	xk	xl	xn	xo	yc	yd	ye	yg	yh	yk	yl	yn	yo
− 0.914	+ 4.718	− 0.020	− 0.333	− 0.885	− 0.998					+ 0.712	− 0.015	− 0.471	− 0.317	+ 0.049				
+ 1.325		+ 3.381	− 0.882	− 0.839						− 0.045	+ 0.658	+ 0.322	+ 0.367					
+ 3.121			+ 4.632	− 0.806	− 0.494		− 0.956			− 0.471	+ 0.322	+ 0.228	+ 0.396	+ 0.500		− 0.203		
− 4.168				+ 9.254	− 0.082	− 0.575	− 0.699	− 0.933	− 0.764	− 0.317	+ 0.367	+ 0.396	− 0.638	+ 0.275	+ 0.495	− 0.158	− 0.248	+ 0.425
− 6.559					+ 5.827	− 0.832	− 0.368	− 0.750		+ 0.049		+ 0.500	+ 0.275	− 0.445	+ 0.374	− 0.488	− 0.433	
+ 2.088						+ 3.461		− 0.259	− 0.949				+ 0.495	+ 0.374	− 0.280	− 0.009	− 0.438	+ 0.220
+ 0.760							+ 4.681	− 0.915	− 0.220			− 0.203	− 0.458	− 0.483	− 0.009	+ 1.001	+ 0.230	+ 0.414
+ 0.511								+ 3.626	− 0.009				− 0.248	− 0.433	− 0.438	+ 0.230	+ 0.202	+ 0.095
+ 3.488									+ 3.887				+ 0.425		+ 0.220	+ 0.414	+ 0.095	− 0.497
− 0.310										+ 2.298	− 0.998	− 0.667	− 0.114	− 0.002				
+ 1.187											+ 2.637	− 0.118	− 0.161					
+ 0.228												+ 2.369	− 0.194	− 0.506		− 0.043		
+ 2.738													+ 4.716	− 0.918	− 0.426	− 0.300	− 0.066	− 0.236
+ 1.740														+ 3.174	− 0.168	− 0.682	− 0.250	
− 4.253															+ 2.539	− 1.000	− 0.740	− 0.051
+ 3.955																+ 4.318	− 0.056	− 0.780
+ 4.873																	+ 3.373	− 0.990
− 3.273																		+ 2.551

Resultat der Elimination

xc =	− 0.319	yc =	+ 0.325
d	+ 1.415	d	+ 0.143
e	+ 0.845	e	+ 0.208
g	− 0.007	g	+ 0.347
h	− 0.815	h	+ 0.530
k	+ 0.646	k	− 0.998
l	+ 0.316	l	+ 0.472
n	− 0.001	n	+ 1.018
o	+ 0.931	o	− 0.655

Die Darstellung der einzelnen Abstände gestaltet sich nach Einsetzen vorstehender Wertho folgendermaassen:

Nr. der Gleichung	Abstd.	Beob.	Rechn.	Beob.-Rechn.	Nr. der Gleichung	Abstd.	Beob.	Rechn.	Beob.-Rechn.
1	1	+ 0″.08	+ 0″.03	+ 0″.05	25	28	— 0″.57	— 0″.56	— 0″.01
2	2	+ 0.21	+ 0.15	+ 0.06	26	29	— 1.31	— 1.31	0.00
3	3	+ 0.37	+ 0.30	+ 0.07	27	30	— 0.58	— 0.62	+ 0.04
4	4	— 1.39	— 1.38	— 0.01	28	31	— 1.39	— 1.40	+ 0.01
5	5	— 0.82	— 0.83	+ 0.01	29	32	— 0.38	— 0.46	+ 0.08
6	6	— 0.58	— 0.34	— 0.24	30	33	+ 0.07	+ 0.18	— 0.11
7	7	— 0.43	— 0.41	— 0.02	31	35	+ 0.79	+ 0.91	— 0.12
8	8	+ 0.41	+ 0.31	+ 0.10	32	36	+ 2.11	+ 1.96	+ 0.15
9	9	+ 1.32	+ 1.37	— 0.05	33	37	+ 0.71	+ 0.64	+ 0.07
10	10	+ 0.45	+ 0.34	+ 0.11	34	38	+ 0.71	+ 0.95	— 0.24
11	11	+ 0.12	— 0.21	+ 0.33	35	39	+ 0.25	+ 0.20	+ 0.05
12	12	+ 0.20	+ 0.18	+ 0.02	36	40	+ 0.51	+ 0.54	— 0.03
13	13	+ 1.23	+ 1.31	— 0.08	37	41	+ 1.07	+ 0.95	+ 0.12
14	14	— 0.16	+ 0.03	— 0.19	38	42	+ 1.48	+ 1.47	+ 0.01
15	16	— 0.29	— 0.38	+ 0.09	39	43	+ 1.42	+ 1.40	+ 0.02
16	17	+ 1.25	+ 1.23	+ 0.02	40	44	+ 0.34	+ 0.20	+ 0.14
17	18	+ 1.00	+ 0.87	+ 0.13	41	45	— 0.51	— 0.56	+ 0.05
18	20	— 0.06	— 0.06	0.00	42	46	— 0.28	— 0.44	+ 0.16
19	21	+ 0.78	+ 0.78	0.00	43	47	+ 1.10	+ 0.98	+ 0.12
20	22	— 0.92	— 0.68	— 0.24	44	48	— 1.09	— 1.01	— 0.08
21	24	— 0.11	— 0.10	— 0.01	45	50	+ 1.84	+ 1.75	+ 0.09
22	25	+ 0.57	+ 0.58	— 0.01	46	51	+ 0.50	+ 0.55	— 0.05
23	26	— 0.54	— 0.51	— 0.03	47	52	— 0.33	— 0.44	+ 0.11
24	27	+ 0.51	+ 0.41	+ 0.10	48	60	+ 0.58	+ 0.76	— 0.18

Hier stollt sich wieder durchschnittlich eine recht gute Darstellung der einzelnen Abstände heraus, aber doch nicht in dem Maasse wie bei den ganz grossen Abständen im Sechseck. Die durch ihre Grösse etwas auffallenden übrig bleibenden Fehler sind die nachfolgenden:

Lfde. Nr.	Abstand Nr.	Sterne	Abstand	Beob.-Rechn.
6	6	*fg*	807″	— 0″.24
11	11	*gm*	1692	+ 0.33
20	22	*bc*	684	— 0.24
34	38	*hn*	1514	— 0.24

Alle Messungen und Roductionon für diese Sternpaare sind wiederholt geprüft worden, aber es hat sich kein Fehler herausgestellt.

Ordnot man obige 48 Abstände nach ihrer Grösse, so erhält man die Tabelle:

Lfde. Nr.	Abstand Nr.	Abstand	Beob.-Rechn.	Mittel
85	89	372″	+ 0″.05	
7	7	395	— 0.02	
25	28	398	— 0.01	— 0″.02
5	5	564	+ 0.01	
31	35	570	— 0.12	
42	46	634	+ 0.16	
27	30	636	+ 0.04	
44	48	681	— 0.08	
18	20	684	0.00	
22	25	707	— 0.01	
21	24	715	— 0.01	+ 0.05
41	45	739	+ 0.05	
32	36	753	+ 0.15	
15	16	763	+ 0.09	
40	44	772	+ 0.14	
6	6	806	— 0.24	
26	29	816	0.00	
28	31	881	+ 0.01	
8	8	950	+ 0.10	
16	17	959	+ 0.02	0.00
4	4	960	— 0.01	
10	10	963	+ 0.11	
8	9	973	+ 0.07	
46	51	989	— 0.05	
30	33	1004	— 0.11	
47	52	1008	+ 0.11	
23	26	1030	— 0.03	
9	9	1053	— 0.05	+ 0.02
37	41	1095	+ 0.12	
33	37	1142	+ 0.07	
38	42	1216	+ 0.01	
17	18	1229	+ 0.13	
39	43	1239	+ 0.02	
45	50	1247	+ 0.09	+ 0.06
19	21	1264	0.00	
29	32	1339	+ 0.08	
36	40	1407	— 0.03	
24	27	1465	+ 0.10	
12	12	1472	+ 0.02	— 0.01
34	38	1515	— 0.24	
43	47	1574	+ 0.12	
20	22	1619	— 0.24	
2	2	1640	+ 0.06	
1	1	1671	+ 0.05	
11	11	1693	+ 0.33	— 0.04
13	13	1772	— 0.08	
48	60	2162	— 0.18	
14	14	2265	— 0.19	

Die Mittelwerthe für die einzelnen Gruppen sind nur geringfügig und zeigen mehrere Zeichenwechsel, so dass von einem regelmässigem Zusammenhange mit der Grösse des Abstandes nicht die Rede sein kann. In der letzten etwas weiter gefassten Gruppe wird der Einfluss der beiden letzten gleichlautenden Fehler

durch den dem Abstand 11 entsprechenden nahe aufgehoben. Bildet man in vorstehender Tabelle die Summe der Fehlerquadrate und rechnet daraus den wahrscheinlichen Fehler der Messung einer Linie ohne Rücksicht auf ihre Länge, so erhält man

$$\text{w. F. einer Seitenlänge} = 0.6745 \sqrt{\frac{0.6015}{48-18}} = \pm 0''.095$$

Bei der Praesepe-Triangulation hatte sich der Fehler einer im Ganzen ausgeglichenen Linie etwas grösser herausgestellt nämlich $\pm 0''.115$.

Das Gesammtresultat der Ausgleichung des Sechsecks und der übrigen Figuren und die daraus hervorgehenden Verbesserungen der vorläufig angenommenen Sternörter ist in alphabetischer Reihenfolge

Stern	$x = \Delta\alpha \cos\delta$	$y = \Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
	"	"	s	"
a	0.000	0.000	0.000	0.00
b	+0.263	−0.342	+0.032	−0.34
c	−0.319	+0.325	−0.039	+0.33
d	+1.415	+0.143	+0.171	+0.14
e	+0.845	+0.208	+0.102	+0.21
f	+1.816	+0.256	+0.220	+0.26
g	−0.007	+0.347	−0.001	+0.35
h	−0.815	+0.530	−0.099	+0.53
i	+0.346	−0.649	+0.042	−0.65
k	+0.646	−0.998	+0.078	−1.00
l	+0.316	+0.472	+0.038	+0.47
m	+0.311	+1.156	+0.038	+1.16
n	−0.001	+1.018	0.000	+1.02
o	+0.931	−0.655	+0.113	−0.66
p	+1.693	0.000	+0.205	0.00

Damit sind also die ausgeglichenen Oerter bezogen auf das Aequinoctium 1890.0 und gültig für eine mittlere Epoche von 1893.75.

	Ort nach Pihl			Verb.	Verbess. Ort	Ort nach Pihl			Verb.	Verbess. Ort
	h	m	s	s	s	°	'	"	"	"
a	2	9	10.606	0.000	10.606	+56	32	34.65	0.00	34.65
b		9	34.850	+0.032	34.882		23	11.20	−0.34	10.86
c		10	40.951	−0.039	40.912		30	0.44	+0.33	0.77
d		10	44.827	+0.171	44.998		41	54.39	+0.14	54.53
e		11	30.252	+0.102	30.354		39	37.60	+0.21	37.81
f		12	11.026	+0.220	11.246		48	37.80	+0.26	38.06
g		12	31.644	−0.001	31.643		35	28.78	+0.35	29.13
h		12	45.347	−0.099	45.248		29	10.10	+0.53	10.63
i		13	26.710	+0.042	26.752		21	36.30	−0.65	35.65
k		14	7.900	+0.078	7.978		24	2.40	−1.00	1.40
l		14	9.260	+0.038	9.298		44	17.20	+0.47	17.67
m		15	12.650	+0.038	12.688		53	1.30	+1.16	2.46
n		15	24.140	0.000	24.140		41	47.10	+1.02	48.12
o		15	38.400	+0.113	38.513		21	7.60	−0.66	6.94
p		17	4.910	+0.205	5.115		32	55.20	0.00	55.20

An diese Oerter ist nun noch das Ergebniss der Orientierung der ganzen Gruppe durch Festlegung der Richtung der langen Linie *ap* aus Beobachtungen am Heliometer selbst und an Meridiankreisen anzubringen.

Richtung der Linie *ap* aus Beobachtungen am Göttinger Heliometer.

Tag	Sternzeit	Bar.	Th.	Stunden-Winkel	Axe	Messung	k	l	J	Refr.	Aberr.	1890.0	Mittel
	h m	mm	°	h m									
1893 März 30	8 9.9	745	+ 7	+ 5 56	v	89° 43′.35	+ 0′.98	+ 0′.23	+ 1′.90	− 1′.94	− 0′.37	89° 44′.15	43′.02
	8 26.9			6 13		269 41.42	0.98	+ 0.05	+ 1.90	− 2.10	− 0.37	41.88	
Apr. 1	8 41.2	748	+ 11	+ 6 28	v	89 42.92	+ 0.98	− 0.12	+ 1.91	− 2.21	− 0.36	43.12	42.82
	8 58.7			6 45		269 42.65	0.98	− 0.30	+ 1.92	− 2.37	− 0.36	42.52	
5	9 10.4	753	+ 9	+ 6 57	v	89 43.78	+ 0.98	− 0.45	+ 1.93	− 2.52	− 0.36	43.36	42.99
	9 23.9			7 10		269 43.25	0.98	− 0.54	+ 1.94	− 2.65	− 0.36	42.62	
94 Oct. 27	20 39.0	734	+ 12	− 5 35	f	269 42.57	+ 1.15	− 0.08	− 1.89	+ 1.70	− 1.85	41.60	41.94
	21 2.0			5 12		89 43.18	1.15	+ 0.16	− 1.88	+ 1.52	− 1.85	42.28	
Nov. 1	20 36.9	754	+ 6	− 5 37	f	269 44.77	+ 1.15	− 0.10	− 1.89	+ 1.80	− 1.86	43.87	43.77
	21 2.4			5 11		89 44.50	1.15	+ 0.17	− 1.88	+ 1.59	− 1.86	43.67	
Dec. 3	22 20.3	749	+ 2	− 3 53	f	269 46.20	+ 1.15	+ 0.99	− 1.85	+ 1.06	− 1.81	45.74	45.73
	22 52.8			3 21		89 46.05	1.16	+ 1.28	− 1.84	+ 0.88	− 1.81	45.72	
												Mittel	43.38

Aus den ausgeglichenen Heliometer-Distanzen folgt, vorläufig noch orientirt nach den angenommenen Oertern von Oertel und Pihl (vergl. Seite 74)

Aequinoctium 1890

$$\text{Stern}\quad a\quad 2^h\ 9^m\ 10^s.606\qquad +56^\circ\ 32'\ 34''.65$$
$$p\quad 2\ 17\ \ 5.115\qquad 56\ 32\ 55.20$$

also $\quad \Delta\alpha = +7^m\ 54^s.509 \quad \Delta\delta = +20''.55 \quad \delta = +56^\circ\ 32'\ 44''.93$

und daraus ergiebt sich der berechnete Positionswinkel der Linie *ap* gegen einen durch die Mitte des Bogens gelegten Stundenkreis zu 89° 42′.00. Der aus den Messungen am Heliometer hervorgehende Positionswinkel ist dagegen wie oben

$$89^\circ\ 43'.38$$

es würde demnach der ganzen Gruppe eine Drehung von 89° 43′.38 − 89° 42′.00 = + 1′.38 gegeben werden. Wenn der der Mitte der Gruppe nahegelegene Stern g als Drehungsmittelpunkt angenommen wird, ergeben sich hieraus die an die Oerter der übrigen Sterne noch anzubringenden Verbesserungen in Rectascension und Declination nach den Ausdrücken

$$d.\Delta\alpha = \varrho \cos p \sec\delta . dp = \Delta\delta \sec\delta . dp$$
$$d.\Delta\delta = -\varrho \sin p\ dp = -\Delta\alpha \cos\delta . dp.$$

Nach Berücksichtigung dieser aus der Drehung herrührenden Verbesserungen handelt es sich dann darum die ganze innerlich ausgeglichene Ortsbestimmung der Sterne am Himmel festzulegen und dazu bot sich vorläufig als einziger Weg die Benutzung der in den Krüger'schen Zonen Helsingfors-Gotha enthaltenen Oerter der Sterne. Ich habe deshalb die am Heliometer bestimmten Oerter

damit verglichen, aber Unterschiede gefunden, die mir viel Mühe und weitläufige Rechnungen verursacht haben, da sich sehr erhebliche Unterschiede zeigten. Dadurch erschien meine durch Positionswinkel-Messungen erhaltene Orientirung der Gruppe als sehr zweifelhaft, indem sich namentlich in den Declinationen ein fortschreitender Gang in den Abweichungen zeigte. Nachdem diese Unterschiede später ihre Erklärung gefunden haben, wird es überflüssig sein, nun noch eine Schilderung der vielfachen Bemühungen und Nachrechnungen der Beobachtungen zu geben, dagegen werde ich zum Schlusse dieser Abhandlung die Zonenörter einer Prüfung unterziehen und zeigen, dass darin unerwartet grosse Unregelmässigkeiten stecken.

Die Oerter der beiden Sterne a und p waren schon früher am Reichenbach'schen Meridiankreise beobachtet worden, da aber dieses schon aus dem Jahre 1819 stammende Instrument ungeachtet vieler von mir veranlasster Verbesserungen, die den Gebrauch zum Theil ausserordentlich bequemer gestaltet haben (z. B. electrische Beleuchtung der Microscope usw.) doch die Declination nicht sehr genau liefert, weil die veraltete Einrichtung des Albidaden-Niveau am Höhenkreise ohne erhebliche Kosten nicht abgeändert werden konnte, so war es wünschenswerth, noch anderweitige Bestimmungen der Sternörter zu erhalten und auf meine an Geheimrath Förster gerichtete Bitte hat Dr. Battermann am Berliner Meridiankreise im Jahre 1897 Rectascensions- und Declinations-Unterschiede der Sterne a und p beobachtet, die eine Prüfung meiner Positionswinkel-Messungen liefern. Als aber damit die Oerter Helsingfors-Gotha immer noch sehr schlecht dargestellt wurden, wurden dann auf eine abermalige Bitte sämmtliche 15 Sterne meiner Triangulation im folgenden Jahre je zweimal am Berliner Meridiankreise beobachtet.

Das gesammte Material der Beobachtungen an Meridiankreisen ist das folgende:

Beobachtungen am Reichenbach'schen Meridiankreise in Göttingen bezogen auf das mittlere Aequinoctium 1890.0.

Tag			Kreis	Fäden	a AR.	a Decl.	p AR.	p Decl.	Beobachter
1891	Oct.	28	O	15	$2^h\,9^m\,10^s.58$	$+56^\circ\,32'\,33''.1$	$2^h\,17^m\,5^s.05$	$+56^\circ\,32'\,52''.8$	Buschbaum
		30	O	21	10.59	30.7	4.98	51.2	
	Nov.	7	O	21	10.63	35.6	5.04	53.7	
		28	W	21	10.40	34.4	5.12	51.4	
1892	Nov.	26	W	16	10.53	34.5	5.18	53.3	Grossmann
1895	Nov.	18	W	11	10.70	32.8	5.17	50.1	
		21	W	11	10.73	34.0	5.19	49.5	

Daraus folgt im Mittel

	a AR.	a Decl.	p AR.	p Decl.
Epoche 1893.16	$2^h\,9^m\,10^s.593$	$+56^\circ\,32'\,33''.6$	$2^h\,17^m\,5^s.104$	$+56^\circ\,32'\,51''.7$

$\Delta\alpha = +7^m\,54^s.511 \qquad \Delta\delta = +18''.1$

Wenn auch diesen Beobachtungen nur ein geringer Genauigkeitsgrad zukommt, so darf doch nicht verschwiegen werden, dass späterhin am Göttinger Meridiankreise noch verschiedene Verbesserungen angebracht sind, nämlich zu Anfang 1893 eine neue Einrichtung zur Einstellung bei Nadirbeobachtungen, 1897 Verbesserung des Alhidaden-Niveau, Abschleifen der Stahlstange am Microscoprahmen zur Anfhängung des Niveau, und dass dadurch besonders unter der geschickten Benutzung des Instruments durch Dr. Schwassmann die Resultate später an Genauigkeit sehr gewonnen haben.

Beobachtungen am Meridiankreise in Berlin.

Aequinoctium 1897.0.

1897 Oct. 29	Klemme O	$\Delta\alpha = +7^m 54^s.953$	$\Delta\delta = +0' 17''.48$
Nov. 7		54.881	17.58
14	W	54.866	17.00
19		54.963	16.78
Mittel 1897.86		$\Delta\alpha = +7\ 54.916$	$\Delta\delta = +0\ 17.21$
Reduction für Präcession		-0.410	$+\ 2.67$
Unterschied 1890.0		$+7\ 54.506$	$+0\ 19.88$

Dazu kommen noch die Beobachtungen im folgenden Jahre

Mittl. Aequinoctium 1898.0.

Stern	Tag	Klemme	α	Mittel	δ	Mittel
a	1898 Nov. 6	O	2^h 9^m 43^s.662	43^s.706	+ 56° 34′ 50″.29	50″.40
	Dec. 6	W	43.749		50.51	
b	Nov. 4	O	2 10 8.003	7.998	+ 56 25 26.61	26.52
	Dec. 7	W	7.993		26.43	
c	Oct. 29	O	2 11 14.128	14.135	+ 56 32 15.49	15.78
	Dec. 20	W	14.142		16.08	
d	Oct. 28	O	2 11 18.279	18.306	+ 56 44 9.62	9.62
	Dec. 21	W	18.332		9.62	
e	Nov. 8	O	2 12 3.705	3.688	+ 56 41 52.14	52.32
	Dec. 29	W	3.671		52.49	
f	Nov. 12	O	2 12 44.718	44.693	+ 56 50 52.35	52.28
	Dec. 27	W	44.668		52.20	
g	Nov. 13	O	2 13 4.960	4.982	+ 56 37 43.73	43.82
	Dec. 24	W	4.983		43.92	
h	98 Nov. 20	O	2 13 18.532	18.510	+ 56 31 24.58	24.73
	99 Jan. 1	W	18.488		24.88	
i	Nov. 13	O	2 14 0.069	0.046	+ 56 28 49.20	49.44
	Dec. 24	W	0.024		49.68	

Stern	Tag			Klemme	α	Mittel	δ	Mittel
					h m s	s	° ′ ″	″
k	1898	Nov.	12	O	2 14 41.325	41.319	+ 56 26 14.47	14.62
		Dec.	27	W	41.313		14.78	
l		Nov.	8		2 14 42.659	42.712	+ 56 46 30.86	30.84
		Dec.	29	O	42.766		30.81	
				W				
m		Oct.	28		2 15 46.304	46.306	56 55 14.96	15.27
		Dec.	21		46.309		15.58	
				O				
n		Oct.	29	W	2 15 57.687	57.685	56 54 0.51	0.70
		Dec.	20		57.683		0.89	
o		Nov.	4	O	2 16 11.923	11.921	56 23 19.82	19.98
		Dec.	7	W	11.919		20.15	
p		Nov.	6	O	2 17 38.714	38.724	56 35 6.78	7.02
		Dec.	6	W	38.733		7.26	

Hieraus folgt zunächst für die Orientierungslinie *ap*

Epoche 1898.9 Aeq. 1898.0	$+ 7^m 55\overset{s}{.}018$	$+ 0' 16\overset{''}{.}62$
Red. auf 1890	— 0.469	+ 3.05
1890.0	+ 7 54.549	+ 0 19.67

Man hat demnach für das Aequinoctium 1890.0 aus Meridiankreis-Beobachtungen

Göttingen	1893.2	$+ 7^m 54\overset{s}{.}511 = + 7117\overset{''}{.}66$	$+ 18\overset{''}{.}13$	4 Buschbaum, 3 Grossmann
Berlin	97.9	54.508 7117.62	19.88	4 Battermann
„	98.9	54.549 7118.24	19.67	2 Battermann

und daraus den Positionswinkel *ap* und die mit Rücksicht auf verschiedene Erwägungen angenommenen Gewichte

Göttingen	1893.2	$89° 44\overset{'}{.}12$	Gew. 0.5
Berlin	1897.9	42.58	4
	1898.9	42.77	2
Mittel mit Gewichten I		89 42.76	

Dagegen haben die directen Messungen des Positionswinkels am Heliometer ergeben

Epoche 1894.06 II $89° 43\overset{'}{.}38$

Betrachtet man die Bestimmungen an Meridiankreisen und am Heliometer als gleichwerthig, so hat man im Mittel

$$\tfrac{1}{2}\,(\mathrm{I} + \mathrm{II}) \quad 89° 43\overset{'}{.}07$$

und demnach die Drehung der Gruppe gegen die Annahme Oertel-Pihl

$$dp = + 1\overset{'}{.}07$$

Die dieser Drehung um den Stern *g* entsprechenden Verbesserungen $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ sind an die Oerter auf Seite 74 anzubringen.

Damit erhält man für 1890.0

	Ausgangswerthe				Verbesserte aber noch nicht endgültige Oerter	
	h m s	s	° ′ ″	″	h m s	° ′ ″
a	2 9 10.606	−0.007	+56 32 34.65	+0.52	2 9 10.599	+56 32 35.17
b	9 34.882	−0.028	23 10.86	+0.45	9 34.854	23 11.31
c	10 40.912	−0.012	30 0.77	+0.28	10 40.900	30 1.05
d	10 44.998	+0.015	41 54.53	+0.27	10 45.013	41 54.80
e	11 30.354	+0.009	39 37.81	+0.16	11 30.363	39 37.97
f	12 11.246	+0.029	48 38.06	+0.05	12 11.275	48 38.11
g	12 31.643		35 29.13		12 31.643	35 29.13
h	12 45.248	−0.014	29 10.63	−0.03	12 45.234	29 10.60
i	13 26.752	−0.031	21 35.65	−0.14	13 26.721	21 35.51
k	14 7.978	−0.026	24 1.40	−0.25	14 7.952	24 1.15
l	14 9.298	+0.019	44 17.67	−0.26	14 9.317	44 17.41
m	15 12.688	+0.039	53 2.46	−0.41	15 12.727	53 2.05
n	15 24.140	+0.014	41 48.12	−0.44	15 24.154	41 47.68
o	15 38.513	−0.033	21 6.94	−0.48	15 38.480	21 6.46
p	17 5.115	−0.006	32 55.20	−0.70	17 5.109	32 54.50

Um diese Oerter auf das System des Fundamental-Catalogs der Astronomischen Gesellschaft zu beziehen, sind die Beobachtungen von Dr. Battermann am Berliner Meridiankreise zu verwenden, die zu diesem Zwecke ebenfalls auf das Aequinoctium von 1890.0 zu reduciren sind. Damit ergiebt sich mit Berücksichtigung des 8fachen der Präcession für die in der Mitte liegende Epoche 1894.0 die Vergleichung mit obigen noch nicht endgültigen Göttinger Oertern

	Berlin Aeq. 1898.0 Epoche 1898.9				E.B. für −5.15 Jahre		Berlin 1890		Berlin minus Göttingen	
	h m s	s	° ′ ″	′ ″	s	″	h m s	° ′ ″	s	″
a	2 9 43.706	−33.250	+56 34 50.40	−2 15.51			2 9 10.456	+56 32 34.89	−0.14	−0.3
b	10 7.998	−33.222	25 26.52	15.35			9 34.776	23 11.17	−0.08	−0.1
c	11 14.135	−33.326	32 15.78	14.94			10 40.809	30 0.84	−0.09	−0.2
d	11 18.306	−33.395	44 9.62	14.91			10 44.911	41 54.71	−0.10	−0.1
e	12 3.688	−33.428	41 52.32	14.63			11 30.260	39 37.69	−0.10	−0.3
f	12 44.693	−33.519	50 52.88	14.37			12 11.174	48 38.51	−0.10	+0.4
g	13 4.982	−33.465	37 43.82	14.23			12 31.517	35 29.59	−0.13	+0.5
h	13 18.510	−33.443	31 24.73	14.15			12 45.067	29 10.58	−0.17	0.0
i	14 0.046	−33.442	23 49.44	13.89			13 26.604	21 35.55	−0.12	0.0
k	14 41.319	−33.495	26 14.62	13.62			14 7.824	24 1.00	−0.13	−0.2
l	14 42.712	−33.611	46 30.84	13.61	+0.019	−0.10	14 9.120	44 17.13	−0.20	−0.3
m	15 46.306	−33.725	55 15.27	13.19	+0.007	−0.05	15 12.588	53 2.03	−0.14	0.0
n	15 57.685	−33.672	44 0.70	13.12			15 24.013	41 47.58	−0.14	−0.1
o	16 11.921	−33.568	23 19.98	13.02			15 38.353	21 6.96	−0.13	+0.6
p	17 38.724	−33.719	35 7.02	12.46			17 5.005	32 54.56	−0.10	+0.1
								Mittel	−0.125	0.00

Bringt man diesen Unterschied −0.125 0.00 in Rechnung, so erhält man als Resultat der heliometrischen Triangulation bezogen auf eine Orientierung der Linie *ap* durch Meridiankreisbeobachtungen in Berlin und Göttingen und durch Messungen des Positionswinkels am Göttinger Heliometer die Tabelle A.

	A — Epoche 1893.75 Aequinoctium 1890.0		Berlin Meridkr. minus Göttingen Heliometer		B				Berlin minus Göttingen		C	
	h m s	° ′ ″	s	″	s	″	s	″	s	″	s	″
a	2 9 10.474	+ 56 32 35.17	— 0.02	— 0.3	+ 0.003	— 0.20	10.477	34.97	— 0.02	— 0.1	10.479	34.94
b	9 34.729	23 11.31	+ 0.05	— 0.1	+ 0.011	— 0.18	34.740	11.13	+ 0.04	0.0	34.742	11.10
c	10 40.775	30 1.05	+ 0.05	— 0.2	+ 0.005	— 0.11	40.780	0.94	+ 0.03	— 0.1	40.782	0.91
d	10 44.888	41 54.80	+ 0.02	— 0.1	— 0.006	— 0.11	44.882	54.69	+ 0.03	0.0	44.884	54.66
e	11 30.238	39 37.97	+ 0.02	— 0.3	— 0.004	— 0.06	30.234	37.91	+ 0.03	— 0.2	30.236	37.88
f	12 11.150	48 38.11	+ 0.02	+ 0.4	— 0.012	— 0.02	11.138	38.09	+ 0.04	+ 0.4	11.140	38.06
g	12 31.518	35 29.13	0.00	+ 0.5			31.518	29.13	0.00	+ 0.5	31.520	29.10
h	12 45.109	29 10.60	— 0.04	0.0	+ 0.006	+ 0.01	45.115	10.61	— 0.05	0.0	45.117	10.58
i	13 26.596	21 35.51	+ 0.01	0.0	+ 0.013	+ 0.06	26.609	35.57	0.00	0.0	26.611	35.34
k	14 7.827	24 1.15	0.00	— 0.2	+ 0.010	+ 0.10	7.837	1.25	— 0.01	— 0.2	7.839	1.22
l	14 9.192	44 17.41	— 0.07	— 0.3	— 0.008	+ 0.10	9.184	17.51	— 0.06	— 0.4	9.186	17.48
m	15 12.602	53 2.05	— 0.01	0.0	— 0.015	+ 0.16	12.587	2.21	0.00	— 0.2	12.589	2.18
n	15 24.029	41 47.68	— 0.02	— 0.1	— 0.006	+ 0.17	24.023	47.85	— 0.01	— 0.3	24.025	47.82
o	15 38.355	21 6.40	0.00	+ 0.6	+ 0.013	+ 0.19	38.368	6.59	+ 0.01	+ 0.4	38.370	6.56
p	17 4.984	32 54.50	+ 0.02	+ 0.1	+ 0.002	+ 0.28	4.986	54.78	+ 0.02	— 0.2	4.988	54.75

Aus der Znsammenstellung der Indexfehler des Positionskreises auf Seite 57 ersieht man, dass der aus den Berliner Meridianbeobachtungen der Perseussterne *ap* abgeleitete Werth aus der Reihe der übrigen ein wenig heraustritt, nämlich nur $+0\overset{\prime}{.}32$ beträgt, während der aus dem Ausdruck $k = +1\overset{\prime}{.}17 + 0\overset{\prime}{.}113\,(t - 1895)$ folgende Werth für 1894.1 $+1\overset{\prime}{.}07$ sein würde. Nach den Meridianbeobachtungen in Berlin ist der Declinations-Unterschied der Sterne *p* und *a* auf 1890 reducirt, mit Berücksichtigung der Gewichte $+19\overset{\prime\prime}{.}81$, in der obigen Zusammenstellung A dagegen $+19\overset{\prime\prime}{.}33$. Der Unterschied von $0\overset{\prime\prime}{.}48$ würde sich durch eine Drehung der ganzen Gruppe um den Stern *g* im Betrage von $-0\overset{\prime}{.}43$ beseitigen lassen und die entsprechende Aenderung der Sternörter ist neben A in der Columne B enthalten. Der Mittelwerth Berlin-Göttingen in Columne B ist $+0\overset{s}{.}002$ -0.03 und bringt man diesen kleinen Unterschied noch an die Oerter in B an, so erhält man die Columne C.

Es bedeutet also um noch einmal zu wiederholen
A die Orientierung der Gruppe durch die Linie *ap* mit Hülfe des Indexfehlers aus der Gesammtheit aller Bestimmungen über 10 Jahre mit Berücksichtigung der allmähligen Aenderung, C dagegen die Orientirung nach den Declinationen der Sterne *a* und *p* am Berliner Meridiankreise.

Als schliesslich anzunehmende Form habe ich den Ausdruck $\frac{1}{2}$ (A + C) gewählt und damit ist das Endresultat der ganzen Untersuchung

Oerter von fünfzehn helleren Sternen der beiden benachbarten Sternhaufen *h* und χ Persei aus Beobachtungen am Göttinger Heliometer für die Epoche 1893.75 und das Aequinoetium 1890.0.

	B.D. +56°	Grösse B.D.	Grösse Kr.	AR.	Praec.	Var. saec.	E. B.	Decl.	Praec.	Var. saec.	E. B.	Berlin—Göttingen	
				h m s	s	s	s	° ′ ″	″	″	″	s	″
a	471	6.6	6.7	2 9 10.477	+ 4.1533	+ 0.0721		+ 56 32 35.06	+ 16.952	— 0.328		— 0.02	— 0.2
b	479	8.9	8.9	9 34.736	4.1499	0716		23 11.21	16 933	0.329		+ 0.04	0.0
c	498	8.6	8.6	10 40.779	4.1628	0720		30 0.98	16.880	0.332		+ 0.03	— 0.1
d	500	8.5	8.5	10 44.886	4.1715	0727		41 54.73	16.877	0.332		+ 0.02	0.0
e	530	6.7	6.4	11 30.237	4.1756	0726		39 37.93	16.842	0.334		+ 0.02	— 0.2
f	543	8.0	8.2	12 11.145	4.1870	0731		48 38.09	16.809	0.337		+ 0.03	+ 0.4
g	545	8.5	8.6	12 31.519	4.1803	0724		35 29.12	16.793	0.337		0.00	+ 0.5
h	547	8.2	7.2	12 45.113	4.1775	0720		29 10.59	16.782	0.337		— 0.05	0.0
i	555	8.8	8.4	13 26.604	4.1773	0716		21 35.55	16.749	0.339		0.00	0.0
k	567	8.4	8.3	14 7.833	4.1841	0718		24 1.19	16.716	0.341		— 0.01	— 0.2
l	568	6.7	6.6	14 9.189	4.1985	0729	— 0.0087	44 17.45	16.715	0.342	+ 0.02	— 0.07	— 0.3
m	593	7.0	7.0	15 12.596	4.2127	0734	— 0.0014	53 2.12	16.663	0.345	+ 0.01	— 0.01	— 0.1
n	595	8.5	8.3	15 24.027	4.2060	0728		41 47.75	16.654	0.345		— 0.01	— 0.2
o	598	8.4	8.6	15 38.363	4.1930	0716		21 6.48	16.642	0.345		— 0.01	+ 0.5
p	608	9.2		17 4.986	4.2120	0726		32 54.63	16.572	0.354		+ 0.02	— 0.1

Die Praecessien für 1890, säculare Variation und Eigenbewegung sind den Zonen von Krüger entnommen worden nnd die Grössenangaben in der ersten Linie der Bonner Durchmusternng nnd daneben den soeben genannten Zonen. Für Stern *p*, der bei Krüger fehlt, ist die Präcession berechnet worden. Am rechten Ende ist nech einmal der Unterschied Berlin Meridiankreis minns Göttingen Heliometer aufgenommen.

Nach brieflicher Mittheilung von Prof. Battermann (1899 Mai 18) beruhen die Beobachtungen dieser Sterne nnd somit anch die obigen Oerter in letzter Linie auf der Position des Sterns Σ Cassiopejae in den Astron. Nachrichten Bd. 147 Seite 57, die für die Epoche 1893.75 von dem Ort des Fundamental-Catalogs der Astronomischen Gesellschaft nm $+0^s.012$ nnd $-0''.11$ abweicht.

Nachdem nun das Resultnt dieser Untersuchnng vellständig abgeleitet ist, wird es von Werth sein auch anderweitige Vermessnngen dieser beiden Sternhaufen heranzuziehen nnd in erster Linie werden die Ergebnisse der Krüger'schen Zonenbeobachtnngen in Helsingfors-Gotha zu untersuchen sein, da mit Ansnahme des Sterns *p* alle übrigen in den Zonen enthalten sind. Das Ergebniss der Vergleichnng mit Helsingfors-Gotha und mit den übrigen in der Einleitung erwähnten Beobachtungen ist im Folgenden zusammengestellt, nachdem die Oerter anf 1890.0 reducirt worden sind.

Nachstehende Unterschiede sind im Sinne Krüger minns Schur, Oertel minus Schur nsw. anfznfassen.

	Helsingfors Gotha	Ep. 1800 +	s	"	Bronsky u. Stebnitzky 1891.71	s	"	Pihl 1875	s	"	Krüger Bonn Heliom. 1861.7	s	"	Oertel 1888	s	"
a	2030	70.1	− 0.01	− 0.7	76	+ 0.03	+ 0.7				18	+ 0.10	0.0	62	+ 0.13	− 0.4
b	2043	79.0	+ 0.23	− 1.0	119	+ 0.05	− 0.1				32	+ 0.10	0.0			
c	2071	80.0	+ 0.31	− 1.6	293	+ 0.06	− 0.2				5	+ 0.03	0.0	34	+ 0.17	− 0.5
d	2073	79.0	+ 0.13	− 0.9	311	+ 0.06	+ 0.1				4	+ 0.01	− 0.2	52	− 0.06	− 0.3
e	2093	70.1	− 0.06	− 0.6	504	+ 0.07	− 0.6				2	+ 0.04	0.0	19	+ 0.02	− 0.3
f	2113	73.5	+ 0.02	0.0	630	+ 0.05	0.0				12	+ 0.01	0.0	74	− 0.12	− 0.3
g	2117	78.9	+ 0.19	− 1.0	662	+ 0.03	0.0				26	+ 0.01	+ 0.1	75	+ 0.12	− 0.3
h	2120	74.4	− 0.04	+ 0.3	680	+ 0.12	− 0.3	11	+ 0.06	+ 0.7	31	+ 0.03	+ 0.2	91	+ 0.23	− 0.5
i	2137	74.1	− 0.14	+ 0.6	744 *a*	+ 0.05	− 0.3	33	+ 0.13	+ 0.8						
k	2148	74.0	+ 0.11	+ 0.1	840	− 0.01	− 0.5	77	+ 0.10	+ 1.2						
l	2150	70.1	− 0.20	0.0	843	+ 0.05	+ 0.9	78	+ 0.02	+ 0.2						
m	2177	77.6	+ 0.05	+ 0.8	993	+ 0.05	− 0.1	150	+ 0.06	− 0.5						
n	2187	79.0	+ 0.10	− 0.1	1008	+ 0.10	− 0.1	159	+ 0.14	− 0.6						
o	2190	77.2	0.00	+ 0.9	1032	+ 0.04	+ 0.1	171	+ 0.07	+ 1.1						
p					1151 *a*	+ 0.06	− 0.2	232	− 0.05	+ 0.7						

Bei H. C. Vogel kommen nur die Sterne *l* und *m* nach meiner Bezeichnung ver und es hat deshalb die Vergleichung mit meinen Oertern nur geringes Interesse, dagegen ist eine grössere Zahl in den Krüger'schen Zonen vorhanden, so dass eine Vergleichung damit angemessen ist, nämlich

Helsingf.—Gotha	Vogel	Krüger—Vogel (s)	Krüger—Vogel (")	Grösse Krüger	Grösse Vogel
2131	d	− 0.07	− 0.4	7.8	8.2
2150	b	− 0.14	− 0.1	6.6	6.6
2152	a	− 0.01	− 0.1	8.4	8.3
2153	h	+ 0.02	+ 0.6	9.1	9.1
2154	l	− 0.04	+ 1.0	9.2	9.4
2157	n	+ 0.04	− 0.6	8.4	8.5
2158	m	− 0.05	− 1.9	9.1	8.9
2163	δ	+ 0.02	+ 0.2	8.7	8.5
2164	p	+ 0.07	− 0.2	9.0	8.8
2165	ε	+ 0.23	+ 0.1	9.2	9.0
2166	q	0.00	0.0	8.5	8.5
2171	s	− 0.03	− 0.4	9.1	9.0
2175	c	+ 0.02	− 0.9	7.7	7.7
2187	x	+ 0.10	+ 0.3	8.3	8.0
2189	y	+ 0.13	+ 0.9	8.2	8.5

Die Unterschiede zwischen den Helsingforser Zonen und der Göttinger Triangulation sind sehr unregelmässig, auch wenn man bei den Rectascensionen auf die hohe Declination der Gruppe Rücksicht nimmt in Folge derer zur Reduction auf den grössten Kreis die Unterschiede ungefähr durch 2 dividirt werden müssen, aber auch die Declinationen stimmen nicht gut überein. Ehe mir die genauen Berliner Meridianbeobachtungen zu Gebote standen habe ich zahlreiche Versuche gemacht eine Uebereinstimmung durch Drehung der ganzen

Gruppe hervorzubringen, wodurch meine Positionswinkel-Messungen am Heliometer stark in Zweifel gezogen wurden. Dass diese Unregelmässigkeiten nicht der Göttinger Triangulation zur Last fallen, zeigt die recht gute Uebereinstimmung mit den Berliner Meridianbeobachtungen. Eine Unregelmässigkeit in den Oertern der Helsingforser Zonen ist nun auch durch die Vergleichung mit Vogel's Vermessung am sechszölligen Refractor in Leipzig angedeutet.

Sehr befriedigend stimmen dagegen die Messungen von Krüger am Bonner Heliometer mit der Göttinger Triangulation überein, wenn man erwägt, dass ein Zwischenraum von beinahe einem drittel Jahrhundert dazwischen liegt und die Eigenbewegungen nur bei zwei Sternen *l* und *m* in Betracht gezogen werden konnten.

Krüger hat seine heliometrische Vermessung auf zwei von Argelander am Bonner Meridiankreise beobachtete Sterne bezogen, nämlich BD + 56.522 und + 56.530. Der letztere ist der Stern *e* meiner Triangulation und es ergiebt sich der Unterschied

Bonn Meridiankreis minus Göttingen Heliometer $-0^{s}.038$ $+0''.02$

Bringt man diesen Unterschied noch in Rechnung, so hat man die Vergleichung der Heliometermessungen

	Bonn minus Göttingen	
a	$+0^{s}.06$	$0''.0$
b	+ 0.07	0.0
c	0.00	0.0
d	− 0.03	− 0.2
e	0.00	0.0
f	− 0.03	0.0
g	− 0.03	+ 0.1
h	− 0.01	+ 0.2

also eine vorzügliche Uebereinstimmung, wenn man noch $\Delta\alpha$ durch Multiplication mit 0.55 auf den grössten Kreis reducirt.

Für die photographische Aufnahme von Bronsky und Stebnitzky ist eine Vergleichung sämmtlicher von mir beobachteten Sterne möglich und es scheint deshalb auch noch eine Vergleichung mit den Berliner Meridianbeobachtungen von Werth.

	Brons. u. Steb. minus Schur		Batterm.—Schur		Brons.—Batterm.		Brons.—Schur		Brons.—Batterm.	
a	$+0^{s}.03$	$+0''.7$	$-0^{s}.02$	$-0''.2$	$+0^{s}.05$*	$+0''.8$	$-0^{s}.02$	$+0''.7$	$-0^{s}.01$	$+0''.8$
b	+ 0.05	− 0.1	+ 0.04	0.0	+ 0.01	− 0.1	0.00	− 0.1	− 0.05	− 0.1
c	+ 0.06	− 0.2	+ 0.03	− 0.1	+ 0.03	− 0.1	+ 0.01	− 0.2	− 0.03	− 0.1
d	+ 0.06	+ 0.1	+ 0.02	0.0	+ 0.04	+ 0.1	+ 0.01	+ 0.1	− 0.02	+ 0.1
e	+ 0.07	+ 0.6	+ 0.02	− 0.2	+ 0.05	− 0.1	+ 0.02	+ 0.6	− 0.01	− 0.4
f	+ 0.05	0.0	+ 0.03	+ 0.4	+ 0.02	− 0.4	0.00	0.0	− 0.04	− 0.4
g	+ 0.03	0.0	0.00	+ 0.5	+ 0.03	− 0.5	− 0.02	0.0	− 0.03	− 0.5
h	+ 0.12	− 0.3	− 0.05	0.0	+ 0.17	− 0.3	+ 0.07	− 0.3	+ 0.11	− 0.3
i	+ 0.05	− 0.3	0.00	0.0	+ 0.05	− 0.3	0.00	− 0.3	− 0.01	− 0.3
k	− 0.01	− 0.5	− 0.01	− 0.2	0.00	− 0.3	− 0.06	− 0.5	− 0.06	− 0.3
l	+ 0.05	+ 0.9	− 0.07	− 0.3	+ 0.12	+ 1.2	0.00	+ 0.9	+ 0.06	+ 1.2
m	+ 0.05	− 0.1	− 0.01	− 0.1	+ 0.06	0.0	0.00	− 0.1	0.00	0.0
n	+ 0.10	− 0.1	− 0.01	− 0.2	+ 0.11	+ 0.1	+ 0.05	− 0.1	+ 0.05	+ 0.1
o	+ 0.04	+ 0.1	− 0.01	+ 0.5	+ 0.05	− 0.4	− 0.01	+ 0.1	− 0.01	− 0.4
p	+ 0.06	− 0.2	+ 0.02	− 0.1	+ 0.04	− 0.1	+ 0.01	− 0.2	− 0.02	− 0.1

Die Differenzen Battermann — Schur müssen ihrer Entstehung gemäss im Mittel Null geben. Bringt man dasselhe auch in den Differenzen Bronsky u. Stehnitzky — Schur und Bronsky u. Stebnitzky — Battermann hervor, indem man $-0^{s}.05$ $0''.0$ und $-0^{s}.06$ $0''.0$ hinzufügt, so ergehen sich die letzten beiden Columnen.

In Anbetracht, dass die Oerter von Bronsky und Stehnitzky nur auf zwei photographischen Aufnahmen beruhen ist die Genanigkeit eine recht hefriedigende.

Durch diese Triangulation ist eine Grundlage für fernere Aufnahmen geschaffen, die wohl am zweckmässigsten durch die Photographie geliefert werden, wobei die Constanten zur Reduction der photographischen Aufnahmen durch die heliometrisch hestimmten Oerter der helleren Sterne ermittelt werden können.

Ich hätte einen Theil der Beobachtungen, nämlich die Bestimmung mancher schwächerer Sterne noch übernehmen können, sofern sie am Heliometer messbar sind, aber die Arbeit würde dadurch sehr in die Länge gezogen werden. Es ist empfehlenswerth die Anwendung des Heliometers nicht weiter zu treiben als zur Beschaffung der Grundlagen und das Uebrige der Photographie zu überlassen, die bei genügender Exposition Sterne zur Darstellung hringt, die am Heliometer garnicht oder nur bei grosser Anstrengung der Augen messhar sind. Auch lässt sich ein grösseres Aequatoreal mit Faden-Mikrometer hierzu verwenden indem Rectascensions- und Declinations-Unterschiede gegen mehrere der im obigen Verzeichnisse enthaltenen 15 Sterne gemessen werden.

Beifolgende Karte der heiden Sternhaufen, worin die zwei grossen Vierecke und die ührigen Dreiecke eingezeichnet sind, ist eine Copie aus der Abhandlung O. A. L. Pihl, The stellar cluster χ Persei micrometrically surveyed. Christiania 1891 und hezieht sich auf das Aequinoctium 1870.

Verbesserungen zu früheren Veröffentlichungen der Sternwarte.

a) Stern-Catalog für 1860 nach Klinkerfues, von W. Schur 1891. Astr. Mitthlgg. Zweiter Theil.

Bei Gelegenheit einer Vergleichung von Oertern aus diesem Catalog mit denjenigen des elften Stücks des Catalogs der Astronomischen Gesellschaft richtete Herr Geh.-Rath Auwers im Jahre 1893 an mich eine Anfrage, die eine Prüfung einiger Reductionen veranlasste und nachstehende Verbesserungen ergab.

Catalog Nr.	1828		δ + 10″.0
	1884	α − 10.00	
	5475		+ 26.0
	5532		− 11 36.2
	5769		− 3 2.4
	5790	+ 2.22	−1 0 1.5
	5955	− 3,38	− 10.1
	5964		−1 0 1.6
	5968	+ 0.98	+ 13.3
	5980	− 2.18	
	6064	− 2,13	− 7.9
	6067		−1 0 1.5
	6100	− 0.05	
	6342	wenn Gruppen *a* und *b* verwechselt sind, δ vielleicht um + 9″.8 zu verbessern.	
	6444	− 10.00	
	6477		+ 10.0

Ferner bedürfen die Rectascensionen der Zone *f* von 1861 October 26 einer durchgehenden Correction. Die Anschlusssterne für diese Zone sind nämlich hauptsächlich dem Cataloge von Schjellerup entnommen und die Ausgleichung für diesen Tag hatte für den stündlichen Gang der Pendeluhr Hardy den ungewöhnlichen grossen Werth $-0^s.824$ ergeben, der schon bei der Berechnung gegen die benachbarten Tage auffiel, aber in Ermangelung sicherer Sternörter nicht weiter geprüft werden konnte. In der Einleitung zum Catalog der Astr. Ges. Seite 102 ist dieser Gang durch Vergleichungen mit späteren Beobachtungen erheblich reducirt worden. Der abweichende Gang ist dadurch entstanden, dass die zu seiner Berechnung besonders beitragenden Sterne Schjellerup 8503/4 und 8534 zu Anfang, und 9158 und 9235 zu Ende des Beobachtungsabends stärkerer Correctionen bedürfen. Nachdem die Zone + 15 bis + 20 veröffentlicht ist und mir die Sternörter aus der Zone + 5 bis + 15 seitens der Leipziger Sternwarte mitgetheilt worden sind, lässt sich der Uhrgang jetzt mit grösserer Zuverlässig-

keit aus den 17 Anschlusssternen ableiten, nämlich

für $21^h 48^m,0$ Uhrstand $-2^s.63$, stündl. Gang $-0^s.599$

während früher angenommen war

-2.59 -0.824

Damit erhält man die Verbesserungen der Rectascensionen aus der Zone *f*

für $21^h\ 0^m$	$-0^s,22$
10	-0.18
20	-0.15
30	-0.11
40	-0.07
50	-0.03
22 0	0.00
10	$+0.04$
20	$+0.08$
30	$+0.11$
40	$+0.15$

Eine Anzahl der Sterne der Zone *f* ist auch in der Zone *g* von October 27 enthalten wobei sich der stündliche Gang der Uhr zu $-0^s.34$ ergeben hatte, der einigermaassen mit den benachbarten Werthen übereinstimmt; für die mit *fg* bezeichneten Sterne des Göttinger Catalogs ist daher an die Rectascensionen die Hälfte der gegebenen Verbesserungen anzubringen, wenn man die Zone *g* allein als nicht verbesserungsbedürftig ansieht.

Ueber die durch den Quecksilber-Contact verursachten grossen Störungen im Gang der sonst vortrefflichen Pendeluhr Hardy vergleiche man meine Bemerkungen auf Seite XII der Einleitung zum Göttinger Stern-Catalog.

Ausser den obigen Verbesserungen sind noch die nachfolgenden zu bemerken

Nr. 3081. Es ist nach Dr. Kam (Brief von 1896 Febr. 16) besser die ursprüngliche Declination nämlich $+11^\circ 18' 49''.8$ herzustellen anstatt die Scalenablesung um einen Theil zu verändern.

6299. $-0^s.48$

6571. $-5^s.5963$ anstatt $-5^s.6963$, $-5^\circ 17' 7''.0$ anstatt $-5^\circ 14' 7''.0$

Ferner finden sich noch Verbesserungen in: Public. of the Astr. Soc. of the Pacif. Vol. XI, Nr. 71, Seite 259, nämlich

Nr. 16.	D. M.	$+9^\circ.8$	anstatt	$9^\circ.38$
2121.		8^h	„	7^h
5602.		-6.5757	„	$+6.5657$

b) Die Oerter der helleren Sterne der Praesepe von W. Schur. Astron. Mittheilungen. Vierter Theil.

Seite 79	Z. 3 v. o.		161^{s}	anstatt	151^{s}
	4 v. o.		$18^{h} 39^{m}.8$	anstatt	$18^{h} 19^{m}.3$
		O	21.71	„	21.89
		N—O	—0.28	„	—0.45
		Oc.-St.	—165	„	—266
		Refr.	+548	„	+601
		Abstand	161.3480	„	161.3412

	20 v. o.	Aberr. + 19 anstatt + 47, Abstand	161.3415 anstatt	3443
	21		3497	3525
	22		3355	3383

101	letzte Zeile	$+0^{h} 43^{m}$	anstatt	$+0^{h} 39^{m}$
		+0.61	„	+0.59
		53.72	„	53.70
		53.82	„	53.81
141	7 v. o.	35″	„	36″

Eine Unrichtigkeit in der Verwandlung der Scalentheile in Bogensecunden bei der Distanz Nr. 135 bringt folgende Abänderungen hervor

Seite 183 Z. 13 v. o. für Nr. 135 90″.82 anstatt 91″.00, 90″.86 anstatt 91″.04,
+2.957 anstatt +2,965, —120″.76 anstatt —120″.96,
+2.957 anstatt +2.965, —120″.76 anstatt —120″.96.

22 v. o. Winnecke 28 Schnr 21 41″.296 anstatt 41″.304,
23″.68 anstatt 23″.48

184 32 v. o. 41″.296 anstatt 41″.304, 23″.68 anstatt 23″.48

288 26 v. o. 41″.296 anstatt 41″.304, 23″.68 anstatt 23″.48
49.312 „ 49.320, 30.18 „ 29.98

289 26 v. o. —0″.131 anstatt —0″.123, —0″.78 anstatt —0″.98,
—0.0040 „ —0.0038, —0.024 „ —0.030
—0.0043 „ —0.041, +0.015 „ +0.09
+0.0001 „ +0.0003, +0.008 „ +0.002

ferner

299 2 v. u. 20″ anstatt 26″

305 Gonld 12 834″.75 anstatt 843″.75

c) Schur und Stichtenoth, Olbers' Beobachtungen, Göttingen 1899.

Seite 1	Zeile 15 v. o.	Jahrzehnt anstatt Jahrzent
64. 65		Fig. 5 anstatt Fig. 3
		6 „ 4
65	18 v. o.	HCB anstatt $D\varphi B$
145	4 v. u.	confuser anstatt confusser.



Verbesserungen.

Seite 2	6 v. u.	bis anstatt bei
	8 v. u.	Resultaten anstatt Resulaten


OF CALIFORNIA
Digitized by Google


Schaften zu Gottingen.
v.1
Math.-physik. klasse.
Abhandlungen.
U.C. BERKELEY LIBRARIES
C038111618
AS
182
G342
v.1

